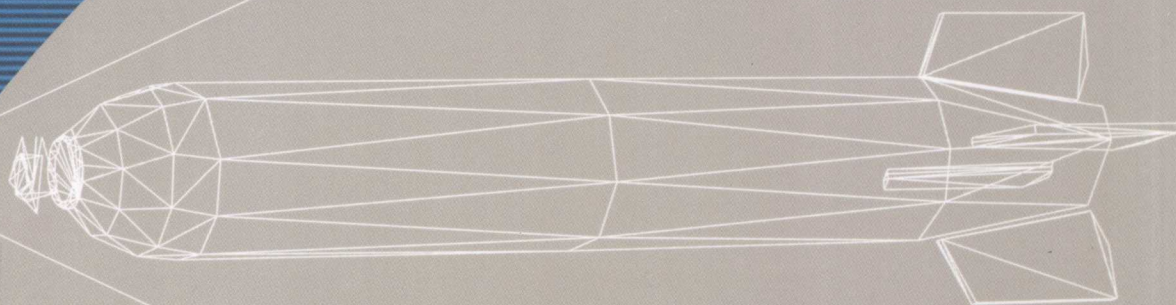


普通高等教育兵工类规划教材

导弹飞行力学

钱杏芳 林瑞雄 赵亚男 编著



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

普通高等教育兵工类规划教材

责任编辑：刘晓然

书籍装帧：



ISBN 7-81045-714-4



9 787810 457149 >

ISBN 7-81045-714-4

定价：25.70 元

导弹飞行力学

钱杏芳 林瑞雄 赵亚男 编著

TJ760.12

Q1

北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书主要内容有:作用在导弹上的力和力矩;运动方程组的建立、简化和解算;方案飞行弹道;导引飞行弹道;初始段弹道;导弹动态特性的研究方法;导弹弹体的纵向和侧向动态特性分析;滚转导弹弹体动态特性分析;导弹运动的自动稳定与控制。

本书为高等院校导弹总体设计、导弹制导与控制专业本科生的教科书,也可作为其他与导弹有关专业的教材或教学参考书,还可供有关的专业科技人员参考。

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

导弹飞行力学/钱杏芳等编著. —北京:北京理工大学出版社,
2006.7 重印

ISBN 7-81045-714-4

I. 导… II. 钱… III. 导弹-飞行力学 IV. V212

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 63654 号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京圣瑞伦印刷厂

开 本 / 787 毫米 × 1092 毫米 1/16

印 张 / 19.25

字 数 / 450 千字

版 次 / 2006 年 7 月第 1 版第 3 次印刷

印 数 / 3001 ~ 5000 册

定 价 / 25.70 元

图书出现印装质量问题,本社负责调换

出版说明

在跨入 21 世纪之际,根据兵器工业科技与经济发展对于人才素质和质的要求,兵器工业总公司教育局组织兵工专业教学指导委员会制定了教材编写与出版规划。在制定规划的过程中,我们力求贯彻教育部关于“抓重点,出精品”的教材建设方针,根据面向 21 世纪军工专业课程体系 and 教学内容改革的总体思路,本着“提高质量,保证重点”的原则,精心遴选了在学校使用两遍以上,教学效果良好的部分讲义列入教材规划,兵工专业教学指导委员会的有关专家对于这些规划教材的编写大纲都进行了严格的审定。可以预计,这批规划教材的出版将促进兵工类专业教育质量的提高、教学改革的深化和兵器科学与技术的发展。

殷切地希望广大读者和有关单位对本教材编审和出版中的缺点与不足给予批评指正。

前 言

本书是为导弹总体设计、导弹制导与控制等专业编写的通用教材。书中主要是研究在大气中飞行的战术导弹的空间运动规律,包括导弹弹道学和导弹动态特性分析两部分内容。

全书共分十章,第一章简要介绍导弹飞行时受到的空气动力和力矩,作为研究导弹飞行力学的预备知识。第二至五章是弹道学部分,内容包括导弹运动方程组的建立、简化及解算、方案飞行弹道、导引弹道运动学分析、初始段弹道。第六至十章是动态分析部分,内容包括导弹动态特性的研究方法、导弹弹体的纵向和侧向动态特性分析、滚转导弹弹体动态特性分析、导弹运动的自动稳定与控制。书中§2-9、§7-6及附录是专门介绍如何应用电子计算机研究弹道学和动态分析中的问题。

本书是导弹设计有关专业的通用教材。书中某些章节,根据不同专业的要求,可有所侧重。

本书由钱杏芳教授主编。林瑞雄教授编写第一、二、三章,赵亚男副教授编写第四、五章及附录,钱杏芳教授编写第六、七、八、九、十章。

本书是在1987年12月由作者编写的《导弹飞行力学》(原北京工业学院出版社出版)一书的基础上修改和补充写成的。

航天工业总公司三院三部关世义研究员审阅了全部书稿,并提出了许多宝贵的意见和建议,在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限,书中难免存在一些缺点和错误,诚恳希望读者批评指正。

编 者

主要符号表

A ——复姿态角；扰动运动参数解的系数；强迫振荡振幅；
 a_{11} 、 $\dots$ 、 a_{24} 、 $\dots$ ——纵向扰动运动的动力系数；
 B ——复攻角；扰动运动参数解的系数；
 b ——翼弦长；
 b_A ——翼平均气动力弦长；
 b_{Ag} ——翼平均几何弦长；
 b_{11} 、 $\dots$ 、 b_{24} 、 $\dots$ ——偏航扰动运动的动力系数；
 C ——声速；复方向角；扰动运动参数解的系数；常数；
 c ——翼剖面最大厚度；
 c_x 、 c_y 、 c_z ——阻力系数、升力系数、侧向力系数；
 D ——弹径；扰动运动参数解的系数；
 F_c ——操纵力；
 F_{gx} 、 F_{gy} 、 F_{gz} ——干扰力在弹道坐标系上投影的三个分量；
 G ——重力；
 g ——重力加速度；
 H ——动量矩；
 H ——飞行高度；
 J ——惯性张量；
 J_x 、 J_y 、 J_z ——导弹绕 Ox_1 、 Oy_1 、 Oz_1 轴的转动惯量；
 K ——比例导引法比例系数；导弹传递系数；复合指令系数；
 K_M 、 K_{M_x} ——导弹的传递系数；
 k_q ——速度阻滞系数；
 L ——特征长度；
 L_B ——弹身长度；
 l ——翼展长度；
 M ——力矩矢量；
 Ma ——马赫数；
 M_h ——铰链力矩；
 M_x 、 M_y 、 M_z ——滚动（倾斜）力矩、偏航力矩、俯仰力矩；
 M_{gx} 、 M_{gy} 、 M_{gz} ——干扰力矩在弹体坐标系上投影的三个分量；
 m ——导弹质量；
 m_c ——单位时间内燃料消耗量；
 m_h ——铰链力矩系数；
 m_x 、 m_y 、 m_z ——滚动力矩系数、偏航力矩系数、俯仰力矩系数；

m_x^β 、 m_y^β 、 m_z^α ——横向静稳定导数、偏航静稳定导数、俯仰静稳定导数；
 $m_{x^{\omega}}^{\omega}$ 、 $m_{y^{\omega}}^{\omega}$ 、 $m_{z^{\omega}}^{\omega}$ ——滚动阻尼力矩系数、偏航阻尼力矩系数、俯仰阻尼力矩系数；
 $m_{x^{\delta}}^{\delta}$ 、 $m_{y^{\delta}}^{\delta}$ 、 $m_{z^{\delta}}^{\delta}$ ——副翼（差动舵）操纵效率、方向舵操纵效率、升降舵操纵效率；
 $\mathbf{n}$ ——过载矢量
 n ——过载；转速；
 n_R 、 n_P 、 n_L ——需用过载、可用过载、极限过载；
 n_{x_2} 、 n_{y_2} 、 n_{z_2} ——过载矢量在弹道坐标系上投影的三个分量；
 $\mathbf{P}$ ——发动机推力矢量；
 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 ——特征方程式系数；
 p ——大气静压强；导弹与目标速度比；
 q ——迎面气流动压 $\left(q = \frac{1}{2} \rho V^2\right)$ ；目标线方位角；
 q_M ——制导站到导弹的相对距离 R_M 与基准线的夹角；
 q_T ——制导站到目标的相对距离 R_T 与基准线的夹角；
 $\mathbf{R}$ ——总气动力矢量；
 Re ——雷诺数；
 R_M ——制导站到导弹的相对距离；
 R_T ——制导站到目标的相对距离；
 r ——导弹到目标的相对距离；
 S ——弹翼面积；参考面积；
 s ——拉氏变换算子；
 S_a ——发动机喷管出口处横截面积；
 T ——周期；
 T_M 、 T_{M_x} 、 T_1 ——导弹的时间常数；
 t ——时间
 t_k ——导弹飞抵目标所需时间（命中时刻）；
 u_e ——燃气在喷管出口处的平均有效喷出速度；
 $\mathbf{V}$ ——导弹飞行速度矢量；
 $\mathbf{V}_C$ ——制导站的运动速度矢量；
 $\mathbf{V}_T$ ——目标的运动速度矢量；
 $\mathbf{W}$ ——风速矢量；
 W ——传递函数；
 X 、 X_0 、 X_i ——迎面阻力、零升阻力、诱导阻力；
 x_F ——导弹焦点离头部顶点的距离；
 x_G ——导弹质心离头部顶点的距离；
 x_R ——舵面压力中心离弹身头部顶点的距离；
 $\bar{x}_F$ ——导弹焦点位置的相对坐标；
 $\bar{x}_G$ ——导弹质心位置的相对坐标；

Y ——升力；
 Z ——侧向力。

α ——攻角；

β ——侧滑角；

β_M ——导弹方位角；

β_T ——目标方位角；

γ ——倾斜角；

γ_V ——速度倾斜角；

$\triangle$ ——主行列式；

$\triangle_V$ 、 $\triangle_\vartheta$ 、 $\triangle_\theta$ 、 $\triangle_\alpha$ ——伴随行列式；

δ ——舵偏角；

δ_x 、 δ_y 、 δ_z ——副翼偏角、方向舵偏角、升降舵偏角；

ϵ ——下洗角；

ϵ_M ——导弹高低角；

ϵ_T ——目标高低角；

η ——翼根梢（梯形）比；导弹前置角；校正系数；

η_T ——目标前置角；

ϑ ——俯仰角；

θ ——弹道倾角；

λ ——翼展弦比；特征方程根；

λ_B ——弹身长细比；

μ ——空气动力粘性系数；

ξ 、 ξ_M ——导弹的相对阻尼系数；

ρ ——空气密度；弹道曲率半径；

σ ——导弹弹道角；超调量；

σ_C ——制导站航向角；

σ_T ——目标航向角；

φ ——翼安装角；强迫振荡相位；

χ_0 、 $\chi_{\frac{1}{2}}$ 、 χ_1 ——翼前缘、中缘、后缘后掠角；

ψ ——偏航角；

ψ_V ——弹道偏角；

ψ_w ——翼上反角；

Ω ——弹道坐标系相对地面坐标系的转动角速度；

ω ——弹体坐标系相对地面坐标系的转动角速度，即导弹转动角速度；

ω ——导弹振荡角频率；

ω_c ——导弹固有角频率；

ω_{x_1} 、 ω_{y_1} 、 ω_{z_1} ——导弹分别绕 Ox_1 、 Oy_1 、 Oz_1 轴的旋转角速度。

$Axyz$ ——地面坐标系；
 $Ox_1y_1z_1$ ——弹体坐标系；
 $Ox_2y_2z_2$ ——弹道坐标系；
 $Ox_3y_3z_3$ ——速度坐标系；
 $Ox_4y_4z_4$ ——准弹体坐标系；
 $Ox_5y_5z_5$ ——准速度坐标系。

下角标

“0”——初值；未扰动运动参数；
 “B”——平衡；
 “C”——制导站；
 “cr”——临界；
 “L”——极限；
 “M”——导弹；
 “n”——法向；
 “P”——可用；
 “R”——需用；
 “T”——目标；
 “t”——尾部；尾翼；切向；
 “W”——弹翼。

上角标

“*”——滚转导弹角参数，例如 α^* 等；
 “ α ”、… “ ω_x ”、…——力和力矩及其系数对运动参数的偏导数，例如 $c_y^a = \frac{\partial c_y}{\partial \alpha}$ 等；传递函数 W 的输出量，例如 $W_{\delta_z}^a(s)$ 等。

上置符号

“—”——限制值；量纲为 1 的量。

前置符号

“ Δ ”——偏量；增量。

目 录

绪论	(1)
第一章 作用在导弹上的力和力矩	(2)
§ 1-1 作用在导弹上的总空气动力	(2)
一、速度坐标系和弹体坐标系	(2)
二、导弹的气动外形	(3)
三、空气动力的表达式	(4)
§ 1-2 升力和侧向力	(5)
一、单独弹翼升力	(5)
二、单独弹身的升力	(7)
三、尾翼的升力	(8)
四、全弹升力	(9)
五、侧向力	(10)
§ 1-3 阻力	(10)
一、零升阻力	(10)
二、诱导阻力	(11)
三、飞行马赫数对阻力系数的影响	(12)
四、飞行高度对阻力系数的影响	(12)
五、极曲线	(12)
§ 1-4 作用在导弹上的空气动力矩、压力中心和焦点	(13)
一、空气动力矩的表达式	(13)
二、压力中心和焦点	(13)
§ 1-5 俯仰力矩	(14)
一、定态直线飞行时的俯仰力矩及纵向平衡状态	(15)
二、纵向静稳定性	(16)
三、操纵力矩	(17)
四、俯仰阻尼力矩	(18)
五、非定态飞行时由下洗延迟引起的附加俯仰力矩	(19)
§ 1-6 偏航力矩	(19)
§ 1-7 滚动力矩	(20)
一、横向静稳定力矩	(20)
二、滚动操纵力矩	(22)
三、滚动阻尼力矩	(22)
§ 1-8 铰链力矩	(22)
§ 1-9 马格努斯力和力矩	(23)
一、单独弹身的马格努斯力和力矩	(24)
二、弹翼的马格努斯力矩	(24)
§ 1-10 作用在导弹上的推力	(25)
§ 1-11 作用在导弹上的重力	(26)

第二章 导弹运动方程组	(28)
§ 2-1 导弹作为变质量系的动力学基本方程	(28)
§ 2-2 常用坐标系和坐标系间的转换	(29)
一、坐标系的定义	(30)
二、各坐标系间的关系及其转换	(30)
§ 2-3 导弹运动方程组	(36)
一、动力学方程	(36)
二、运动学方程	(40)
三、质量变化方程	(42)
四、几何关系方程	(42)
五、控制关系方程	(44)
六、导弹运动方程组	(48)
§ 2-4 导弹的纵向运动和侧向运动	(49)
一、导弹的纵向运动和侧向运动	(49)
二、导弹的一般运动分解为纵向运动和侧向运动	(50)
§ 2-5 导弹的平面运动	(51)
一、导弹在铅垂平面内运动	(51)
二、导弹在水平面内运动	(52)
§ 2-6 导弹的质心运动	(53)
一、“瞬时平衡”假设	(53)
二、导弹质心运动方程组	(55)
三、导弹在铅垂平面内的质心运动方程组	(56)
四、导弹在水平面内的质心运动方程组	(56)
五、理想弹道、理论弹道、实际弹道	(57)
§ 2-7 导弹的机动性和过载	(57)
一、导弹的机动性和过载概念	(57)
二、运动与过载	(59)
三、弹道曲率半径与法向过载的关系	(61)
四、需用过载、极限过载和可用过载	(61)
§ 2-8 低速滚转导弹的运动方程组	(64)
一、滚转导弹常用坐标系和坐标系间的转换	(64)
二、滚转导弹的操纵力和操纵力矩	(68)
三、低速滚转导弹的运动方程组	(70)
§ 2-9 导弹运动方程组的数值解法	(74)
一、微分方程数值积分	(75)
二、运动方程组的数值积分举例	(77)
第三章 方案飞行弹道	(81)
§ 3-1 爬升段的方案飞行	(81)
一、铅垂平面内的导弹运动方程组	(82)
二、爬升段按给定俯仰角的方案飞行	(84)
三、下滑段按给定高度的方案飞行	(86)
§ 3-2 平飞段方案飞行	(86)
一、平飞段铅垂平面内的运动	(86)

二、平飞段水平面内的运动	(88)
第四章 导引弹道的运动学分析	(90)
§ 4-1 概述	(90)
§ 4-2 相对运动方程	(91)
一、自动瞄准制导的相对运动方程	(91)
二、遥控制导的相对运动方程	(92)
三、相对运动方程组的解	(93)
§ 4-3 追踪法	(95)
一、弹道方程	(95)
二、直接命中目标的条件	(96)
三、导弹命中目标所需的飞行时间	(96)
四、导弹的法向过载	(97)
五、允许攻击区	(98)
§ 4-4 平行接近法	(100)
一、直线弹道的条件	(101)
二、导弹的法向过载	(101)
§ 4-5 比例导引法	(102)
一、比例导引法的相对运动方程组	(103)
二、弹道特性	(104)
三、比例系数 K 的选择	(108)
四、比例导引法的优缺点	(108)
五、其他形式的比例导引规律	(109)
六、实现比例导引方法举例	(111)
§ 4-6 三点法	(113)
一、三点法导引关系方程	(114)
二、三点法导引的运动学方程组	(114)
三、运动学弹道的图解法	(117)
四、运动学弹道的解析解	(117)
五、导弹的转弯速率	(120)
六、等法向加速度曲线	(122)
七、攻击禁区	(123)
八、三点法导引的优缺点	(124)
§ 4-7 前置量法	(125)
一、前置量法	(125)
二、半前置量法 (半矫正法)	(127)
三、一种实现半前置量导引的方法	(128)
§ 4-8 最优制导规律	(130)
一、导弹运动状态方程	(131)
二、基于二次型的最优制导规律	(132)
§ 4-9 选择导引方法的基本要求	(134)
第五章 初始段弹道	(136)
§ 5-1 几种主要扰动因素的分析	(136)
一、初始扰动	(137)

二、发动机推力偏心	(138)
三、导弹质量分布不对称的影响	(140)
四、风的影响	(143)
五、制造和安装工艺误差引起的扰动	(146)
§ 5-2 初始段扰动运动方程组	(148)
§ 5-3 利用蒙特卡洛法研究弹道参数的统计特性	(149)
一、随机数的产生	(150)
二、均匀随机数的检验	(151)
三、非均匀随机数的产生	(153)
第六章 导弹动态特性的研究方法	(155)
§ 6-1 概述	(155)
§ 6-2 作为控制对象的导弹	(155)
§ 6-3 导弹扰动运动的研究方法	(158)
§ 6-4 导弹运动方程组的线性化	(160)
一、微分方程组线性化的方法	(161)
二、空气动力和力矩表达式的线性化	(162)
三、运动方程组的线性化	(165)
§ 6-5 扰动运动分解为纵向和侧向扰动运动	(169)
§ 6-6 系数“冻结”法	(171)
§ 6-7 导弹的稳定性和操纵性的概念	(172)
一、稳定性概念	(172)
二、操纵性概念	(173)
第七章 导弹弹体纵向动态特性分析	(175)
§ 7-1 纵向扰动运动方程组	(175)
一、纵向扰动运动方程组	(175)
二、动力系数的物理意义	(176)
三、动力系数的确定	(178)
四、扰动运动方程组以矩阵形式表示	(178)
§ 7-2 自由扰动运动的一般特性	(179)
一、自由扰动运动方程组	(179)
二、特征方程式及其根的特性	(180)
三、稳定性准则	(183)
四、飞行弹道的稳定性	(184)
五、振荡周期及衰减程度	(185)
六、短周期运动和长周期运动	(186)
七、特征方程根的近似计算	(186)
§ 7-3 纵向扰动运动分解为两个阶段	(191)
一、纵向扰动运动分解为两个阶段	(191)
二、纵向扰动运动分解为两个阶段的物理原因	(193)
三、短周期阶段的扰动运动方程组	(194)
§ 7-4 导弹弹体的传递函数	(196)
一、纵向扰动运动的传递函数	(196)
二、用拉氏变换求自由扰动运动	(199)

三、短周期纵向扰动运动的传递函数	(200)
§ 7-5 操纵机构阶跃偏转时纵向动态特性分析	(204)
一、稳定性分析	(204)
二、操纵机构阶跃偏转时的过渡过程	(208)
三、导弹的传递函数	(210)
四、过渡过程时间	(212)
五、最大偏差和超调量	(213)
§ 7-6 用拉氏变换法求解过渡过程	(216)
一、用拉氏变换法求解过渡过程	(216)
二、举例	(218)
三、应用计算机解扰动运动方程组	(221)
§ 7-7 导弹弹体的频率特性	(222)
§ 7-8 典型弹道及其特征点的选择原则	(228)
一、典型弹道的选择	(228)
二、特征点的选择	(229)
第八章 导弹弹体侧向动态特性分析	(231)
§ 8-1 侧向扰动运动方程组	(231)
§ 8-2 侧向自由扰动运动分析	(234)
一、特征方程式及其根的形态	(234)
二、侧向自由扰动运动的一般性质	(236)
§ 8-3 侧向稳定边界图	(238)
一、侧向运动的稳定性	(240)
二、气动外形对侧向稳定性的影响	(241)
三、飞行状态对侧向稳定性的影响	(241)
四、对侧向稳定性的要求	(242)
§ 8-4 侧向扰动运动方程组的简化	(243)
一、侧向扰动运动方程组的简化	(243)
二、轴对称型导弹接近水平飞行时侧向扰动运动简化方程组	(243)
§ 8-5 侧向传递函数	(244)
第九章 滚转导弹弹体的动态特性分析	(248)
§ 9-1 滚转导弹的扰动运动方程组	(248)
§ 9-2 滚转导弹弹体的传递函数	(253)
§ 9-3 滚转导弹弹体的动态稳定性	(255)
一、动态稳定性条件	(255)
二、动态稳定区和转速范围的确定	(258)
第十章 导弹运动的自动稳定与控制	(264)
§ 10-1 倾斜运动的自动稳定	(264)
一、倾斜稳定回路	(264)
二、倾斜运动的稳定性	(265)
§ 10-2 俯仰角的自动稳定与控制	(268)
一、常值干扰力矩的影响	(269)
二、俯仰角的自动稳定与控制	(269)

§ 10-3 对弹体动态特性的某些要求	(270)
一、阻尼	(271)
二、静稳定性和固有频率	(272)
三、操纵机构效率	(273)
四、机动性	(276)
附录一 求解运动方程组 (2-121) 的源程序	(277)
附录二 求解自由扰动运动方程组的源程序	(284)
主要参考文献	(292)

绪 论

导弹飞行力学是研究导弹运动规律的一门学科，是研究导弹飞行的理论基础。

本书的研究对象主要是在大气中飞行的战术导弹，但不局限于研究具体的型号，而是研究各类型导弹运动规律的共性。

在一般情况下，研究导弹在空间的飞行问题是很复杂的。即使在舵面固定偏转的条件下，导弹作为刚体在空间运动也有 6 个自由度，需要由 12 个一阶微分方程来描述，再加上制导系统中各元部件的工作过程，需要的微分方程数目就更多，例如研究某岸对舰导弹的运动就包含有 100 多个一阶微分方程。若把导弹作为弹性体，研究其运动特性就更为复杂。为了简化对问题的研究，通常分为几个阶段进行，从简单到复杂，逐步完善。

第一阶段是研究弹道学问题。将导弹运动看做是可控制质点的运动，在许多情况下是完全允许的。即假定制导系统工作是理想的；导弹的质量集中在质心上；在飞行的任一瞬间，作用在导弹上所有外力的合力矩为零。这样，在质点上作用着重力、发动机推力和空气动力等，通过研究作用在导弹上的力和运动之间的关系，加上制导系统理想工作的约束关系式，就可以求出质心运动轨迹——弹道、飞行速度和过载等飞行参数，而不在于制导过程如何。因此，导弹弹道学实质上是研究质点动力学问题。

第二阶段是研究导弹本身的动态特性问题。将导弹当作质点系来研究其运动情况，不仅要考虑作用在质心上的力，也要考虑绕质心的力矩，通常这里研讨的是线性化方程。并把导弹看成为制导系统的一个环节——控制对象，研究它的动态特性，即在干扰作用下，能否保持原来的飞行状态？在操纵机构作用下，导弹改变飞行状态能力如何？也就是研究稳定性与操纵性问题。因此，导弹动态分析也可称为导弹质点系动力学。

最后阶段是研究计及制导系统过程的动力学特性。该系统包括制导系统各器件，也包括控制对象——导弹本身。这阶段任务是进一步研究导弹的飞行特性，特别是飞行准确度，它是以导弹相对所需弹道的偏离量及其概率来表征的。这些偏差的产生是由于：实际上所有制导系统器件都不能理想准确地工作；导弹并不是理想地跟随操纵机构的偏转而改变其运动状态；在飞行中，导弹及其制导系统还被作用着随机干扰等。为了研究飞行准确度，必须用足够多的微分方程才能完整地描述导弹的运动和制导系统的工作过程，同时，还必须考虑各种随机干扰。因此，需要用很多高阶常微分方程组来描述。这些方程一般是非线性的，方程右端明显地与时间有关，有滞后变量和随机函数等。研究这种方程组，可以用近代科学技术提供的有关方法，特别是数学分析法、概率论与数理统计、随机过程理论、控制理论、数值分析、数学仿真，此外，还必须应用电子计算机进行导弹系统的仿真。

本书主要研究第一、二阶段中的有关问题，也就是只研究导弹本身的动力学问题——弹道学和动态特性问题。这些内容也是研究计及制导系统过程动力学特性的必备知识。

在导弹设计工作中，飞行力学的研究是导弹总体设计、制导与控制系统设计的基础。对于导弹总体设计、制导与控制等专业，飞行力学是一门重要的专业基础课。

导弹飞行力学课程与高等数学、理论力学、空气动力学、自动控制理论、制导系统原理、算法语言和计算机仿真等课程密切联系。课程中公式较多，学习中应注意物理概念、推导公式的前提条件，以及公式的适用范围和得出的结论等基本知识的理解与掌握。

第一章 作用在导弹上的力和力矩

若把导弹看成一个刚体,则它在空间的运动,可以看做是质心的移动和绕质心的转动的合成运动。质心的移动取决于作用在导弹上的力,绕质心的转动则取决于作用在导弹上相对于质心的力矩。在飞行中,作用在导弹上的力主要有:总空气动力、发动机的推力和重力等。作用在导弹上的力矩有:空气动力引起的空气动力矩,由发动机推力(若推力作用线不通过导弹质心时)引起的推力矩等。下面分别研究它们的有关特性。

§ 1-1 作用在导弹上的总空气动力

一、速度坐标系和弹体坐标系

研究空气动力时,把它们分解到以来流为基准的所谓速度坐标系(又称气流坐标系、风轴系)上;而研究空气动力矩将以弹体坐标系为基准。同时,总空气动力的大小与气流相对于弹体的方位有关,其相对方位可用速度坐标系和弹体坐标系之间构成的两个角度来确定。因此,下面先分别引进与导弹速度矢量及弹体相联系的两个坐标系。

1. 速度坐标系 $Ox_3y_3z_3$

坐标系的原点 O 取在导弹的质心上; Ox_3 轴与导弹质心的速度矢量 V 重合; Oy_3 轴位于弹体纵向对称面内与 Ox_3 轴垂直,指向上为正; Oz_3 轴垂直于 Ox_3y_3 平面,其方向按右手直角坐标系确定(如图 1-1 所示)。此坐标系与导弹速度矢量固连,是一个动坐标系。

2. 弹体坐标系 $Ox_1y_1z_1$

坐标系的原点 O 取在导弹的质心上(此处把质心当作惯性中心); Ox_1 轴与弹体纵轴重合,指向头部为正; Oy_1 轴位于弹体纵向对称面内与 Ox_1 轴垂直,指向上为正; Oz_1 轴垂直于 Ox_1y_1 平面,方向按右手直角坐标系确定(如图 1-1 所示)。弹体坐标系(又称体轴系)与弹体固连,也是动坐标系。

3. 速度坐标系与弹体坐标系之间的关系

由上述两个坐标系的定义可知,速度坐标系和弹体坐标系之间的相对方位可由两个角度确定(如图 1-1 所示),分别定义如下:

攻角(又称迎角、冲角) α : 导弹质心的速度矢量 V (即 Ox_3 轴)在弹体纵向对称面 Ox_1y_1 上的投影与 Ox_1 轴之间的夹角。若 Ox_1 轴位于 V 的投影线的上方(即产生正升力)时,攻角 α 为正;反之为负。

侧滑角 β : 速度矢量 V 与纵向对称面之间的夹角。沿飞行方向观察,若来流从右侧流向弹体(即产生负侧向力),则所对应的侧滑角 β 为正;反之为负。

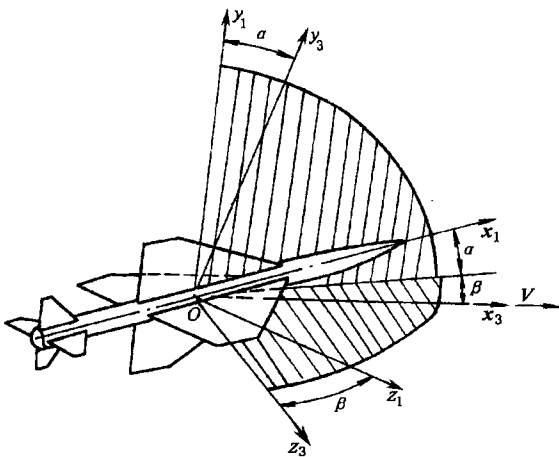


图 1-1 速度坐标系与弹体坐标系

二、导弹的气动外形

作用在导弹上的空气动力和空气动力矩在其他条件相同的情况下，取决于导弹的气动外形。

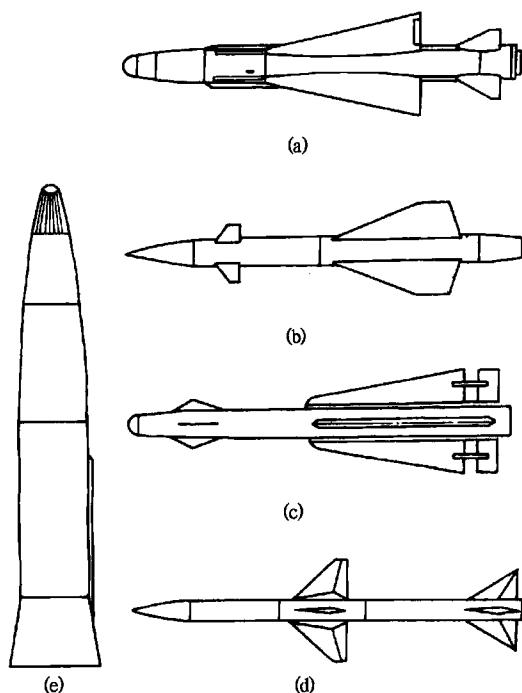


图 1-2 导弹不同气动外形

外，还可把导弹气动外形分成气动轴对称型和面对称型两种，后者的外形与飞机相类似（见图 1-3），有时又称为飞机型导弹或飞航式导弹。对于气动轴对称型导弹，前翼（弹翼或舵面）和后翼（舵面或弹翼）相对于弹体的安置（按前视图看）又有若干不同的组合，常见的有：“ $\times-\times$ ”型、“ $+-+$ ”型、“ $\times-+$ ”型及“ $+-\times$ ”型等。

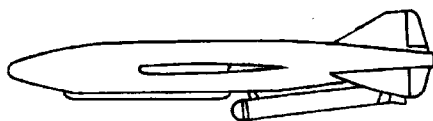


图 1-3 飞机型导弹气动外形

有翼式导弹，全弹的升力基本上是由弹翼提供的，弹翼在形成导弹的气动力特性中起着特别重要的作用。常见的弹翼翼型（通常是指平行于弹体纵向对称平面的翼剖面形状，有时也用以指与弹翼前缘相垂直的翼剖面）有：亚音速翼型、菱形、六角形、双弧形、双楔形等等（如图 1-4 所示）。弹翼平面形状常见的有：矩形、梯形、三角形、后掠形等等（如图 1-5 所示）。

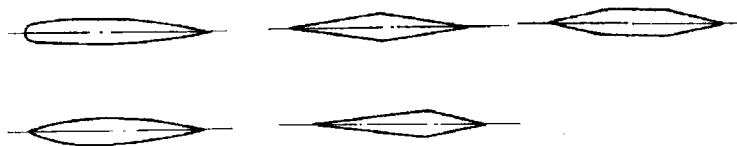


图 1-4 翼型示意图

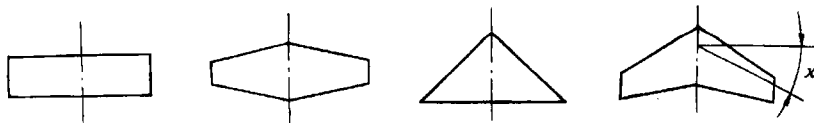


图 1-5 常见的弹翼平面形状

弹翼的主要几何参数有：

翼展 l ——左、右翼端之间垂直于弹体纵向对称面的距离；

翼面积 S ——弹翼平面的投影面积，常作为特征面积；

平均几何弦长 b_{Ag} ——翼面积 S 对翼展长 l 之比值，即 $b_{Ag} = S/l$ ；

平均气动弦长 b_A ——与实际弹翼面积相等且力矩特性相等的当量矩形翼的弦长，常作为特征长度；

展弦比 λ ——翼展与平均几何弦长之比值，即 $\lambda = l/b_{Ag} = l^2/s$ ；

根梢比 η ——翼根弦长与翼端弦长之比，又称梯形比、斜削比；

后掠角 χ ——翼弦线与纵轴垂线间的夹角，在超音速弹翼常用前缘后掠角 χ_0 、后缘后掠角 χ_1 及中线后掠角 $\chi_{0.5}$ （即翼弦中点连线与纵轴垂线之间的夹角）的概念（如图 1-6 所示）；

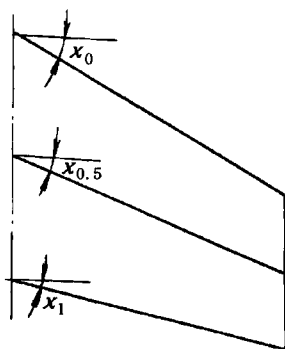


图 1-6 不同翼弦线的后掠角

最大厚度 c ——翼剖面最大厚度处的厚度，不同剖面处的最大厚度是不相同的，通常取平均几何弦长处剖面的最大厚度；

相对厚度 $\bar{c}$ ——翼剖面最大厚度对弦长之比，即 $\bar{c} = \frac{c}{b} \times 100\%$ 。

导弹弹身通常是轴对称的（即旋转体），可分为头部、中段和尾部三部分。头部常见的形状有：锥形（母线为直线）、抛物线形和圆弧形（如图 1-7 所示）。尾部常见的母线形状有直线和抛物线两种（如图 1-8 所示）。

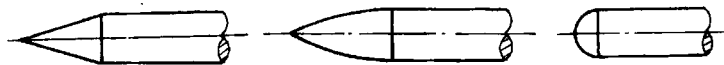


图 1-7 导弹的头部形状

弹身的主要几何参数有：

弹径 D ——弹身最大横截面所对应的直径；

S_B ——弹身最大横截面面积， $S_B = \frac{\pi}{4} D^2$ ，也常作为特

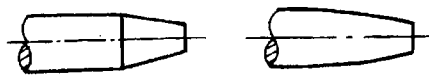


图 1-8 导弹的尾部形状

征面积；

弹长 L_B ——导弹头部顶点至弹身底部面积之间的距离，也常作为特征长度；

弹身长细比 λ_B ——弹身长度对弹径之比值，即 $\lambda_B = L_B/D$ ，又称长径比。

尾翼（或舵面）就整体说，好似缩小了的弹翼，它的翼剖面形状和翼平面形状与弹翼相似。

三、空气动力的表达式

把总空气动力沿速度坐标系分解为三个分量，分别称之为阻力 X 、升力 Y 和侧向力（简

称侧力) Z 。习惯上,把阻力 X 的正向定义为 Ox_3 轴 (即 V) 的负向,而升力 Y 和侧向力 Z 的正向则分别与 Oy_3 轴、 Oz_3 轴的正向一致。

实验分析表明:作用在导弹上的空气动力与来流的动压 $q(q = \frac{1}{2}\rho V^2)$,其中 ρ 为导弹所处高度的空气密度)以及导弹的特征面积 S 成正比,可表示为

$$\left. \begin{aligned} X &= c_x q S \\ Y &= c_y q S \\ Z &= c_z q S \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

式中 c_x 、 c_y 、 c_z 为无量纲的比例系数,分别称为阻力系数、升力系数和侧向力系数。 S 为特征面积,对有翼式导弹来说,常用弹翼的面积作为特征面积;对无翼式导弹,则常用弹身的最大横截面积作为特征面积。

在导弹气动外形及其几何参数、飞行速度和高度给定的情况下,研究导弹在飞行中所受的空气动力,可简化为研究这些空气动力系数。

§ 1-2 升力和侧向力

全弹的升力可以看成是弹翼、弹身、尾翼 (或舵面) 等各部件产生的升力之和加上各部件间的相互干扰的附加升力。而在各部件中,弹翼是提供升力的最主要部件。

一、单独弹翼升力

由空气动力学得知,二元 (维) 机翼的升力,若略去空气的粘性和压缩性的影响,按照儒可夫斯基公式可得

$$c_{yw0} = 2\pi(\alpha - \alpha_0) \quad (1-2)$$

式中 α_0 ——零升攻角 (即升力为零时的攻角),对于轴对称的导弹 $\alpha_0 = 0$ 。

由上式看出, c_{yw0} 与 α 的关系是线性关系, c_{yw0} 随 α 增大而单调增加,其斜率 c_{yw0}' (即升力系数对攻角的导数) 为 2π (如图 1-9 中 a 所示)。

但是,气流流过实际弹翼时都是三元流动,当正攻角飞行时,下翼面的高压气流在翼端处会“卷”到上翼面上去,减小上下翼面的压力差,从而使升力比二元流动的情况要小些。这种现象称为翼端效应。此外,由于粘性的影响,在攻角增大时,气流会从翼面分离。因此, c_{yw0} 对 α 的线性关系只能保持在不大的攻角范围内。攻角超过线性关系范围,随着攻角的增加,升力线斜率通常下降。当攻角增至一定值时,升力系数将达到极值点 $(c_{yw0})_{\max}$, 其对应的攻角 α_{cr} 称为临界攻角。过了临界攻角以后,由于上翼面的气流分离迅速加剧,随着攻角的增大,升力系数不但没增加,反而急剧下降。这种现象称为“失速” (如图 1-9 中 b 、 c 所示)。

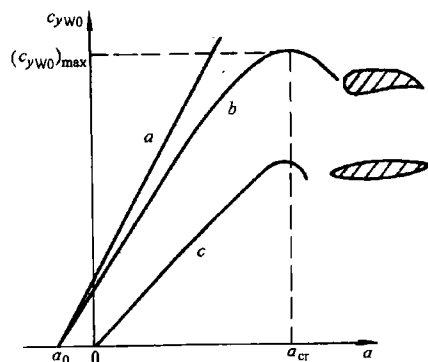


图 1-9 升力曲线示意图

各种不同的弹翼,由于翼型、翼平面形状的不同,升力曲线是不一样的,但是,大体上都有如图 1-9 中 c 那样的曲线。另外,飞行马赫数 Ma ($Ma = V/C$, C 为声速,马赫数表征

高速流动中, 气体微团的惯性力与压力之比) 和雷诺数 Re ($Re = \rho VL / \mu$, μ 为空气动力粘性系数, 雷诺数表征惯性力与粘性力之比, 它是区别流动是呈层流或紊流状态的一个重要指标) 等都对升力曲线形状有影响。

下面简要地分析弹翼几何形状和马赫数 Ma 对弹翼升力曲线的影响。

1. 弹翼几何形状的影响

低速飞行常用有弯度的翼型, 高速飞行则因阻力的矛盾显得突出而用对称的、相对厚度较小的翼型。低速翼型 (如图 1-9 中 b 所示) 比高速翼型 (如图 1-9 中 c 所示) 具有更大的最大升力系数 $(c_{yw0})_{\max}$ 和较大的升力线斜率 c_{yw0}^a 。

展弦比 λ 对 c_{yw0}^a 的影响如图 1-10 所示。当增大 λ 时, c_{yw0}^a 随之增大。展弦比趋于无穷大的极限情况, 就是二元弹翼。

减小相对厚度 $\bar{c}$ 和增大后掠角 χ 都可提高临界马赫数 Ma_{cr} (流动中局部速度达到声速的来流马赫数称为临界马赫数), 这对于改善导弹在跨音速区域的气动性能有很大意义。图 1-11 表示出相对厚度 $\bar{c}$ 和后掠角 χ 对临界马赫数 Ma_{cr} 的影响。当相对厚度 $\bar{c}$ 降低时, 临界马赫数 Ma_{cr} 上升。在具有相同 $\bar{c}$ 时, 后掠翼比平直矩形翼的 Ma_{cr} 要大; 且当 $\bar{c}$ 较大时, 后掠角 χ 对 Ma_{cr} 的影响更为显著些。所以, 导弹上广泛采用薄翼、有大后掠角的弹翼和三角形弹翼。

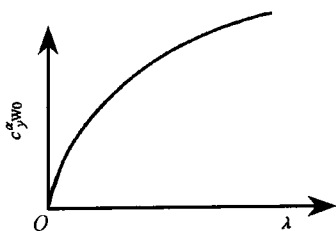


图 1-10 展弦比对升力线斜率的影响

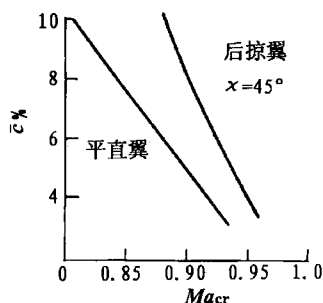


图 1-11 相对厚度和后掠角对临界马赫数的影响

2. 飞行马赫数 Ma 的影响

在空气压缩性的影响下, 在亚音速区域, 翼型的 c_{yw0}^a 是随 Ma 的增大而增大的, 且有

$$c_{yw0}^a = \frac{2\pi}{\sqrt{1-Ma^2}} \eta \quad (1-3)$$

式中 η ——校正系数, 它与 $\bar{c}$ 有关, $\eta < 1$ 。

在超音速区域, 翼型的 c_{yw0}^a 则随 Ma 的增大而减小, 对于薄翼, 有

$$c_{yw0}^a = \frac{4}{\sqrt{Ma^2 - 1}} \quad (1-4)$$

在跨音速区域, 翼面上既有超音速流动, 又有亚音速流动。由于激波 (由导弹上强扰动源激起的扰动波不断密集, 导致流场的气流参数的突变, 由这突变形成的界面就是激波。气流通过激波, 波后 Ma 降低, 压力变大) 和气流分离的迅猛发展, 翼面压力分布变化激烈, 升力大幅度下降, 阻力急剧增加, 气动力矩特性变坏, 导致导弹气动性能变坏。

图 1-12 表示升力系数 c_{yw0} 随 Ma 的变化曲线。从图中可以看到, 在 Ma_{cr} 以后 c_{yw0} 猛跌的现象。图 1-13 给出超音速飞行情况不同后掠角的弹翼, Ma 对 c_{yw0}^a 的影响曲线。由图可见, Ma 对 c_{yw0}^a 的影响平直矩形翼要比后掠翼大, 增大弹翼的后掠角, 可以减缓 c_{yw0} 值随 Ma 增大而下降的趋势。

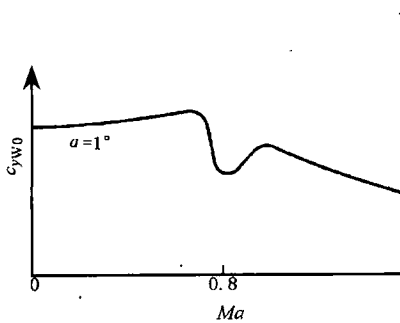


图 1-12 Ma 对 c_{yw0} 的影响

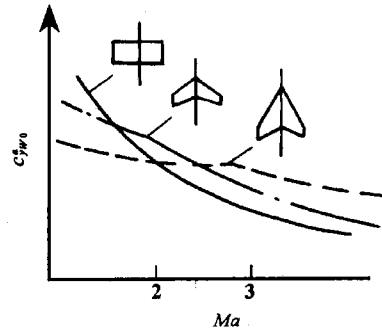


图 1-13 Ma 对 c_{yw0}^a 的影响

二、单独弹身的升力

导弹的弹身通常是轴对称的。图 1-14 表示了具有圆锥形头部和锥台形尾部的弹身产生升力的原理。在攻角不为零的情况下, 流经弹身的气流可分解为互相垂直的两个分量: 一为平行于弹身轴线的分量, 即 $V \cos \alpha$; 另一分量为 $V \sin \alpha$ 。对于圆柱形的中段而言, 由于沿柱体母线的流动是对称的, 如不考虑粘性的影响, 这段的升力将为零。正攻角飞行时, 考察绕锥形头部的流动, 就其沿头部表面流动的速度而言, 头部下表面的速度为两分速相减, 上表面则相加, 可见, 上表面的速度大于下表面, 因而下表面的压力大于上表面, 由此产生头部正升力。对于具有收缩段的尾部而言, 情况与头部相反, 尾部产生的升力是负的。

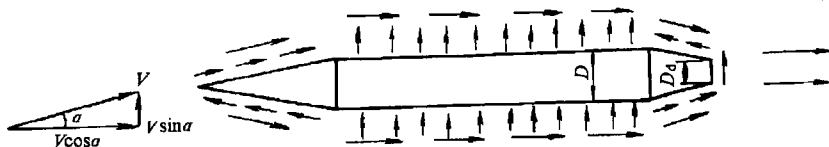


图 1-14 弹身产生升力的原理图

按照细长体理论, 锥形头部在垂直于弹身纵轴方向的法向力系数 c_{y1n} 可用公式

$$c_{y1n} = \sin 2\alpha \approx 2\alpha \quad (1-5)$$

对攻角求导数有

$$c_{y1n}^a = \frac{2}{57.3} = 0.035 \quad 1/(\circ) \quad (1-6)$$

实际上, 由于头部上下表面的压力差对圆柱段有影响, 靠近头部的圆柱段也将产生一小部分与攻角成正比的法向力。通常把这一部分力归并在头部法向力中。于是, 头部的法向力系数斜率 c_{y1n}^a 比由式 (1-6) 算得的理论值要大些。风洞实验结果表明, c_{y1n}^a 值取决于头部的长细比 λ_n 、圆柱段的长细比 λ_c 以及 Ma , 同时, 还与旋成体头部的母线形状有关。对于锥形头部,

$c_{y_{1n}}^a$ 可查图 1-15。

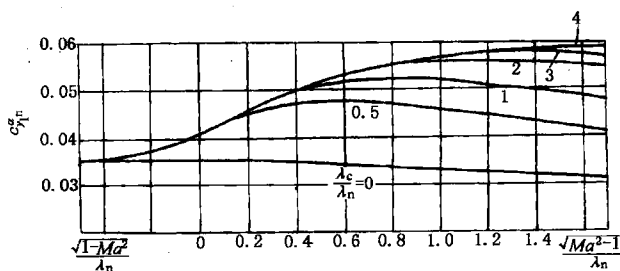


图 1-15 计算锥形头部 $c_{y_{1n}}^a$ 的图线

收缩段尾部的法向力系数 $c_{y_{1t}}$ ，由细长体理论有

$$c_{y_{1t}} = - \left[1 - \left(\frac{D_d}{D} \right)^2 \right] \sin 2\alpha \quad (1-7)$$

式中 D_d ——弹身底部直径；

D ——弹身直径。

然而，由于尾部附面层厚度的增厚和气流分离等因素，使得尾部的法向力系数的绝对值要比理论值小得多。因此，在计算尾部法向力系数时，常引进一个修正系数 ξ ，其值约为 0.15 ~ 0.20，于是

$$c_{y_{1t}} = - \xi \left[1 - \left(\frac{D_d}{D} \right)^2 \right] \sin 2\alpha \quad (1-8)$$

对攻角求导数，有

$$c_{y_{1t}}^a \approx - 0.035 \xi \left[1 - \left(\frac{D_d}{D} \right)^2 \right] (1/(\circ)) \quad (1-9)$$

在小攻角情况下，弹身中段考虑气流粘性的影响而产生的升力可以略去不计，单独弹身的升力可以看做是由头部升力和尾部升力合成的，即

$$c_{yB} = (c_{y_{1n}} + c_{y_{1t}}) \cos \alpha \quad (1-10)$$

在攻角小于 $8^\circ \sim 10^\circ$ 范围内，弹身升力系数与攻角成线性关系。并且，可用法向力系数来取代升力系数，因此有

$$c_{yB} = c_{yB}^a \cdot \alpha \approx (c_{y_{1n}}^a + c_{y_{1t}}^a) \alpha \quad (1-11)$$

三、尾翼的升力

尾翼产生升力的机理与弹翼是相同的。但是流经弹翼和弹身到达尾翼区的气流，由于气流的粘性以及弹翼和弹身给予的反作用力，使得流速的大小和方向发生变化。于是，尾翼处的流动情况就和弹翼处的不一样，从而影响了尾翼的空气动力特性。这种现象就是弹翼和弹身对尾翼空气动力的干扰。

流经弹翼和弹身的气流，给弹翼和弹身以阻力，沿气流方向，弹翼和弹身给气流的反作用力使气流速度降低，引起尾翼处动压损失，用速度阻滞系数 k_q 来表征， k_q 定义为

$$k_q = \frac{q_t}{q} \quad (1-12)$$

式中 q_t ——尾翼处平均动压；

q ——来流的动压。

速度阻滞系数 k_q 值取决于导弹的外形、飞行马赫数 Ma 、雷诺数 Re 以及攻角等因素，一般可取 $0.85 \sim 1.0$ 。若略去来流与尾翼处气流密度的微小差异，于是

$$V_t = \sqrt{k_q} V \quad (1-13)$$

流经弹翼和弹身的气流，给弹翼和弹身以升力，沿垂直来流方向，弹翼和弹身给气流的反作用力则使气流下抛，导致气流速度方向发生偏斜，这种现象称为下洗。由于下洗，尾翼处的实际攻角将小于弹翼的攻角（如图 1-16 所示）。

我们用下洗角 ϵ 来表示下洗的程度。以来流的方向为基准，下洗角 ϵ 表征了实际有效气流对来流偏过的角度。在攻角不大时，下洗角与攻角的关系可以线性表示为

$$\epsilon = \epsilon'' \cdot \alpha \quad (1-14)$$

其中 ϵ'' 为单位攻角的下洗率。它与弹翼的升力线斜率 c_{y_w}'' 成正比，与弹翼的展弦比 λ 成反比，还与飞行马赫数 Ma 、弹翼与弹身布局情况、尾翼的布局情况、弹翼与尾翼间的距离等等因素有关。下洗的影响，最终将反映在尾翼升力系数的数值上。

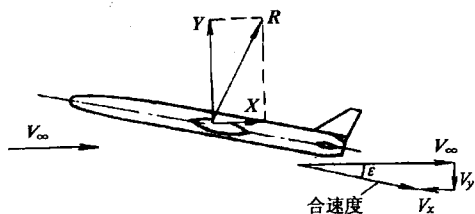


图 1-16 尾翼处气流的下洗

四、全弹升力

当把弹翼、弹身、尾翼（或舵面）等部件组合到一起作为一个完整的导弹来研究它的空气动力时，可以发现，全弹总的空气动力并不等于各单独部件的空气动力的总和，这个现象的物理本质在于部件组合在一起的绕流情况发生了变化。例如，安装在弹身上的弹翼，由于弹身的影响，绕该弹翼的流动就不同于绕单独弹翼的流动。于是弹翼上的压强分布、空气动力及空气动力矩都将发生变化。这种现象称为空气动力干扰，组合到一起的各部件之间的空气动力干扰主要是弹翼与弹身间的相互干扰，以及弹翼和弹身对尾翼的干扰。

弹翼对全弹升力的贡献除了单独弹翼提供的 Y_{w0} 以外，还有翼身干扰引起的干扰升力，它包括两部分，一部分是弹身对弹翼的干扰，这部分干扰升力以 $\Delta Y_{w(B)}$ 表示；另一部分则是弹翼对弹身的干扰，其干扰升力以 $\Delta Y_{B(w)}$ 表示。如以 Y_w 表示弹翼对全弹升力的贡献，则有

$$Y_w = Y_{w0} + \Delta Y_{w(B)} + \Delta Y_{B(w)} \quad (1-15)$$

因此，就升力来说，翼身之间的干扰是有利的。

对于正常式布局、水平平置翼（或“+”型翼）的导弹来说，全弹的升力可以表示为

$$Y = Y_w + Y_B + Y_t \quad (1-16)$$

式中 Y_B ——单独弹身的升力；

Y_t ——尾翼的升力。

工程上通常用升力系数来表述全弹的升力。在写成升力系数表达式时，各部件提供的升力系数都要折算到同一参考面积上，然后各部件的升力系数才能相加。如以正常式布局导弹为例，以弹翼的面积为参考面积，则有

$$c_y = c_{y_w} + c_{y_B} \frac{S_B}{S} + c_{y_t} k_q \frac{S_t}{S} \quad (1-17)$$

上式右端的三项, 分别表示了弹翼、弹身和尾翼对升力的贡献, 其中 S_B/S 和 S_t/S 反映了弹身最大横截面积和尾翼面积对于参考面积 (弹翼面积) 的折算; k_q 为尾翼处的速度阻滞系数, 反映了对尾翼处动压的修正。

当攻角 α 和升降舵偏角 δ_z 比较小时, 全弹的升力系数还可表示为

$$c_y = c_{y0} + c_y^a \alpha + c_y^{\delta_z} \delta_z \quad (1-18)$$

式中 c_{y0} ——攻角和升降舵偏角均为零时的升力系数, 它是导弹外形相对于 Ox_1z_1 平面不对称引起的。

对于轴对称导弹, $c_{y0}=0$ 。于是有

$$c_y = c_y^a \alpha + c_y^{\delta_z} \delta_z \quad (1-19)$$

五、侧向力

空气动力的侧向力是由于气流不对称地流过导弹纵向对称面的两侧而引起的, 这种飞行情况称为侧滑。图 1-17 表示了导弹的俯视图, 图上表明了侧滑角 β 所对应的侧向力。按右手直角坐标系的规定, 侧向力指向右翼为正。按侧滑角 β 的定义, 图中侧滑角 β 为正, 引起负的侧向力 z 。

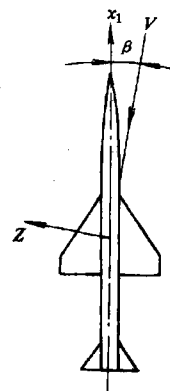


图 1-17 侧滑角与侧向力

对于轴对称导弹, 若把弹体绕纵轴转过 90° , 这时的 β 角就相当于原来 α 角的情况。所以, 轴对称导弹的侧向力系数的求法类同于升力系数的求法。因此, 有等式:

$$c_z^{\beta} = -c_y^a \quad (1-20)$$

式中的负号是由 α 、 β 的定义所致。对侧向力的研究这里就不再重复。

§ 1-3 阻 力

计算全弹阻力与计算全弹升力的方法相类似, 可以先求出弹翼、弹身和尾翼等各部件的阻力之和, 然后加以适当的修正。考虑到各部件阻力计算上的误差, 以及弹体上零星突起物的影响, 往往把各部件阻力之和乘以 1.1, 作为全弹的阻力值。

下面仅以弹翼为例, 研究弹翼阻力的计算。

阻力受空气的粘性影响最为显著, 用理论方法计算阻力, 必须考虑空气粘性的影响。总的阻力通常分成两部分进行研究, 一部分是与升力无关, 称为零升阻力, 其阻力系数以 c_{x0W} 表示; 另一部分取决于升力的大小, 称为诱导阻力或升致阻力, 其阻力系数以 c_{xiW} 表示, 即

$$c_{xW} = c_{x0W} + c_{xiW} \quad (1-21)$$

一、零升阻力

零升阻力又可分成摩擦阻力和压差阻力两部分。在低速流动中, 它们都是由于空气的粘性引起的, 与 Re 数的大小和附面层流态有关。当攻角不大时, 摩擦阻力比重较大, 随着攻角的增大, 附面层开始分离, 且逐渐加剧, 压差阻力在零升阻力中也就成为主要的部分。在超音速流动中, 零升阻力的一部分是由于粘性引起的摩擦阻力和压差阻力, 其中摩擦阻力是主要的; 零升阻力的另一部分是由介质的可压缩性引起的, 介质在超音速流动时形成压缩波和膨胀波, 导致波阻的产生, 把这部分波阻称为零升波阻或厚度波阻。超音速流动中, 零升波阻在零升阻力中是主要的, 虽然摩擦阻力在 Ma 数增大时, 也有所增大, 但比起零升波阻来说

仍然是一小部分。

零升波阻 c_{xw0} 与相对厚度 $\bar{c}$ 有关, 按线性化理论有

$$c_{xw0} = \frac{4(\bar{c})^2}{\sqrt{Ma^2 - 1}} \quad (1-22)$$

如图 1-18 所示, 采用薄翼, 可显著降低零升波阻。在相对厚度 $\bar{c}$ 相同的情况下, 对称的菱形翼剖面具有最小的零升波阻系数。

有翼式导弹, 超音速时的零升阻力系数与 Ma 数的关系曲线如图 1-19 所示。由图可见, c_{x0W} 有两处达极值, 第一个极值点通常发生在来流马赫数为 1 左右时, 这也正是激波失速的结果; 另一个极值点是当 Ma 数在弹翼前缘法向上的分量已超过 1。弹翼的主要部分发生和发展了的激波失速现象时才出现极值点。这第二个极值点所对应的临界马赫数值, 随弹翼前缘后掠角 χ 而变化, χ 角增大, 第二个极值点后移。

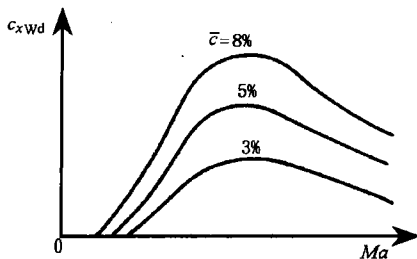


图 1-18 相对厚度 $\bar{c}$ 与零升波阻的关系

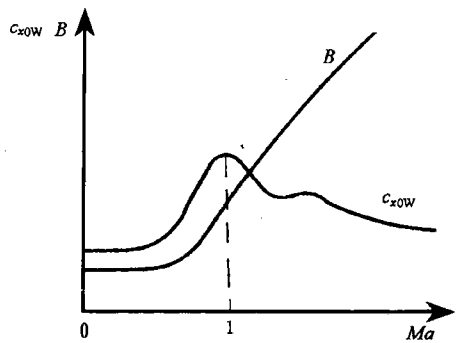


图 1-19 超音速时的零升阻力系数与 Ma 数关系示意图

二、诱导阻力

弹翼的诱导阻力系数 c_{xiW} 与升力系数 c_{yw0} 的关系, 在亚音速流动中, 可以用抛物线公式表示

$$c_{xiW} = \frac{1 + \delta}{\pi\lambda} c_{yw0}^2 \quad (1-23)$$

式中 λ ——弹翼展弦比;

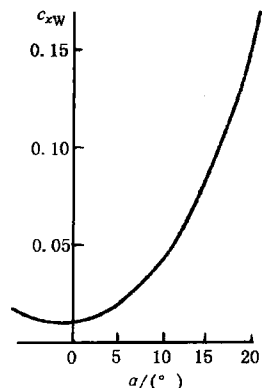
δ ——对弹翼平面形状的修正值。对椭圆形弹翼, δ 的理论值为零; 对梯形弹翼及翼端修圆的矩形弹翼等的 δ 值也近似为零。

由式 (1-23) 可见, 在小攻角时, 诱导阻力不大, 随着攻角的增大, 其值迅速上升, 在总阻力中的比重也随之增加, 逐渐成为主要部分。由于诱导阻力系数近似地正比于 c_{yw0}^2 , 所以 c_{xiW} 与 α 的关系曲线也很接近于一条抛物线 (如图 1-20 所示)。

超音速流动中, 根据线化理论

$$c_{xiW} = B c_{yw0}^2$$

式中 B 应当看做是 Ma 数的函数 (如图 1-19 所示)。



(1-24) 图 1-20 阻力系数与攻角的关系曲线

诱导阻力是与升力有关的那部分阻力 $Bc_y^2 w_0$ ，有时又称为升力波阻。

三、飞行马赫数对阻力系数的影响

通常，在来流 $Ma < 0.3$ 时，把空气看做是不可压缩的介质。在 $Ma > 0.3$ 以后，压缩性的影响就逐渐显著起来，阻力系数也随 Ma 数的增大而增大。由线化理论得出，考虑到空气压缩性的阻力系数值要比不考虑压缩性的阻力系数值放大 $1/\sqrt{1-Ma^2}$ 倍。这个结论由大量实验证实是很接近实际情况的。跨音速区域，由于激波失速使阻力系数猛增，在 Ma 数为 1 左右时， c_x 值达到极值。在整个超音速区域， c_x 变化逐渐趋于平缓（如图 1-21 所示）。

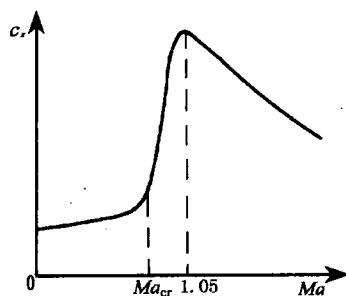


图 1-21 Ma 数对阻力系数的影响

四、飞行高度对阻力系数的影响

随着高度的上升，由于空气密度剧烈下降，导致 Re 也剧烈降低，于是使得摩擦阻力系数 c_{xf} 随之增大。在 c_y 定值的情况下，使得 c_x 随着飞行高度的上升而增大（如图 1-22 所示）。当 $Ma=1.5$ 、 $c_y=0.1$ 时， c_x 值从高度 $H=0$ 到 $H=20$ km 增加了近乎 40%；当 $Ma=10$ 、 $c_y=0.05$ 时， c_x 值从 $H=20$ km 到 $H=60$ km 增加了 50%。值得指出的是，阻力系数 c_x 值随 H 增加，并不意味着阻力也增加，本图例中，阻力是随高度上升而减小的。但是，随着高度的上升，导弹的气动特性（如升阻比）要下降。

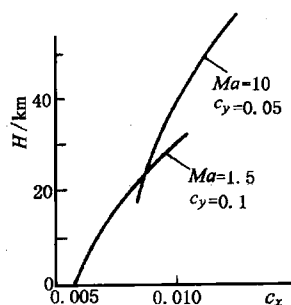


图 1-22 高度对阻力系数的影响

五、极曲线

前面分别讨论了影响升力、阻力的诸因素。为了计算导弹飞行性能的需要，通常用理论计算和实验的方法把升力系数和阻力系数的关系画成一条曲线，这曲线称为极曲线。图 1-23 给出在一定飞行高度和飞行马赫数情况下极曲线的示意图，在极曲线的相应点上，飞行攻角值自下向上是逐渐增加的。极曲线过原点的切线斜率（图示 φ 角的正切），即为对应飞行状态下的最大升阻比。由于一条极曲线对应于一定的飞行高度和飞行马赫数，因此，对于某一外形确定的导弹而言，应针对它的不同飞行情况画出一系列的极曲线。

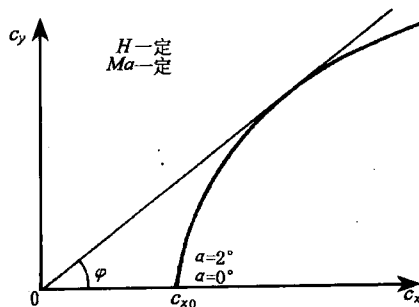


图 1-23 极曲线示意图

§ 1-4 作用在导弹上的空气动力矩、压力中心和焦点

一、空气动力矩的表达式

为了便于分析研究导弹绕质心的旋转运动,可以把空气动力矩沿弹体坐标系分成三个分量 M_{x_1} 、 M_{y_1} 、 M_{z_1} (为书写简便,以后书写省略脚注“1”),分别称为滚动力矩(又称倾斜力矩)、偏航力矩和俯仰力矩(又称纵向力矩)。滚动力矩 M_x 的作用是使导弹绕纵轴 Ox_1 作转动运动。副翼偏转角 δ_x 为正(即右副翼后缘往下、左副翼的后缘往上,如图 1-24 所示)时,将引起负的滚动力矩。偏航力矩 M_y 的作用是使导弹绕立轴 Oy_1 作旋转运动。对于正常式导弹、方向舵偏转角 δ_y 为正(即方向舵的后缘往右偏,如图 1-24 所示)时,将引起负的偏航力矩。俯仰力矩 M_z 将使导弹绕横轴 Oz_1 作旋转运动。对于正常式导弹,升降舵的偏转角 δ_z 为正(即升降舵的后缘往下,如图 1-24 所示)时,将引起负的俯仰力矩。

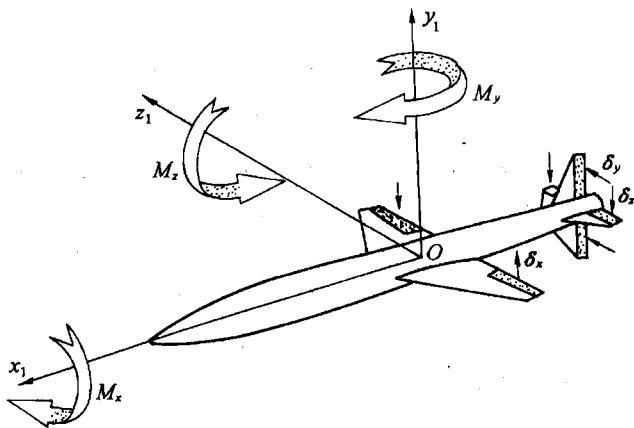


图 1-24 舵(副翼)偏转所产生的空气动力矩

研究空气动力矩与研究空气动力一样,可用对气动力矩系数的研究来取代对气动力矩的研究。空气动力矩的表达式为

$$\left. \begin{aligned} M_x &= m_x q S L \\ M_y &= m_y q S L \\ M_z &= m_z q S L \end{aligned} \right\} \quad (1-25)$$

式中 m_x 、 m_y 、 m_z ——无量纲比例系数,分别称为滚动力矩系数、偏航力矩系数和俯仰力矩系数;

S ——特征面积。对有翼式导弹(特别是飞航式导弹),常以弹翼面积 S 来表示;对弹道式导弹,常以弹身最大横截面积 S_B 来表示;

L ——特征长度。对有翼式导弹,计算俯仰力矩时,特征长度常以弹翼的平均气动力弦长 b_A 来表示;计算偏航力矩和滚动力矩时,特征长度常以弹翼的翼展 l 来表示。

对弹道式导弹,计算空气动力矩时,特征长度均以弹身长度 L_B 来表示。

值得指出的是,当涉及气动力、气动力矩的具体数值时,必须弄清它们所对应的特征面积和特征长度。

力的三要素中,除了力的大小和方向外,另一个要素就是力的作用点,在确定相对于质心的空气动力矩时,必须先求出空气动力的作用点。

二、压力中心和焦点

如前所述,作用在轴对称导弹上的升力可近似表示为

$$Y = Y^\alpha \alpha + Y^{\delta_z} \delta_z$$

总的气动力的作用线与导弹纵轴的交点称为全弹的压力中心。在攻角不大的情况下, 常近似地把总升力在纵轴上的作用点作为全弹的压力中心。

由攻角 α 所引起的那部分升力 Y^α 在纵轴上的作用点, 称为导弹的焦点。舵偏转所引起的那部分升力 $Y^\delta \delta_z$ 就作用在舵面的压力中心上。

从导弹头部顶点至压力中心的距离, 即为导弹压力中心的位置, 用 x_p 来表示。如果知道导弹上各部件所产生的升力值及作用点位置, 则全弹的压力中心位置可用下式求出

$$x_p = \frac{\sum_{k=1}^n Y_k x_{pk}}{Y} = \frac{\sum_{k=1}^n c_{y,k} x_{pk} \frac{S_k}{S}}{c_y} \quad (1-26)$$

对于有翼式导弹, 弹翼所产生的升力是全弹升力的主要部分。因此, 这类导弹的压力中心位置在很大程度上取决于弹翼相对于弹身的前后位置。

显然, 弹翼安装位置离头部顶点越远, x_p 值也就越大。此外, 压力中心的位置还取决于飞行 Ma 数、攻角 α 、舵偏转角 δ_z 、弹翼安装角及安定面安装角等等。这是因为 Ma 、 α 、 δ_z 、安装角等改变时, 改变了弹上的压力分布的缘故。压力中心位置 x_p 与飞行马赫数 Ma 和攻角 α 的关系如图 1-25 所示。由图看出: 当飞行 Ma 数接近于 1 时, 压力中心的位置变化较剧烈。

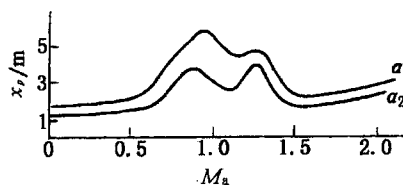


图 1-25 压力中心位置随 Ma 数、 α 的变化

焦点一般并不与压力中心相重合, 仅在导弹是轴对称 (即 $c_{y0}=0$) 且 $\delta_z=0$ 时, 焦点才与压力中心相重合。

用 x_F 表示从导弹头部顶点量起的焦点坐标值, 焦点的位置可以表示成

$$x_F = \frac{\sum_{k=1}^n Y_k^\alpha x_{Fk}}{Y^\alpha} = \frac{\sum_{k=1}^n c_{y,k}^\alpha x_{Fk} \frac{S_k}{S}}{c_y^\alpha} \quad (1-27)$$

式中 Y_k^α ——导弹某一部件所产生的升力 (并包括其他部件对它的影响) 对攻角的导数;

x_{Fk} ——某一部件由攻角所引起的那部分升力的作用点坐标值。

§ 1-5 俯仰力矩

在导弹的气动布局和外形几何参数给定的情况下, 俯仰力矩的大小不仅与飞行 Ma 数、飞行高度 H 有关, 还与攻角 α 、操纵面偏转角 δ_z 、导弹绕 Oz_1 轴的旋转角速度 ω_z 、攻角的变化率 $\dot{\alpha}$ 以及操纵面偏转角的变化率 $\dot{\delta}_z$ 等有关。因此, 俯仰力矩可表示成如下的函数形式

$$M_z = f(Ma, H, \alpha, \delta_z, \omega_z, \dot{\alpha}, \dot{\delta}_z)$$

严格地说, 俯仰力矩还取决于某些其他参数, 例如侧滑角 β 、副翼偏转角 δ_x 、导弹绕纵轴的旋转角速度 ω_x 等。通常这些数值的影响不大, 一般予以忽略。

当 α 、 δ_z 、 ω_z 、 $\dot{\alpha}$ 、 $\dot{\delta}_z$ 较小时, 俯仰力矩与这些量的关系是近似线性的, 其一般表达式为

$$M_z = M_{z0} + M_z^\alpha \alpha + M_z^{\delta_z} \delta_z + M_z^{\omega_z} \omega_z + M_z^{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + M_z^{\dot{\delta}_z} \dot{\delta}_z \quad (1-28)$$

为了研究方便, 用无量纲力矩系数代替上式, 即

$$m_z = m_{z0} + m_z^\alpha \alpha + m_z^{\delta_z} \delta_z + m_z^{\omega_z} \omega_z + m_z^{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + m_z^{\dot{\delta}_z} \dot{\delta}_z \quad (1-29)$$

式中 $\bar{\omega}_z$ ——量纲为 1 的角速度, $\bar{\omega}_z = \frac{\omega_z L}{V}$;

$\bar{\alpha}$ 、 $\bar{\delta}_z$ ——量纲为 1 的角度变化率, 分别可表示为 $\bar{\alpha} = \frac{\dot{\alpha} L}{V}$, $\bar{\delta}_z = \frac{\dot{\delta}_z L}{V}$;

m_{z0} ——当 $\alpha = \delta_z = \omega_z = \dot{\alpha} = \dot{\delta}_z = 0$ 时的俯仰力矩系数, 它是由导弹外形相对于 Ox_1z_1 平面不对称引起的, m_{z0} 主要取决于飞行 Ma 数、导弹的几何形状、弹翼或安定面的安装角等。

下面逐项研究俯仰力矩的各个组成部分。

一、定态直线飞行时的俯仰力矩及纵向平衡状态

所谓导弹的定态飞行, 是指飞行过程中速度 V 、攻角 α 、侧滑角 β 、舵偏转角 δ_z 和 δ_y 等均不随时间变化的飞行状态。实际上, 导弹不会有严格的定态飞行, 即使导弹作等速直线飞行, 由于燃料的消耗使导弹质量发生变化, 为保持等速直线飞行所需的攻角也要随之改变。因此, 只能说导弹在整个飞行轨迹中某一小段距离接近于定态飞行。

导弹在作定态直线飞行时, $\omega_z = \dot{\alpha} = \dot{\delta}_z = 0$, 俯仰力矩系数的表达式 (1-29) 则成为

$$m_z = m_{z0} + m_z^a \alpha + m_z^{\delta_z} \delta_z \quad (1-30)$$

对于轴对称导弹, $m_{z0} = 0$, 则 (1-30) 式改写为

$$m_z = m_z^a \alpha + m_z^{\delta_z} \delta_z \quad (1-31)$$

实验表明: 只有攻角 α 和舵偏角 δ_z 值不大的情况下, 上述线性关系才成立, 随着 α 、 δ_z 的增大, 线性关系将被破坏。若把一定 δ_z 值时 m_z 与 α 的关系画成曲线, 可得如图 1-26 中的示意曲线。由图可见, 在攻角值超过一定范围以后, m_z 对 α 的线性关系就不再保持。

从图 1-26 上看到, 这些曲线与横坐标轴的交点满足 $m_z = 0$ 。这些交点称为静平衡点。这时, 导弹运动的特征就是 $\omega_z = \dot{\alpha} = \dot{\delta}_z = 0$, 而攻角 α 与舵偏角 δ_z 保持一定的关系, 使作用在导弹上由 α 、 δ_z 产生的所有升力相对于质心的俯仰力矩的代数和为零, 亦即导弹处于纵向平衡状态。

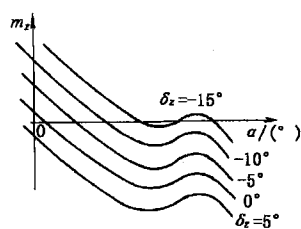


图 1-26 $m_z = f(\alpha)$ 曲线示意图

导弹处于纵向平衡状态时, 攻角 α 与舵偏角 δ_z 之间的关系可令式 (1-31) 的右端为零求得

$$m_z^a \alpha + m_z^{\delta_z} \delta_z = 0$$

即

$$\left(\frac{\delta_z}{\alpha} \right)_B = - \frac{m_z^a}{m_z^{\delta_z}}$$

或

$$\delta_{zB} = - \frac{m_z^a}{m_z^{\delta_z}} \alpha_B \quad (1-32)$$

式 (1-32) 表明: 为使导弹在某一飞行攻角下处于纵向平衡状态, 必须使升降舵 (或其他操纵面) 偏转一相应的角度, 这个角度称为升降舵的平衡偏转角, 以符号 δ_{zB} 表示。换句话说, 为在某一升降舵偏转角下保持导弹的纵向平衡所需要的攻角就是平衡攻角, 以 α_B 表示。

比值 $(-m_z^a/m_z^{\delta_z})$ 除了与飞行 Ma 数有关外, 还随导弹气动布局的不同而不同。统计数字表明, 对于正常式布局, $(-m_z^a/m_z^{\delta_z})$ 一般为 -1.2 左右; 鸭式布局约为 1.0 左右; 对于旋转弹翼式则可高达 6.0~8.0。

平衡状态时的全弹升力，即所谓平衡升力。平衡升力系数可由下式求得

$$c_{yB} = c_y^a \alpha_B + c_y^{\delta_z} \delta_{zB} = \left(c_y^a - c_y^{\delta_z} \frac{m_z^a}{m_z^{\delta_z}} \right) \alpha_B \quad (1-33)$$

由于上面讨论的是定态直线飞行的情况，在进行一般弹道计算时，若假设每一瞬时导弹都处于平衡状态，则可用式(1-33)来计算弹道每一点上的平衡升力系数。这种假设，通常称为“瞬时平衡”，即认为导弹从某一平衡状态改变到另一平衡状态是瞬时完成的，也就是忽略了导弹绕质心的旋转运动，此时作用在导弹上的俯仰力矩只有 $M_z^a \alpha$ 和 $M_z^{\delta_z} \delta_z$ 两部分，而且此两力矩恒处于平衡状态，即

$$m_z^a \alpha + m_z^{\delta_z} \delta_z = 0$$

导弹初步设计阶段采用“瞬时平衡”假设，工程实践上可大大减少计算工作量。

二、纵向静稳定性

导弹的平衡有稳定平衡和不稳定平衡，导弹的平衡特性取决于它自身的所谓静稳定性。静稳定性的定义概念如下：导弹受外界干扰作用偏离平衡状态后，外界干扰消失的瞬间，若导弹不经操纵能产生空气动力矩，使导弹有恢复到原平衡状态的趋势，则称导弹是静稳定的；若产生的空气动力矩，将使导弹更加偏离原来平衡状态，则称导弹是静不稳定的；若是既无恢复的趋势，也不再继续偏离原平衡状态，则称导弹是静中立稳定的。必须强调指出，静稳定性只是说明导弹偏离平衡状态那一瞬间的力矩特性，而并不说明整个运动过程导弹最终是否具有稳定性。

判别导弹纵向静稳定性的方法是看偏导数 $m_z^a|_{\alpha=\alpha_B}$ （即力矩特性曲线相对于横坐标轴的斜率）的性质。若导弹以某个平衡攻角 α_B 处于平衡状态下飞行，由于某种原因（例如，垂直向上的阵风）使攻角增加了 $\Delta\alpha$ （即 $\Delta\alpha > 0$ ），引起了作用在焦点上的附加升力 ΔY 。当舵偏角 δ_z 保持原值不变（即导弹不操纵）时，则由于这个附加升力引起的附加俯仰力矩为

$$\Delta M_z(\alpha) = m_z^a|_{\alpha=\alpha_B} \Delta\alpha q S L \quad (1-34)$$

若式(1-34)中 $m_z^a|_{\alpha=\alpha_B} < 0$ （如图1-27中(a)所示），则 $\Delta M_z(\alpha)$ 是个负值，它将使导弹低头，力图使攻角由 $(\alpha_B + \Delta\alpha)$ 值恢复到 α_B 值（即消除攻角增量 $\Delta\alpha$ ）。导弹的这种物理属性，称为静稳定性。静稳定的导弹，在偏离平衡位置后产生的力图使导弹恢复到原平衡状态的空气动力矩，称为静稳定力矩或恢复力矩。

若 $m_z^a|_{\alpha=\alpha_B} > 0$ （如图1-27中(b)所示），则式(1-34)中 $\Delta M_z(\alpha) > 0$ ，这附加俯仰力矩将使导弹更加偏离平衡位置。这种情况，称之为静不稳定的。静不稳定的空气动力矩又形象地称为翻滚力矩。

若 $m_z^a|_{\alpha=\alpha_B} = 0$ （如图1-27中(c)所示），则是静中立稳定的情况。当导弹偏

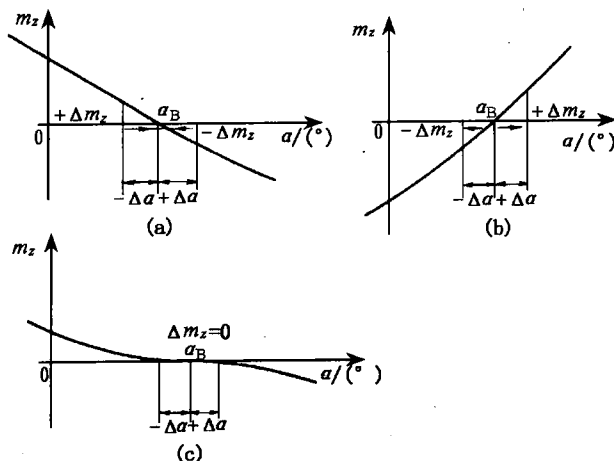


图 1-27 $m_z = f(\alpha)$ 的三种典型情况
(a) 静稳定的；(b) 静不稳定的；(c) 静中立稳定的

离平衡位置后, 由 $\Delta Y(\alpha)$ 导致的附加俯仰力矩等于零, 干扰造成的附加攻角既不再增大, 也不能被消除。

偏导数 m_z^a 表示单位攻角引起的俯仰力矩系数的大小和方向, 它表征着导弹的纵向静稳定品质。把纵向静稳定性的条件总结起来有

$$m_z^a|_{\alpha=\alpha_B} \begin{cases} < 0, \text{纵向静稳定的} \\ = 0, \text{纵向静中立稳定的} \\ > 0, \text{纵向静不稳定的} \end{cases}$$

在大多数情况下 c_y 与 α 呈线性关系, 所以在绘制 $m_z = f(\alpha)$ 曲线的同时, 也常绘制出 $m_z = f(c_y)$ 曲线。有时用偏导数 $m_z^{c_y}$ 取代 m_z^a , 作为衡量导弹是否具有静稳定的条件。

$$\begin{aligned} M_z^a &= -Y^a \alpha (x_F - x_G) = -c_y^a \alpha (x_F - x_G) q S \\ &= m_z^a \alpha q S L \end{aligned}$$

于是
$$m_z^a = -c_y^a (\bar{x}_F - \bar{x}_G)$$

由此得
$$m_z^{c_y} = \frac{\partial m_z}{\partial c_y} = \frac{m_z^a}{c_y^a} = -(\bar{x}_F - \bar{x}_G) \quad (1-35)$$

式中 $\bar{x}_F$ ——全弹焦点的相对坐标, 量纲为 1;

$\bar{x}_G$ ——全弹质心的相对坐标, 量纲为 1。

显然, 对于具有纵向静稳定性的导弹, $m_z^{c_y} < 0$ 。这时, 焦点位于质心之后。当焦点逐渐向质心靠近时, 静稳定性逐渐降低; 当焦点移到与质心重合时, 导弹是静中立稳定的; 焦点移到质心之前时 (即 $m_z^{c_y} > 0$), 导弹是静不稳定的。因此, 工程上常把 $m_z^{c_y}$ 称为静稳定度, 焦点相对坐标与质心相对坐标之间的差值 ($\bar{x}_F - \bar{x}_G$) 称为静稳定裕度。

导弹的静稳定度与飞行性能有关。为了保证导弹具有所希望的静稳定度, 设计过程中常采用两种办法: 一是改变导弹的气动布局, 从而改变焦点的位置, 如改变弹翼的外形、面积及其相对弹身的前后位置、改变尾翼面积、添置反安定面等等。另一种办法是改变导弹内部的部位安排, 以调整全弹质心的位置。

三、操纵力矩

对具有静稳定性的导弹来说, 要使导弹以正攻角飞行时, 对正常式布局的导弹, 升降舵的偏转角应为负 (即后缘往上); 对鸭式布局的导弹, 升降舵的偏转角应为正, 总之, 要产生所需的抬头力矩 (如图 1-28 所示)。与此同时, 升力 $Y^a \alpha$ 对质心将形成低头力矩, 并使导弹处于力矩平衡。舵面偏转后形成的空气动力对质心的力矩称为操纵力矩, 其值为

$$M_z(\delta_z) = -c_{y_z}^{\delta} \delta_z q S (x_R - x_G) = m_z^{\delta} \delta_z q S L$$

由此得
$$m_z^{\delta} = -c_{y_z}^{\delta} (\bar{x}_R - \bar{x}_G) \quad (1-36)$$

式中 $\bar{x}_R = \frac{x_R}{L}$ ——舵面压力中心至导弹头部顶点距离的相对坐标, 量纲为 1;

m_z^{δ} ——舵面偏转单位角度时所引起的操纵力矩系数, 称为舵面效率。对于正常式导弹,

舵面总是在质心之后, 所以总有 $m_z^{\delta} < 0$; 对于鸭式导弹, $m_z^{\delta} > 0$;

$c_{y_z}^{\delta}$ ——舵面偏转单位角度所引起的升力系数。它随 Ma 数的变化规律如图 1-29 所示。

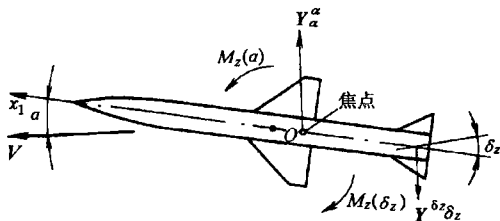


图 1-28 操纵力矩的示意图

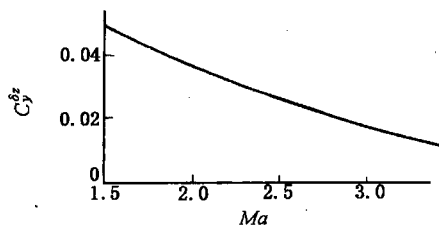


图 1-29 $C_{y_r}^\delta$ 与 Ma 数关系曲线示意图

四、俯仰阻尼力矩

俯仰阻尼力矩是由导弹绕 Oz_1 轴旋转运动所引起的，其大小和旋转角速度 ω_z 成正比，方向总与 ω_z 相反，其作用是阻止导弹绕 Oz_1 轴的旋转运动，故称为俯仰阻尼力矩（或称纵向阻尼力矩）。显然，导弹不作旋转运动时，也就没有阻尼力矩。

设导弹质心以速度 V 运动，同时，又以角速度 ω_z 绕 Oz_1 轴转动（如图 1-30 所示），旋转使导弹表面上各点均获得一

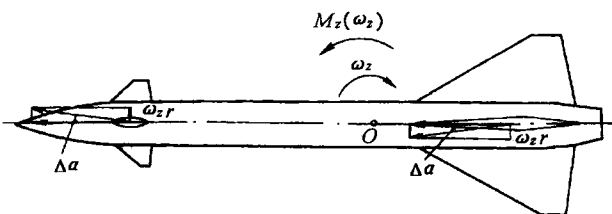


图 1-30 俯仰阻尼力矩

附加速度，其方向垂直于连接质心与该点的矢径 r ，大小等于 $\omega_z r$ 。若 $\omega_z > 0$ ，则质心之前的导弹表面上各点的攻角将减小一个 $\Delta\alpha(r)$ ，其值为

$$\tan\Delta\alpha(r) = r\omega_z/V \quad (1-37)$$

而处于质心之后的导弹表面上各点的攻角将增加一个 $\Delta\alpha(r)$ 。由于导弹质心前后各点处攻角都将有所改变，从而使质心前后各点处产生了附加的升力 $\Delta Y_i(\omega_z)$ ，且 $\Delta Y_i(\omega_z)$ 对导弹质心还将产生一个附加的俯仰力矩 $\Delta M_{zi}(\omega_z)$ 。 $\omega_z > 0$ 时，质心前各点均产生向下的附加升力，质心后各点均产生向上的附加升力，因此，质心前后各点的附加升力引起的附加俯仰力矩 $\Delta M_{zi}(\omega_z)$ 方向相同，均与 ω_z 方向相反。把所有各点的 $\Delta M_{zi}(\omega_z)$ 相加，得到作用在导弹上的总俯仰阻尼力矩 $M_z(\omega_z)$ 。由于导弹质心前后各点的附加升力 $\Delta Y_i(\omega_z)$ 方向刚好相反，所以，总的 $Y(\omega_z)$ 可略去不计。

工程上，俯仰阻尼力矩常用量纲为 1 的俯仰阻尼力矩系数来表示，即

$$M_{z_z}^{\omega_z} = m_{z_z}^{\omega_z} q S L^2 / V \quad (1-38)$$

$$\bar{\omega}_z = \omega_z L / V$$

式中 $m_{z_z}^{\omega_z}$ 总是一个负值，它的大小主要取决于飞行 Ma 数、导弹的几何形状和质心的位置。当导弹外形和质心位置确定后，俯仰阻尼旋转导数 $m_{z_z}^{\omega_z}$ 与 Ma 数的关系如图 1-31 所示。为书写方便，通常将 $m_{z_z}^{\omega_z}$ 简记作 $m_{z_z}^{\omega_z}$ 。

一般情况下，俯仰阻尼力矩相对于俯仰稳定力矩和操纵力矩来说是比较小的，对某些旋转角速度 ω_z 比较小的导弹来说，甚至可以忽略。但是，俯仰阻尼力矩会促使过渡

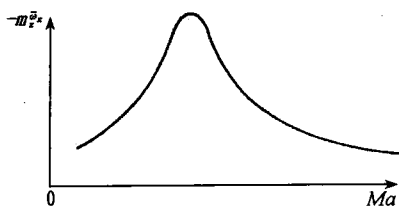


图 1-31 $m_{z_z}^{\omega_z}$ 随 Ma 数变化的示意图

过程振荡的衰减,因此,它是改善导弹过渡过程品质的一个很重要的因素,从这个意义上讲,它却是不能忽略的。

五、非定态飞行时由下洗延迟引起的附加俯仰力矩

前面所述计算升力和俯仰力矩的方法,严格地说,仅适用于导弹作定态飞行的特殊情况。但是,在一般情况下,导弹的飞行是非定态的飞行,各运动参数都是时间的函数。这时,空气动力系数和空气动力矩系数不仅取决于该瞬时的 α 、 δ_z 、 ω_z 、 Ma 数及其他参数值,而且还取决于这些参数随时间而变化的特性。但是,作为初步的近似计算,可以认为作用在非定态飞行的导弹上的空气动力系数和空气动力矩系数完全决定于该瞬时的运动学参数,这个假设通常称为定态假设。采用定态假设,不仅可以大大减少计算的工作量,而且由此求得的空气动力系数和空气动力矩系数也非常接近于实际值。

但是,在某些情况下不能采用定态假设,下洗延迟就是其中的一种情况。

设正常式布局的导弹以速度 V 和随时间而变化的攻角 $\dot{\alpha}$ (例如 $\dot{\alpha}>0$)作非定态飞行。由于攻角的变化,弹翼后的下洗气流的方向也随之在改变。但是,被弹翼偏斜了的气流并不能瞬时地到达尾翼,而必须经过某一段时间间隔 Δt ,其值取决于弹翼和尾翼间的距离和气流速度,这就是所谓的下洗延迟现象。因此,尾翼处的实际下洗角将取决于 Δt 间隔前的攻角值。在 $\dot{\alpha}>0$ 的情况下,这个下洗角将比定态飞行时的下洗角要小些,而这就相当于在尾翼上引起一个向上的附加升力,由此形成的附加俯仰力矩使导弹低头,以阻止 α 值的增长。在 $\dot{\alpha}<0$ 时,下洗延迟引起的附加俯仰力矩将使导弹抬头,以阻止 α 值减少。总之,由 $\dot{\alpha}$ 引起的附加俯仰力矩相当于一种阻尼力矩,力图阻止 α 值的变化。

同样,若导弹的气动布局为鸭式或旋转弹翼式,当舵面或旋转弹翼的偏转角速度 $\dot{\delta}_z \neq 0$ 时,也存在下洗延迟现象。同理,由 $\dot{\delta}_z$ 引起的附加俯仰力矩也是一种阻尼力矩。

当 $\dot{\alpha} \neq 0$ 和 $\dot{\delta}_z \neq 0$ 时,由下洗延迟引起的两个附加俯仰力矩系数分别以 $\overline{m_z^{\dot{\alpha}}}$ 和 $\overline{m_z^{\dot{\delta}_z}}$ 表示,为书写简便, $\overline{m_z^{\dot{\alpha}}}$ 、 $\overline{m_z^{\dot{\delta}_z}}$ 简记作 $m_z^{\dot{\alpha}}$ 、 $m_z^{\dot{\delta}_z}$,它们都是量纲为1的量。

在分析了俯仰力矩的各项组成以后,必须强调指出,尽管影响俯仰力矩的因素有许多,但其中主要的是两项,即由攻角引起的 m_z^{α} 项和由舵偏转角引起的 $m_z^{\delta_z}$ 项,它们分别称为导弹俯仰(纵向)静稳定力矩系数和俯仰(纵向)操纵力矩系数。

§ 1-6 偏航力矩

偏航力矩是总空气动力矩在 Oy_1 轴上的分量,它将使导弹绕 Oy_1 轴转动。对于轴对称导弹,偏航力矩产生的物理原因与俯仰力矩是类似的。所不同的是,偏航力矩是由侧向力所产生的。偏航力矩系数的表达式可类似写成如下形式

$$m_y = m_y^{\beta} \beta + m_y^{\delta_y} \delta_y + m_y^{\overline{\omega}_y} \overline{\omega}_y + m_y^{\dot{\beta}} \dot{\beta} + m_y^{\dot{\delta}_y} \dot{\delta}_y \quad (1-39)$$

式中 $\overline{\omega}_y = \omega_y l / V$; $\dot{\beta} = \dot{\beta} l / V$; $\dot{\delta}_y = \dot{\delta}_y l / V$

由于所有导弹外形相对于 Ox_1y_1 平面总是对称的, m_{y0} 总是等于零。

m_y^{β} 表征着导弹航向静稳定性。当 $m_y^{\beta} < 0$ 时,则导弹是航向静稳定的。但要注意,航向静

稳定的导弹, m_y^c 是正的 (因为按 β 定义, $c_x^\beta < 0$)。

对于飞机型的导弹, 因它不是轴对称的, 当它绕 Ox_1 轴转动时, 安装在弹身上方的垂直尾翼的各个剖面将产生附加的侧滑角 $\Delta\beta$ (如图 1-32 所示), 其对应的侧向力产生相对于 Oy_1 轴的偏航力矩 $M_y(\omega_x)$ 。附加侧滑角表示为

$$\Delta\beta \approx \frac{\omega_x}{V} y_t \quad (1-40)$$

式中 y_t ——弹身纵轴到垂直尾翼所选剖面的距离。

对于飞机型导弹, 偏航力矩 $M_y(\omega_x)$ 往往不容忽视, 因为它的力臂大。由于绕纵轴的转动角速度 ω_x 引起的偏航力矩 $M_y(\omega_x)$, 有使导弹做螺旋运动的趋势, 故称之为偏航螺旋力矩。

因此, 对于飞机型导弹, 式 (1-39) 右端必须加上 $m_{y^x}^{\bar{\omega}_x}$ 这一项, 其中 $\bar{\omega}_x = \frac{\omega_x l}{2V}$, $m_{y^x}^{\bar{\omega}_x}$ 是量纲为 1 的旋转导数, 又称交叉导数, 其值是负的。为书写简便, $m_{y^x}^{\bar{\omega}_x}$ 简记为 $m_{y^x}^{\omega_x}$ 。

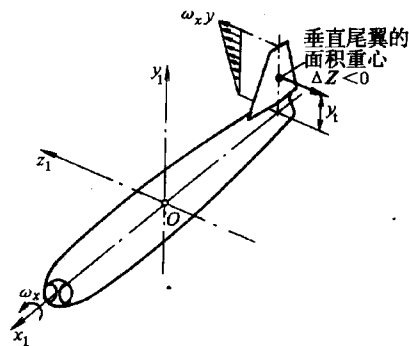


图 1-32 垂直尾翼产生的偏航螺旋力矩

§ 1-7 滚动力矩

滚动力矩 (又称倾斜力矩) M_x 是绕导弹纵轴 Ox_1 的空气动力矩, 它是由于迎面气流不对称地绕流过导弹而产生的。当导弹有侧滑角、某些操纵面 (例如副翼) 偏转、导弹绕 Ox_1 、 Oy_1 轴转动时, 均会使气流流动不对称; 此外, 生产的误差, 如左、右 (或上、下) 弹翼 (或安定面) 的安装角和尺寸制造误差所造成的不一致, 也会破坏气流流动的对称性, 从而产生滚动力矩。因此, 滚动力矩的大小取决于导弹的几何形状、飞行速度和高度、侧滑角 β 、舵面及副翼的偏转角 δ_y 、 δ_x 、绕弹体的转动角速度 ω_x 、 ω_y 及制造误差等。

研究滚动力矩与其他空气动力矩一样, 只讨论滚动力矩的量纲为 1 的系数, 即

$$m_x = \frac{M_x}{qSl} \quad (1-41)$$

式中 l ——弹翼的翼展。

若影响滚动力矩的上述参数值都比较小时, 且略去一些次要因素, 则滚动力矩系数 m_x 可用如下线性关系近似地表示

$$m_x = m_{x0} + m_x^\beta \beta + m_x^{\delta_x} \delta_x + m_x^{\delta_y} \delta_y + m_{x^x}^{\bar{\omega}_x} \bar{\omega}_x + m_{x^y}^{\bar{\omega}_y} \bar{\omega}_y \quad (1-42)$$

式中 m_{x0} ——由生产误差引起的外形不对称产生的;

m_x^β 、 $m_x^{\delta_x}$ 、 $m_x^{\delta_y}$ ——静导数;

$m_{x^x}^{\bar{\omega}_x}$ 、 $m_{x^y}^{\bar{\omega}_y}$ ——量纲为 1 的旋转导数。

下面主要讨论式 (1-42) 右端的第二、三、五项。

一、横向静稳定力矩

当气流以某个侧滑角 β 流过导弹的平置水平弹翼和尾翼时, 由于左、右翼的绕流条件不同, 压力分布也就不同, 左、右翼升力不对称则产生绕导弹纵轴的滚动力矩。

导数 m_x^β 表征导弹横向静稳定性, 对于飞机型导弹来说具有重要意义。为了说明这一概念, 举一个飞机型导弹作水平直线飞行的情况为例子。假设由于某种原因, 导弹突然向右倾

斜了某个角度 γ (如图 1-33 所示)。因为升力 Y 总是处在导弹纵向对称平面 Ox_1y_1 内, 故当导弹倾斜时, 则产生升力的水平分量 $Y\sin\gamma$ 。在该力的作用下, 导弹的飞行速度方向将改变, 即进行带侧滑的飞行, 产生正的侧滑角。若 $m_x^\beta < 0$, 则由侧滑所产生的滚动力矩 $M_x(\beta) = M_x^\beta \beta < 0$, 于是此力矩使导弹有消除由于某种原因所产生的向右倾斜的趋势。因此, 若 $m_x^\beta < 0$, 则导弹具有横向静稳定性; 若 $m_x^\beta > 0$, 则导弹是横向静不稳定的。

飞机型导弹的横向静稳定性, 主要由弹翼和垂直尾翼所产生, 而影响弹翼 m_x^β 值的主要因素是弹翼后掠角及上反角。

1. 弹翼后掠角的影响

有后掠角 χ 的平置弹翼在有侧滑飞行时, 左翼的实际后掠角将为 $(\chi + \beta)$, 而右翼则为 $(\chi - \beta)$ (如图 1-34 所示)。当 $\beta > 0$ 时, 这就使得右翼前缘的垂直速度分量 (有效速度) $V\cos(\chi - \beta)$ 比左翼前缘的垂直速度分量 $V\cos(\chi + \beta)$ 大。另外, 右翼的有效展弦比也比左翼大, 右翼比左翼的 c_y^α 值也随着提高一些; 且 $\beta > 0$ 时, 右翼的侧缘变成“前缘”, 而左翼的侧缘则变成了“后缘”。综合这些因素, 右翼产生的升力大于左翼, 这就导致弹翼产生负的滚动力矩, 即 $m_x^\beta < 0$ 。因此, 有后掠弹翼, 增加了横向静稳定性。

2. 弹翼上反角的影响

弹翼的上反角 ψ_w (翼弦平面与 Ox_1z_1 平面之间的夹角, 翼弦平面在 Ox_1z_1 平面之上时 ψ_w 角为正) 亦将产生负的 m_x^β (如图 1-35 所示)。当导弹作右侧滑 ($\beta > 0$) 时, 在右翼上由于上反角 ψ_w 的作用, 将产生垂直向上的迎风速度 $V_y = V\sin\beta\sin\psi_w \approx V\beta\psi_w$, 因而, 右翼上将增大攻角 $\Delta\alpha \approx \beta\psi_w$ 。而左翼的迎风速度 V_y 是向下, 故左翼上将降低攻角 $\Delta\alpha \approx -\beta\psi_w$, 于是就导致 $m_x^\beta < 0$ 。因此, 弹翼有上反角 ($\psi_w > 0$), 增加了横向静稳定性。

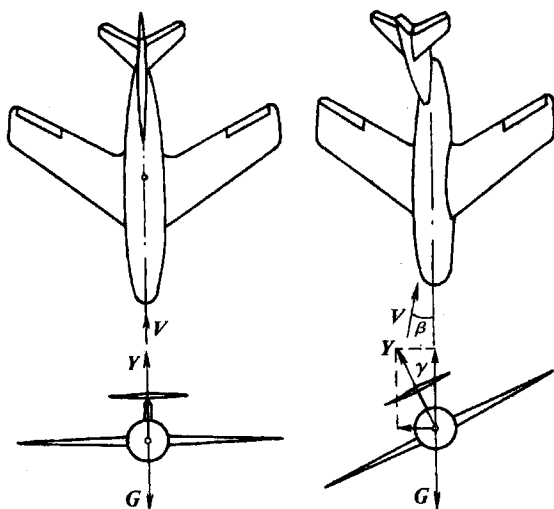


图 1-33 由倾斜引起的侧滑飞行

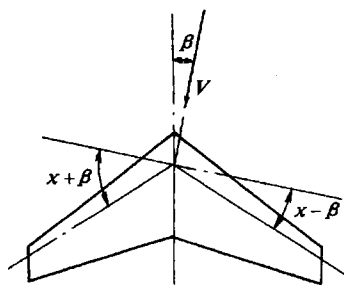


图 1-34 侧滑时, 左、右翼的实际后掠角

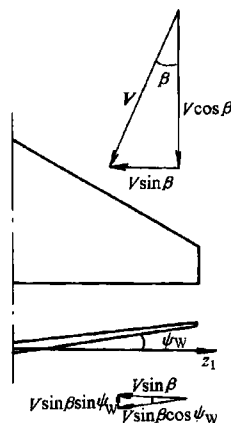


图 1-35 侧滑时上反角导致的有效攻角的变化

可见, 弹翼后掠角、上反角都使弹翼产生横向静稳定力矩。为使飞机型导弹或高速飞机的横向静稳定度不致过大, 对于具有大后掠角的弹翼, 往往设计成有适度的下反角。

二、滚动操纵力矩

操纵副翼或差动舵产生绕 Ox_1 轴的力矩, 称为滚动操纵力矩。副翼和差动舵一样, 两边操纵面总是一上一下成对地出现的。如图 1-36 所示, 副翼的偏转角 δ_x 为正 (即右副翼后缘往下偏, 左副翼的后缘往上偏), 这相当于右副翼增大了攻角, 形成正的升力, 而左副翼刚好相反, 这样, 引起负的滚动操纵力矩。当副翼的偏转角为负时, 则滚动操纵力矩为正。

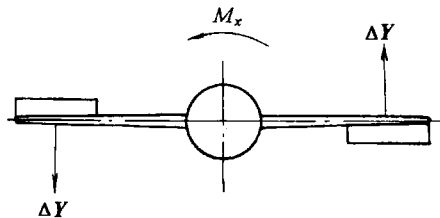


图 1-36 副翼产生的滚动操纵力矩 (后视图)

滚动操纵力矩 $M_x(\delta_x)$ 用于操纵导弹绕纵轴 Ox_1 转动或保持导弹的倾斜稳定。力矩系数导数 $\dot{m}_x^{\delta_x}$ 称为副翼的操纵效率, 也就是单位偏转角所引起的力矩系数。当差动舵 (副翼) 偏转角增大时, 其操纵效率略有降低。根据 δ_x 角定义, $\dot{m}_x^{\delta_x}$ 总是负值。

三、滚动阻尼力矩

当导弹绕纵轴 Ox_1 转动时, 将产生滚动阻尼力矩 $M_x^{\omega_x} \cdot \omega_x$ 。滚动阻尼力矩产生的物理原因与俯仰阻尼力矩相类似。滚动阻尼力矩主要是由弹翼产生的。该力矩的方向总是阻止导弹绕纵轴转动。不难证明, 滚动阻尼力矩系数与无量纲角速度 $\bar{\omega}_x$ 成正比, 即

$$m_x(\omega_x) = \dot{m}_x^{\omega_x} \bar{\omega}_x \quad (1-43)$$

式中, $\bar{\omega}_x = \frac{\omega_x l}{2V}$ 。 $\dot{m}_x^{\omega_x}$ 可简写为 $\dot{m}_x^{\omega_x}$, 它是无量纲值, 其值总是负的。

§ 1-8 铰链力矩

导弹操纵时, 操纵面 (升降舵、方向舵、副翼) 偏转某一角度, 在操纵面上产生空气动力, 它除了产生相对于导弹质心的力矩之外, 还产生相对于操纵面转轴 (即铰链轴) 的力矩, 称之为铰链力矩。

铰链力矩对导弹的操纵起着很大的作用。对于由自动驾驶仪操纵的导弹来说, 推动操纵面的舵机的需用功率取决于铰链力矩的大小。对于有人驾驶的飞机来说, 铰链力矩决定了驾驶员施予驾驶杆上的力的大小, 铰链力矩越大, 所需杆力也越大。

尾翼一般由不动的部分 (安定面) 和可转动的部分 (舵面) 所组成。也有全动的, 如全动舵面。但无论何种类型, 其铰链力矩都可表示为

$$M_h = m_h q_t S_t b_t \quad (1-44)$$

式中 m_h ——铰链力矩系数;

q_t ——流经操纵面 (舵面) 的动压;

S_t ——舵面面积;

b_t ——舵面弦长。

以升降舵为例, 铰链力矩主要是由升降舵上的升力引起的。当舵面处的攻角为 α , 舵偏角

为 δ_z 时, 舵面升力 Y_t 作用点距铰链轴为 h (如图 1-37 所示), 略去舵面阻力对铰链力矩影响, 则有

$$M_h = -Y_t h \cos(\alpha + \delta_z) \quad (1-45)$$

当 α 、 δ_z 不大时, 有

$$\cos(\alpha + \delta_z) \approx 1$$

而且舵面升力 Y_t 可以看做是 α 、 δ_z 的线性函数, 即

$$Y_t = Y_t^\alpha \alpha + Y_t^{\delta_z} \delta_z \quad (1-46)$$

于是, 可以把铰链力矩表达为 α 、 δ_z 的线性关系式:

$$M_h = M_h^\alpha \alpha + M_h^{\delta_z} \delta_z \quad (1-47)$$

铰链力矩系数也可写成

$$m_h = m_h^\alpha \alpha + m_h^{\delta_z} \delta_z \quad (1-48)$$

铰链力矩系数 m_h 主要取决于操纵面的类型及形状、 Ma 数、攻角 (对于方向舵则取决于侧滑角)、操纵面的偏转角以及铰链轴的位置。偏导数 m_h^α 与 $m_h^{\delta_z}$ 是 Ma 数的函数, 当攻角变化时, 其值变化不大。图 1-38 绘出了偏导数 m_h^α 和 $m_h^{\delta_z}$ 随 Ma 数变化的示意图。

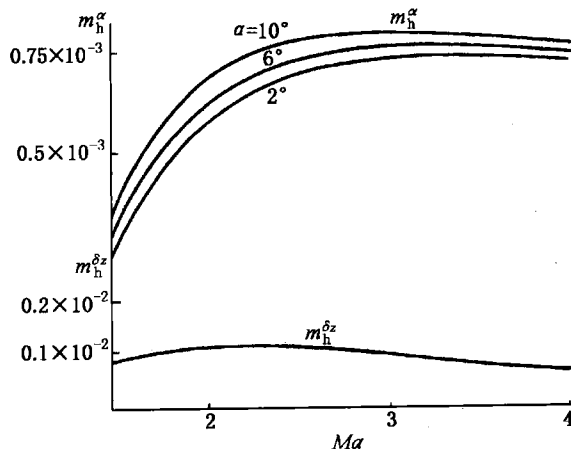


图 1-38 铰链力矩系数与 Ma 数的关系

当舵面尺寸一定时, 在其他条件相同的情况下, 铰链力矩的大小取决于舵面的转轴的位置。转轴越靠近舵面前缘, 铰链力矩就越大。若转轴与舵面压力中心重合, 则铰链力矩为零。

§ 1-9 马格努斯力和力矩

当导弹以某一攻角飞行, 且以一定的角速度 ω_x 绕自身纵轴 Ox_1 旋转时, 由于旋转和来流横向分速的联合作用, 在垂直于攻角平面的方向上将产生侧向力 Z_1 , 该力称为马格努斯力。该力对质心的力矩 M_{y_1} 称为马格努斯力矩。

马格努斯力一般不大, 不超过相应法向力的 5%。但马格努斯力矩有时却很大, 尤其是对有翼的旋转导弹。在旋转弹的动稳定性分析中必须考虑马格努斯力矩的影响。马格努斯力和力矩与多种因素有关。对单独弹身来说, 影响因素有: 附面层位移厚度的非对称性、压力梯

度的非对称性、主流切应力的非对称性、横流切应力的非对称性、分离的非对称性、转换的非对称性、附面层与非对称体涡的相互作用等。对弹翼来说,影响因素有:旋转弹翼的附加攻角差动、附加速度差动、安装角差动、钝后缘弹翼底部压力差动、弹身对背风面翼片的遮蔽作用、非对称体涡对弹翼的冲击干扰、弹翼对尾翼的非对称干扰等。因此,研究旋转弹的马格努斯效应是个十分复杂的问题。本节着重介绍单独弹身压力梯度的非对称性、弹翼安装角的差动、旋转弹翼的附加攻角差动所引起的马格努斯力矩的机理。

一、单独弹身的马格努斯力和力矩

人们曾对来流以速度 V 和攻角 α 绕过一个无限长的圆柱体进行了研究。这时,来流可分解成轴向流 $V\cos\alpha$ 和横向流 $V\sin\alpha$ 。如果弹身不绕纵轴 Ox_1 旋转,则 $V\sin\alpha$ 绕圆柱的流动是对称于攻角平面的。如果圆柱体以 ω_x 沿顺时针方向滚动,那么,由于空气粘性的作用,使圆柱体左侧流线密集、流速大、压强小;而右侧正好相反(如图 1-39 所示)。所以,圆柱体得到一个指向左方的侧向力,即马格努斯力。该力与角速度 ω_x 和攻角 α 相关联。对于以正攻角飞行、且顺时针绕纵轴 Ox_1 旋转的弹身,马格努斯力为负。若马格努斯力作用点位于质心之前时,则所产生的马格努斯力矩为正;当马格努斯力作用点位于质心之后时,则马格努斯力矩为负。

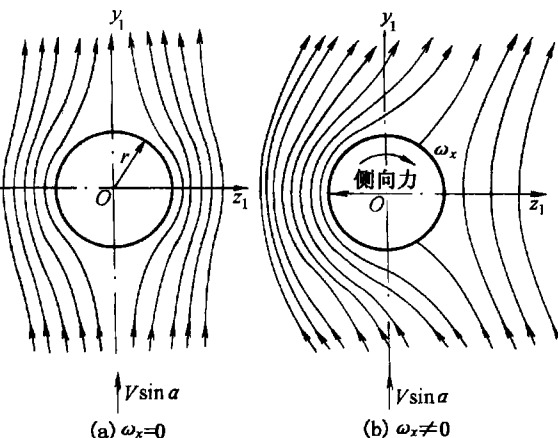


图 1-39 弹身的马格努斯效应

因此,当 $\omega_x \neq 0$ 时,若对导弹进行俯仰操纵($\alpha \neq 0$)时,将伴随偏航运动发生;同样,当对导弹进行偏航操纵($\beta \neq 0$)时,也将伴随俯仰运动发生,这就是所谓运动的交连。

二、弹翼的马格努斯力矩

下面以有差动安装角 φ 的斜置弹翼在绕纵轴 Ox_1 旋转时产生马格努斯效应的情形为例来进行分析。

如图 1-40 所示,这是一个十字形斜置尾翼弹。当导弹的飞行攻角为 α ,且以角速度 ω_x 绕纵轴 Ox_1 旋转时,左、右翼片位于 z 处的剖面上将产生附加速度 $\omega_x z$,左、右翼的有效攻角分别用 α_1 和 α_2 表示,则有

$$\left. \begin{aligned} \text{左翼} \quad \alpha_1 &= \alpha + \varphi - \frac{\omega_x |z|}{V} \\ \text{右翼} \quad \alpha_2 &= \alpha - \varphi + \frac{\omega_x |z|}{V} \end{aligned} \right\} \quad (1-49)$$

由于左、右翼实际攻角的改变,使得作用在其上的法向力也发生了变化。在不考虑轴向力的影响时,由左、右翼片法向力的轴向分量所产生的偏航力矩为

$$\begin{aligned} M_y &= (Y_{1w}\sin\varphi_1 - Y_{2w}\sin\varphi_2) \\ &\approx (Y_{1w}z_1 - Y_{2w}z_2)\varphi \end{aligned} \quad (1-50)$$

式中 Y_{1w} ——左翼面法向力；

Y_{2w} ——右翼面法向力；

z_1, z_2 ——分别为左、右翼的压心至弹体纵轴的距离（其中 $z_1 < 0, z_2 > 0$ ）；

φ ——斜置弹翼的安装角， φ 的定义与 δ_x 定义相同（即 $\varphi < 0, M_x(\varphi) > 0$ ，图 1-40 所示 $\varphi < 0$ ）。

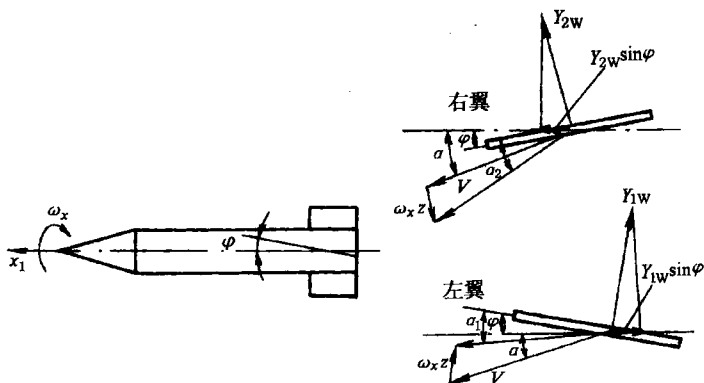


图 1-40 具有差动安装角的斜置弹翼的马格努斯力矩

由此可以得出：当气流以速度 V 和攻角 α 流经不旋转的斜置水平弹翼时，或流经旋转的平置水平弹翼时，都将产生偏航方向的马格努斯力矩。同理，当来流以速度 V 和侧滑角 β 流经不旋转的斜置垂直弹翼或具有旋转角速度 ω_x 的垂直弹翼时，也将产生俯仰方向的马格努斯力矩。

§ 1-10 作用在导弹上的推力

导弹的推力，是由发动机内的燃气流以高速喷出而产生的反作用力等组成。推力是导弹飞行的动力。导弹上采用的发动机有火箭发动机（采用固体或液体燃料）和航空发动机（如冲压发动机、涡轮喷气发动机等）。发动机的类型不同，它的推力特性也就不同。

火箭发动机的推力值可以用下式确定

$$P = m_c u_e + S_a (p_a - p_H) \quad (1-51)$$

式中 m_c ——单位时间内燃料的消耗量（又称为质量秒消耗量）；

u_e ——燃气在喷管出口处的平均有效喷出速度；

S_a ——发动机喷管出口处的横截面积；

p_a ——发动机喷管出口处燃气流静压强；

p_H ——导弹所处高度的大气静压强。

从式(1-51)可以看出：火箭发动机推力 P 只与导弹的飞行高度有关，而与导弹的其他运动参数无关，它的大小主要取决于发动机的性能参数。式(1-51)中的第一项是由于燃气流以高速喷出而产生的推力，称为反作用力（或动推力）；第二项是由于发动机喷管出口处的燃气流静压强 p_a 与大气静压强 p_H 的压差引起的推力部分，称为静推力。

火箭发动机的地面推力 $P_0 = m_c u_e + S_a (p_a - p_0)$ 可以通过地面发动机试验来获得。图 1-41 表示了典型的固体火箭发动机的推力与时间的关系。

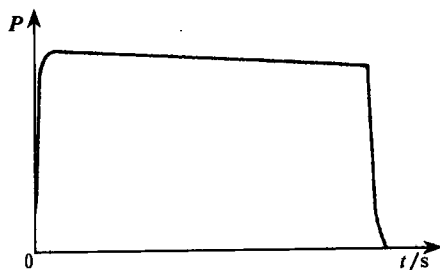


图 1-41 固体火箭发动机推力曲线

随着导弹飞行高度的增加, 推力略有所增加, 其值可表示为

$$P = P_0 + S_a(p_0 - p_H) \quad (1-52)$$

式中 p_0 ——在地面, 发动机喷口周围的大气静压强。

航空喷气发动机的推力特性, 就不像火箭发动机这样简单。航空喷气发动机推力的大小与导弹的飞行高度、 Ma 数、飞行速度、攻角 α 等参数有十分密切的关系。

发动机推力 P 的方向, 主要取决于发动机在弹体上的安装, 其方向一般和导弹的纵轴 Ox_1 重合 (如图 1-42 中 (a) 所示); 也可能和导弹纵轴 Ox_1 平行 (如图 1-42 中 (b) 所示); 或者与导弹纵轴构成任意夹角 (如图 1-42 中 (c) 所示)。这就是说, 推力 P 可能通过导弹质心, 也可能不通过导弹质心。

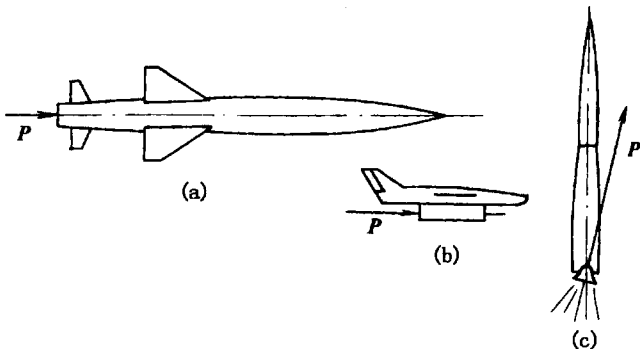


图 1-42 推力 P 的作用方向

若推力 P 不通过导弹质心, 且与导弹纵轴构成某一夹角, 则产生推力矩 M_P 。设推力 P 在弹体坐标系中的投影分量分别为 P_{x_1} 、 P_{y_1} 、 P_{z_1} , 推力作用线至质心的偏心矢径 R_P 在弹体坐标系中的投影分量分别为 x_{1P} 、 y_{1P} 、 z_{1P} 。那么, 推力 P 产生的推力矩 M_P 可表示成

$$M_P = R_P \times P \quad (1-53)$$

推力矩 M_P 在弹体坐标系上的三个分量可表示为

$$\begin{bmatrix} M_{Px_1} \\ M_{Py_1} \\ M_{Pz_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -z_{1P} & y_{1P} \\ z_{1P} & 0 & -x_{1P} \\ -y_{1P} & x_{1P} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{x_1} \\ P_{y_1} \\ P_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{z_1}y_{1P} - P_{y_1}z_{1P} \\ P_{x_1}z_{1P} - P_{z_1}x_{1P} \\ P_{y_1}x_{1P} - P_{x_1}y_{1P} \end{bmatrix} \quad (1-54)$$

§ 1-11 作用在导弹上的重力

根据万有引力定律, 所有物体之间都存在着相互作用力。导弹在空间飞行就要受到地球、太阳、月球等等的引力。对于战术导弹而言, 由于它是在贴近地球表面的大气层内飞行, 所以只计及地球对导弹的引力。在考虑地球自转的情况下, 导弹除了受地心的引力 G_1 外, 还要受到因地球自转所产生的离心惯性力 F_c , 因而, 作用在导弹上的重力就是地心引力和离心惯性力的矢量和 (如图 1-43 所示)。

$$G = G_1 + F_c \quad (1-55)$$

根据万有引力定律, 地心引力 G_1 的大小与地心至导弹的距离平方成反比, 方向总是指向地心。

由于地球自转, 导弹在各处受到的离心惯性力也不相同。事实上, 地球并不是严格的球形, 其质量分布也不均匀。为了

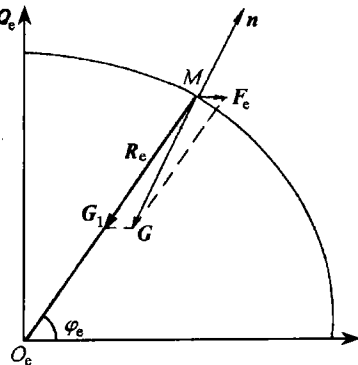


图 1-43 地球表面 M 点的重力方向

研究方便,通常把地球看做是均质的椭球体。设导弹在椭球形地球表面上的质量为 m ,地心至导弹的矢径为 R_e ,导弹所处地理纬度为 φ_e ,地球绕极轴的旋转角速度为 Ω_e ,则导弹所受到的离心惯性力 F_c 的大小为

$$F_c = m R_e \Omega_e^2 \cos \varphi_e \quad (1-56)$$

计算表明:离心惯性力 F_c 比地心引力 G_1 小得多。因此,通常把地心引力 G_1 就视为重力 G ,即

$$G \approx G_1 = mg \quad (1-57)$$

式中 m ——导弹的瞬时质量。发动机工作过程中,不断消耗燃料,导弹的质量不断减小,质量 m 是时间的函数。

$$\frac{dm}{dt} = -m_c \quad (1-58)$$

在 t 瞬时,导弹的质量可以写成

$$m(t) = m_0 - \int_0^t m_c dt \quad (1-59)$$

式中 m_0 ——导弹的起始瞬时质量;

m_c ——质量秒消耗量,可由发动机试验给出。严格说来, m_c 不是常量,在发动机从一个工作状态过渡到另一个工作状态时(如起动、加速或减小推力), m_c 的变化是很显著的;

g ——重力加速度。当略去地球形状的椭球性及自转影响时,重力加速度可表示成

$$g = g_0 \frac{R_e^2}{(R_e + H)^2} \quad (1-60)$$

式中 R_e ——地球平均半径, $R_e = 6371 \text{ km}$;

g_0 ——地球表面的重力加速度,工程上一般取 $g_0 = 9.806 \approx 9.81 \text{ m/s}^2$;

H ——导弹的飞行高度。

由式(1-60)可知,重力加速度 g 是高度 H 的函数。当 $H = 50 \text{ km}$,按式(1-60)计算, $g = 9.66 \text{ m/s}^2$,与地球表面的重力加速度 g_0 相比,只减小 1.5% 左右。因此,对于近程战术导弹来说,在整个飞行过程中,重力加速度 g 可认为是常量,工程计算时,取 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$,且可视航程内的地表面为平面,重力场是平行力场。

第二章 导弹运动方程组

导弹运动方程是表征导弹运动规律的数学模型,也是分析、计算或模拟导弹运动的基础。导弹在飞行期间,发动机不断喷出燃气流,导弹的质量不断发生变化,是一个可变质量系;且导弹是可控飞行,它作为一个被控制对象。因此,完整描述导弹在空间运动和制导系统中各元件工作过程的数学模型是相当复杂的。不同研究阶段、不同设计要求,所需建立的导弹运动数学模型也不相同。例如在导弹方案设计或初步设计阶段,通常可把导弹视为一个质点,选用质点弹道计算的数学模型;而在设计定型阶段,则需建立更完整的数学模型。建立导弹运动方程组以经典力学为基础,涉及变质量力学、空气动力学、推进和控制理论等方面。

本章将要介绍:建立导弹运动方程组常用的坐标系及坐标系之间的转换关系;导弹运动方程组的建立;运动方程组的简化;常用的运动方程组数值积分解法;以及导弹运动与过载之间的关系等。

§ 2-1 导弹作为变质量系的动力学基本方程

由经典力学可知,任何一个自由刚体在空间的任意运动,都可以把它视为刚体质心的平移运动和绕质心转动运动的合成运动,即决定刚体质心瞬时位置的三个自由度和决定刚体瞬时姿态的三个自由度。对于刚体,可以应用牛顿第二定律来研究质心的移动,利用动量矩定理来研究刚体绕质心的转动。

设 m 表示刚体的质量, V 表示刚体的速度矢量, H 表示刚体相对于质心(O 点)的动量矩矢量,则描述刚体质心移动和绕质心转动运动的动力学基本方程的矢量表达式为

$$m \frac{dV}{dt} = F \quad (2-1)$$

$$\frac{dH}{dt} = M \quad (2-2)$$

式中 F ——作用于刚体上外力的主矢量;

M ——外力对刚体质心的主矩。

但是,上述定律(定理)的使用是有条件的:第一,运动着的物体是常质量的刚体;第二,运动是在惯性坐标系内考察的。

然而,高速飞行的导弹一般是薄翼的细长体的弹性结构,因此有可能产生气动力和结构弹性的相互作用,造成弹体外形的弹性或塑性变形;操纵机构(如空气动力舵面)的不时偏转也相应改变导弹的外形。同时,运动着的导弹也不是常质量的,对于装有火箭发动机的导弹,工作着的火箭发动机不断地以高速喷出燃料燃烧后的产物,使导弹的质量不断发生变化;对于装有空气喷气发动机的导弹来说,一方面使用空气作为氧化剂,空气源源不断地进入发动机内部;另一方面燃烧后的燃气与空气的混合气又连续地往外喷出。由此可见,每一瞬时,工作着的反作用式发动机内部的组成不断地发生变化,即装有反作用式发动机的导弹是一个变组成系统。由于导弹的质量、外形都随时间而变化,因此,研究导弹的运动不能直接应用经

典动力学理论,而采用变质量力学来研究,这比研究刚体运动要繁杂得多。

研究导弹的运动规律时,为使问题易于解决,可以把导弹质量与喷射出的燃气质量合在一起考虑,转换成为一个常质量系,即采用所谓“固化原理”,指在任意研究瞬时,设把变质量系的导弹视为虚拟刚体,把该瞬时在导弹所包围的“容积”内的质点“固化”在虚拟的刚体上作为它的组成。同时,把影响导弹运动的一些次要因素通常也略去,如弹体结构变形对运动的影响等。这时,在这个虚拟的刚体上作用有如下诸力:对该物体的外力(如气动力、重力等)、反作用力(推力)、哥氏惯性力(液体发动机内流动的液体由于导弹的转动而产生的一种惯性力)、变分力(由火箭发动机内流体的非定态运动引起的)等。其中后两种力较小,也常被略去。

采用了“固化原理”,可把所研究瞬时的变质量系的导弹的动力学基本方程可写成常质量刚体的形式,这时,要把反作用力作为外力来看待,把每研究瞬时的质量 $m(t)$ 取代原来的常质量 m 。研究导弹绕质心转动运动也可以用同样方式来处理。因而,导弹动力学基本方程的矢量表达式可写为

$$m(t) \frac{dV}{dt} = F + P \quad (2-3)$$

$$\frac{dH}{dt} = M + M_P \quad (2-4)$$

式中 P ——导弹发动机推力;

M ——作用在导弹上的外力对质心主矩;

M_P ——发动机推力产生的力矩(通常推力线通过质心,则 $M_P=0$)。

实践表明:采用上述简化方法,能达到所需要的精确度。

§ 2-2 常用坐标系和坐标系间的转换

坐标系是为描述导弹位置和运动规律而选取的参考基准。导弹是在某个空间力系的约束下飞行,为建立描述导弹在空间运动的标量方程,则可将式(2-3)、(2-4)中各矢量投影到相应的坐标系中获得。为此,常常需要定义一些坐标系(如第一章中的弹体坐标系和速度坐标系),并建立各坐标系间相互关系的转换矩阵。坐标系的选取可以根据习惯和研究问题的方便而定。但是,由于选取的坐标系不同,则所建立的导弹运动方程组的形式和繁简程度也就不同,这就会直接影响求解该方程组的难易程度和运动参数变化的直观程度,所以选取合适的坐标系是十分重要的。选取坐标系的原则应该是:既能正确地描述导弹的运动,又要使描述导弹运动的方程形式简单清晰。

在导弹飞行力学中,常采用的坐标系是右手直角坐标系或极坐标系、球面坐标系等。右手直角坐标系由原点和从原点延伸的3个互相垂直、按右手规则排列顺序的坐标轴构成。建立右手直角坐标系需要确定原点位置和3个坐标轴的方向。导弹飞行力学中常用的右手直角坐标系有:以来流为基准的速度坐标系、以弹体几何轴为基准的弹体坐标系、地面坐标系和弹道坐标系。速度坐标系和弹体坐标系在第一章已作了介绍,本节重点介绍地面坐标系和弹道坐标系。

一、坐标系的定义

1. 地面坐标系 $Axyz$

地面坐标系 $Axyz$ 是与地球表面固连的坐标系。坐标系原点 A 通常选取在导弹发射点上(严格地说,应取在发射瞬时导弹的质心上); Ax 轴指向可以是任意的,对于地面目标而言, Ax 轴通常是弹道面(航迹面)与水平面交线,指向目标为正; Ay 轴沿垂线向上, Az 轴与其他两轴垂直并构成右手坐标系,如图 2-1 所示。地面坐标系相对地球是静止的,它随地球自转而旋转,研究近程导弹运动时,往往把地球视为静止不动,即地面坐标系可视为惯性坐标系。而且,对于近程导弹来说,可把射程内地球表面看做平面,重力场则为平行力场,与 Ay 轴平行,沿 Ay 轴负向。

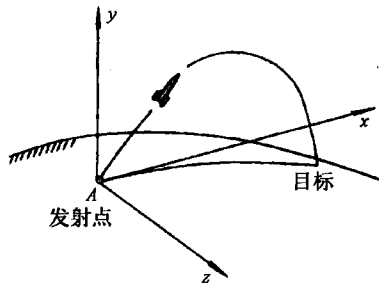


图 2-1 地面坐标系

地面坐标系作为惯性参考系,主要用来确定导弹质心在空间的坐标位置(即确定导弹飞行轨迹)和导弹在空间的姿态等的参考基准。

2. 弹道坐标系 $Ox_2y_2z_2$

弹道坐标系的原点 O 取在导弹的瞬时质心上; Ox_2 轴与导弹速度矢量 V 重合; Oy_2 轴位于包含速度矢量 V 的铅垂面内垂直于 Ox_2 轴,指向上为正; Oz_2 轴垂直于其他两轴并构成右手坐标系,如图 2-2 所示。弹道坐标系与导弹速度矢量 V 固连,它是动坐标系。弹道坐标系和速度坐标系的不同在于: Oy_2 轴位于包含速度矢量的铅垂面内,而 Oy_3 轴在导弹的纵向对称面内。若导弹在运动中,导弹的纵向对称面不在铅垂平面内时,这两个坐标系就不重合。

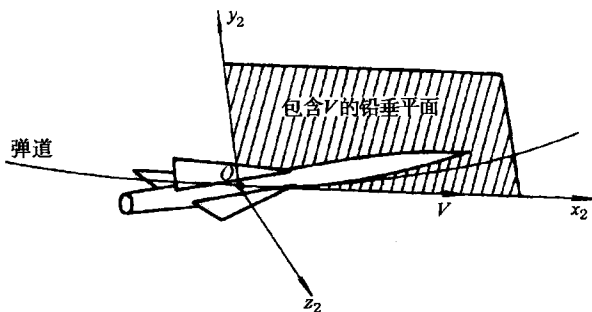


图 2-2 弹道坐标系

弹道坐标系用来建立导弹质心运动的动力学标量方程并研究弹道特性比较简单清晰。

由前面各右手直角坐标系的定义看出:弹体坐标系、速度坐标系和弹道坐标系的共同特点是:原点都在导弹的瞬时质心上,它随着导弹的运动而不断变化其位置,均是动坐标系。但它们之间也有区别,弹体坐标系相对弹体是不动的(如质心相对弹体位置不变的话),而速度坐标系、弹道坐标系相对于弹体是转动的。

二、各坐标系间的关系及其转换

在导弹飞行的任一瞬时,上述各坐标系在空间有各自的指向,它们相互之间也存在一定的关系。导弹飞行时,作用在导弹上的力和力矩及其相应的运动参数习惯上是在不同坐标系中定义的。例如,空气动力定义在速度坐标系中,推力和空气动力矩用弹体坐标系来定义,而重力和射程则用地面坐标系来定义,等等。在建立导弹运动标量方程时,则必须将由不同坐标系定义的诸参量投影到同一坐标系上。例如,在弹道坐标系上描述导弹质心运动的动力学

标量方程时,就要把导弹相对于地面的加速度和作用于导弹上的所有外力都投影到弹道坐标系上。因此,就必须把参量由所定义的坐标系转换到同一的新坐标系上,这就必须进行坐标系间的转换。

坐标系间的转换有多种方法,这里仅介绍其中一种,即从一组直角坐标系转换到另一组直角坐标系,可以用所谓连续旋转的方法。首先将两组坐标系完全重叠,然后使其中一组绕相应轴转过某一角度,根据两组坐标系间的关系,决定是否需绕另相应轴分别作第二、第三次旋转,直至形成新坐标系的最终姿态。

下面分别介绍前面四个右手直角坐标系之间的关系及其转换。

1. 地面坐标系与弹体坐标系之间的关系及其转换

弹体(即弹体坐标系)相对地面坐标系的姿态,通常用3个角度(称欧拉角)来确定,分别定义如下(见图2-3)。为研究方便,将地面坐标系平移至其原点与导弹瞬时质心重合,这不改变地面坐标系与弹体坐标系在空间的姿态及其相应的关系。

俯仰角 ϑ : 导弹的纵轴(Ox_1 轴)与水平面(Axz 平面)间的夹角。导弹纵轴指向水平面上方, ϑ 角为正;反之为负。

偏航角 ψ : 导弹纵轴在水平面内投影(即图中 Ax' 轴)与地面坐标系 Ax 轴之间的夹角。迎 ψ 角平面(即图中 $Ax'z$ 平面)观察(或迎 Ay 轴俯视),若由 Ax 轴转至 Ax' 轴是逆时针旋转,则 ψ 角为正;反之为负。

倾斜(滚动)角 γ : 弹体坐标系的 Oy_1 轴与包含导弹纵轴的铅垂平面(即图中 $Ax'y'$ 平面)之间的夹角。由弹体尾部顺纵轴前视,若 Oy_1 轴位于铅垂面 $Ax'y'$ 的右侧(即弹体向右倾斜),则 γ 角为正;反之为负。

以上定义的3个角参数,又称弹体的姿态角。为推导地面坐标系与弹体坐标系之间的关系及其转换矩阵,按上述连续旋转的方法,首先将弹体坐标系与地面坐标系

的原点及各对应坐标轴分别重合,以地面坐标系为基准,然后按照上述3个角参数的定义,分别绕相应轴三次旋转,依次转过 ψ 角、 ϑ 角和 γ 角,就得到弹体坐标系 $Ox_1y_1z_1$ 的姿态(如图2-3所示)。而且,每旋转一次,就相应获得一个初等旋转矩阵,地面坐标系与弹体坐标系间的转换矩阵即是这三个初等旋转矩阵的乘积。具体步骤如下:

第一次是以角速度 $\dot{\psi}$ 绕地面坐标系的 Ay 轴旋转 ψ 角, Ax 轴、 Az 轴分别转到 Ax' 、 Az' 轴上,形成坐标系 $Ax'yz'$ (如图2-4(a)所示)。基准坐标系 $Axyz$ 与经第一次旋转后形成的过渡坐标系 $Ax'yz'$ 之间关系以矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y \\ z' \end{bmatrix} = L(\psi) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

式中

$$L(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

第二次是以角速度 $\dot{\vartheta}$ 绕过渡坐标系 Az' 轴旋转 ϑ 角, Ax' 轴、 Ay 轴分别转到 Ax_1 轴、 Ay_1

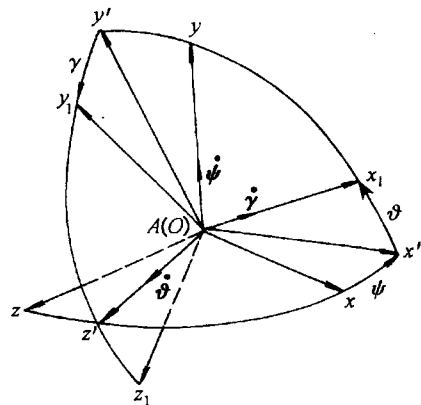


图2-3 地面坐标系与弹体坐标系间的关系(3个欧拉角)

轴上, 形成新的过渡坐标系 $Ax_1y'z'$ (如图 2-4(b)所示)。坐标系 $Ax_1y'z'$ 与 $Ax_1y'z'$ 之间关系以矩阵形式表示为

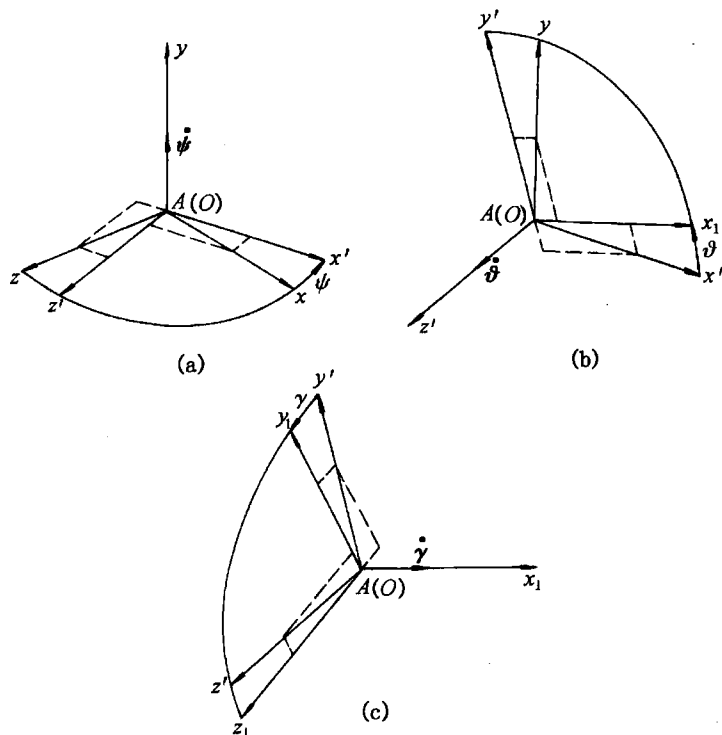


图 2-4 三次连续旋转确定地面坐标系与弹体坐标系之间的关系
(a) 第一次旋转; (b) 第二次旋转; (c) 第三次旋转

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = L(\vartheta) \begin{bmatrix} x' \\ y \\ z' \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

式中

$$L(\vartheta) = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

第三次是以角速度 $\dot{\gamma}$ 绕 Ax_1 轴旋转 γ 角, Ay' 轴、 Az' 轴分别转到 Ay_1 轴、 Az_1 轴上, 最终获得弹体坐标系 $O(A)x_1y_1z_1$ 的姿态 (如图 2-4(c)所示)。坐标系 $Ax_1y'z'$ 与 $Ax_1y_1z_1$ 之间的关系以矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = L(\gamma) \begin{bmatrix} x_1 \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

式中

$$L(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

将式(2-5)代入式(2-7)中, 再将其结果代入式(2-9), 可得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = L(\gamma) L(\vartheta) L(\psi) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

$$\text{令 } L(\gamma, \vartheta, \psi) = L(\gamma) L(\vartheta) L(\psi) \quad (2-12)$$

$$\text{则 } \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = L(\gamma, \vartheta, \psi) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } L(\gamma, \vartheta, \psi) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \vartheta \cos \psi & \sin \vartheta & -\cos \vartheta \sin \psi \\ -\sin \vartheta \cos \psi \cos \gamma + \sin \psi \sin \gamma & \cos \vartheta \cos \gamma & \sin \vartheta \sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \gamma \\ \sin \vartheta \cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \cos \gamma & -\cos \vartheta \sin \gamma & -\sin \vartheta \sin \psi \sin \gamma + \cos \psi \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (2-14) \end{aligned}$$

关系式(2-13)、(2-14)常列成表格形式,称为两坐标系之间的方向余弦表(见表2-1)。

表2-1 地面坐标系与弹体坐标系之间的方向余弦表

	A_x	A_y	A_z
Ox_1	$\cos \vartheta \cos \psi$	$\sin \vartheta$	$-\cos \vartheta \sin \psi$
Oy_1	$-\sin \vartheta \cos \psi \cos \gamma + \sin \psi \sin \gamma$	$\cos \vartheta \cos \gamma$	$\sin \vartheta \sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \gamma$
Oz_1	$\sin \vartheta \cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \cos \gamma$	$-\cos \vartheta \sin \gamma$	$-\sin \vartheta \sin \psi \sin \gamma + \cos \psi \cos \gamma$

2. 地面坐标系与弹道坐标系之间的关系及其转换

由地面坐标系和弹道坐标系的定义可知,由于地面坐标系的 Az 轴和弹道坐标系的 Oz_2 轴均在水平面内,所以,地面坐标系与弹道坐标系之间的关系通常由两个角度来确定,分别定义如下(见图2-5)。为研究方便,同样将地面坐标系平移至其原点与弹道坐标系原点(即导弹瞬时质心)重合。

弹道倾角 θ : 导弹的速度矢量 V (即 Ox_2 轴)与水平面间的夹角。速度矢量指向水平面上方, θ 角为正;反之为负。

弹道偏角 ψ_v : 导弹的速度矢量 V 在水平面内投影(即图2-5中 Ax')与地面坐标系的 Ax 轴间的夹角。迎 ψ_v 角平面(即迎 Ay 轴俯视)观察,若由 Ax 轴至 Ax' 轴是逆时针旋转,则 ψ_v 角为正;反之为负。

显然,地面坐标系与弹道坐标系之间的关系及其转换矩阵可以通过两次旋转求得。具体步骤如下:

首先,以角速度 $\dot{\psi}_v$ 绕地面坐标系的 Ay 轴旋转 ψ_v 角, Ax 轴、 Az 轴分别转到 Ax' 轴、 Oz_2 轴上,形成过渡坐标系 $Ax'yz_2$ (如图2-6(a)所示)。基准坐标系 $Axyz$ 与经第一次旋转后形成的过渡坐标系 $Ax'yz_2$ 之间的关系以矩阵形式表示为

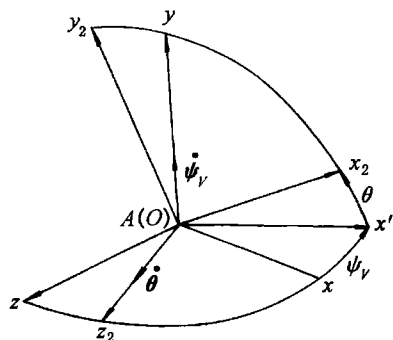


图2-5 地面坐标系与弹道坐标系间的关系

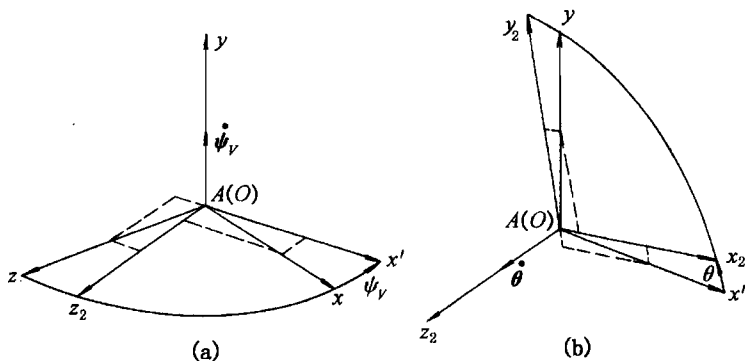


图 2-6 二次连续旋转确定地面坐标系与弹道坐标系之间的关系
(a) 第一次旋转；(b) 第二次旋转

$$\begin{bmatrix} x' \\ y \\ z_2 \end{bmatrix} = L(\psi_v) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

式中

$$L(\psi_v) = \begin{bmatrix} \cos\psi_v & 0 & -\sin\psi_v \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi_v & 0 & \cos\psi_v \end{bmatrix} \quad (2-16)$$

其次，以角速度 $\dot{\theta}$ 绕 Az_2 轴旋转 θ 角， Ax' 轴、 Ay 轴分别转到 Ax_2 轴、 Ay_2 轴上，最终获得弹道坐标系 $O(A)x_2y_2z_2$ 的姿态(如图 2-6(b)所示)。坐标系 $Ax'y_2z_2$ 与 $Ax_2y_2z_2$ 之间关系以矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = L(\theta) \begin{bmatrix} x' \\ y \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (2-17)$$

式中

$$L(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-18)$$

将式(2-15)代入式(2-17)，可得

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = L(\theta) L(\psi_v) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2-19)$$

令

$$L(\theta, \psi_v) = L(\theta) L(\psi_v) \quad (2-20)$$

则

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = L(\theta, \psi_v) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

式中

$$L(\theta, \psi_v) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi_v & 0 & -\sin\psi_v \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi_v & 0 & \cos\psi_v \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi_v & \sin\theta & -\cos\theta\sin\psi_v \\ -\sin\theta\cos\psi_v & \cos\theta & \sin\theta\sin\psi_v \\ \sin\psi_v & 0 & \cos\psi_v \end{bmatrix} \quad (2-22)$$

同样, 由关系式(2-21)、(2-22)可列出地面坐标系与弹道坐标系之间的方向余弦表(见表 2-2)。

表 2-2 地面坐标系与弹道坐标系之间的方向余弦表

	Ax	Ay	Az
Ox_2	$\cos\theta\cos\psi_v$	$\sin\theta$	$-\cos\theta\sin\psi_v$
Oy_2	$-\sin\theta\cos\psi_v$	$\cos\theta$	$\sin\theta\sin\psi_v$
Oz_2	$\sin\psi_v$	0	$\cos\psi_v$

3. 速度坐标系与弹体坐标系之间的关系及其转换

根据速度坐标系和弹体坐标系的定义, 其中 Oy_3 轴与 Oy_1 轴均在导弹纵向对称面内, 两个坐标系之间的关系通常由两个角度来确定, 分别为攻角 α 和侧滑角 β 。因此, 速度坐标系与弹体坐标系之间的关系及其转换矩阵可以通过两次旋转求得。以速度坐标系为基准, 首先以角速度 $\dot{\beta}$ 绕 Oy_3 轴旋转 β 角, 然后, 以角速度 $\dot{\alpha}$ 绕 Oz_1 轴旋转 α 角, 最终获得弹体坐标系的姿态(如图 2-7)。速度坐标系 $Ox_3y_3z_3$ 与弹体坐标系 $Ox_1y_1z_1$ 之间的关系以矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = L(\alpha, \beta) \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad (2-23)$$

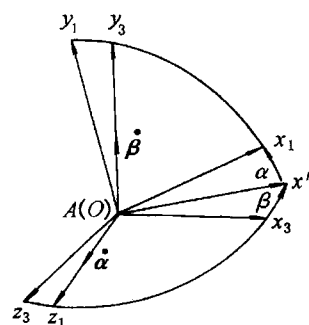


图 2-7 速度坐标系与弹体坐标系间的关系

$$L(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha & -\cos\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha & \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \quad (2-24)$$

表 2-3 速度坐标系与弹体坐标系之间的方向余弦表

	Ox_3	Oy_3	Oz_3
Ox_1	$\cos\alpha\cos\beta$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha\sin\beta$
Oy_1	$-\sin\alpha\cos\beta$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha\sin\beta$
Oz_1	$\sin\beta$	0	$\cos\beta$

4. 弹道坐标系与速度坐标系之间的关系及其转换

由弹道坐标系和速度坐标系的定义可知: Ox_2 轴和 Ox_3 轴均与导弹的速度矢量 V 重合, 所以, 这两个坐标系之间的关系一般用一个角度即可确定(见图 2-8)。

速度倾斜角 γ_v : 位于导弹纵向对称平面内的 Oy_3 轴与包含速度矢量 V 的铅垂面 Ox_2y_2 之

间的夹角。从弹尾部向前看,若纵向对称面向右倾斜,则 γ_v 角为正;反之为负。

弹道坐标系与速度坐标系之间的关系及其坐标系转换矩阵通过一次旋转求得,即以角速度 $\dot{\gamma}_v$ 绕 Ox_2 轴旋转过 γ_v 角,获得速度坐标系 $Ox_3y_3z_3$ 的姿态。弹道坐标系与速度坐标系之间的关系写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = L(\gamma_v) \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (2-25)$$

式中
$$L(\gamma_v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma_v & \sin\gamma_v \\ 0 & -\sin\gamma_v & \cos\gamma_v \end{bmatrix} \quad (2-26)$$

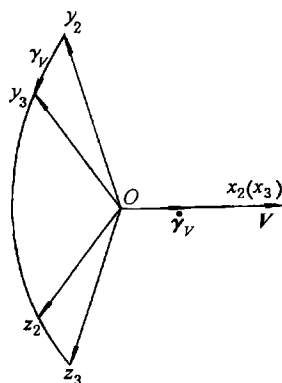


图 2-8 弹道坐标系与速度坐标系之间的关系

表 2-4 弹道坐标系与速度坐标系之间的方向余弦表

	Ox_2	Oy_2	Oz_2
Ox_3	1	0	0
Oy_3	0	$\cos\gamma_v$	$\sin\gamma_v$
Oz_3	0	$-\sin\gamma_v$	$\cos\gamma_v$

§ 2-3 导弹运动方程组

导弹运动方程组是描述导弹的力、力矩与导弹运动参数(如加速度、速度、位置、姿态等)之间关系的方程组,它是由动力学方程、运动学方程、质量变化方程、几何关系方程和控制关系方程等组成。

一、动力学方程

导弹在空间的运动一般看成可控制的变质量系统具有 6 个自由度的运动。根据前述“固化原理”,把变质量系的导弹当作常质量系来看待,并建立了导弹动力学基本方程(2-3)、(2-4),为研究导弹运动特性方便起见,通常将这两个矢量方程分别投影到相应的坐标系上,写成导弹质心运动的 3 个动力学标量方程和导弹绕质心转动的 3 个动力学标量方程。

1. 导弹质心运动的动力学方程

工程实践表明:对研究导弹质心运动来说,把矢量方程(2-3)写成在弹道坐标系上的标量形式,方程最为简单,又便于分析导弹运动特性。把地面坐标系视为惯性坐标系,能保证所需要的计算准确度。弹道坐标系是动坐标系,它相对地面坐标系既有位移运动,又有转动运动,位移速度为 V ,转动角速度用 Ω 表示。

建立在动坐标系中的动力学方程,引用矢量的绝对导数和相对导数之间的关系:在惯性坐标系中某一矢量对时间的导数(绝对导数)与同一矢量在动坐标系中对时间的导数(相对导数)之差,等于这矢量本身与动坐标系的转动角速度的矢量乘积,即

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\delta\mathbf{V}}{\delta t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}$$

式中 $\frac{d\mathbf{V}}{dt}$ ——在惯性坐标系(地面坐标系)中矢量 $\mathbf{V}$ 的绝对导数;

$\frac{\delta\mathbf{V}}{\delta t}$ ——在动坐标系(弹道坐标系)中矢量 $\mathbf{V}$ 的相对导数。

于是, 式(2-3)可改写为

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = m \left(\frac{\delta\mathbf{V}}{\delta t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} \right) = \mathbf{F} + \mathbf{P} \quad (2-27)$$

设 i_2 、 j_2 、 k_2 分别为沿弹道坐标系 $Ox_2y_2z_2$ 各轴的单位矢量; Ω_{x_2} 、 Ω_{y_2} 、 Ω_{z_2} 分别为弹道坐标系相对地面坐标系的转动角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 在 $Ox_2y_2z_2$ 各轴上的分量; V_{x_2} 、 V_{y_2} 、 V_{z_2} 分别为导弹质心速度矢量 $\mathbf{V}$ 在 $Ox_2y_2z_2$ 各轴上的分量。

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= V_{x_2} i_2 + V_{y_2} j_2 + V_{z_2} k_2 \\ \boldsymbol{\Omega} &= \Omega_{x_2} i_2 + \Omega_{y_2} j_2 + \Omega_{z_2} k_2 \\ \frac{\delta\mathbf{V}}{\delta t} &= \frac{dV_{x_2}}{dt} i_2 + \frac{dV_{y_2}}{dt} j_2 + \frac{dV_{z_2}}{dt} k_2 \end{aligned} \quad (2-28)$$

根据弹道坐标系定义可知

$$\begin{bmatrix} V_{x_2} \\ V_{y_2} \\ V_{z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

于是

$$\frac{\delta\mathbf{V}}{\delta t} = \frac{dV}{dt} i_2 \quad (2-29)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} &= \begin{vmatrix} i_2 & j_2 & k_2 \\ \Omega_{x_2} & \Omega_{y_2} & \Omega_{z_2} \\ V_{x_2} & V_{y_2} & V_{z_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i_2 & j_2 & k_2 \\ \Omega_{x_2} & \Omega_{y_2} & \Omega_{z_2} \\ V & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= V \Omega_{z_2} j_2 - V \Omega_{y_2} k_2 \end{aligned} \quad (2-30)$$

根据弹道坐标系与地面坐标系之间的转换中可得

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}_V + \dot{\theta}$$

式中 $\dot{\psi}_V$ 、 $\dot{\theta}$ 分别在地面坐标系 Ay 轴上和弹道坐标系 Oz_2 轴上, 于是利用式(2-21)、(2-22)得到

$$\begin{bmatrix} \Omega_{x_2} \\ \Omega_{y_2} \\ \Omega_{z_2} \end{bmatrix} = L(\theta, \psi_V) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi}_V \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi}_V \sin \theta \\ \dot{\psi}_V \cos \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (2-31)$$

将式(2-31)代入式(2-30)中, 可得

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = V \dot{\theta} j_2 - V \dot{\psi}_V \cos \theta k_2 \quad (2-32)$$

式(2-29)、(2-32)代入式(2-27)中, 展开后得到

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= F_{x_2} + P_{x_2} \\ mV \frac{d\theta}{dt} &= F_{y_2} + P_{y_2} \\ -mV \cos \theta \frac{d\psi_v}{dt} &= F_{z_2} + P_{z_2} \end{aligned} \right\} \quad (2-33)$$

式中 $F_{x_2}, F_{y_2}, F_{z_2}$ ——除推力外导弹所有外力(总空气动力 R 、重力 G 等)分别在 $Ox_2y_2z_2$ 各轴上分量的代数和;

$P_{x_2}, P_{y_2}, P_{z_2}$ ——分别为推力 P 在 $Ox_2y_2z_2$ 各轴上分量。

下面分别列出总空气动力 R 、重力 G 和推力 P 在弹道坐标系上投影的表达式。

作用在导弹上的总空气动力 R 沿速度坐标系可分解为阻力 X 、升力 Y 和侧向力 Z , 即

$$\begin{bmatrix} R_{x_3} \\ R_{y_3} \\ R_{z_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

根据速度坐标系和弹道坐标系之间的转换关系, 利用式(2-25)、(2-26)得到

$$\begin{bmatrix} R_{x_2} \\ R_{y_2} \\ R_{z_2} \end{bmatrix} = L^T(\gamma_v) \begin{bmatrix} R_{x_3} \\ R_{y_3} \\ R_{z_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -X \\ Y \cos \gamma_v - Z \sin \gamma_v \\ Y \sin \gamma_v + Z \cos \gamma_v \end{bmatrix} \quad (2-34)$$

对于近程战术导弹, 重力 G 可认为是沿地面坐标系 Ay 轴的负方向, 故其在地面坐标系上可表示为

$$\begin{bmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix}$$

将其投影到弹道坐标系 $Ox_2y_2z_2$ 上, 可利用式(2-21)、(2-22)得到

$$\begin{bmatrix} G_{x_2} \\ G_{y_2} \\ G_{z_2} \end{bmatrix} = L(\theta, \psi_v) \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mg \sin \theta \\ -mg \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-35)$$

如果发动机的推力 P 与弹体纵轴 Ox_1 重合, 这时

$$\begin{bmatrix} P_{x_1} \\ P_{y_1} \\ P_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

将其投影在弹道坐标系 $Ox_2y_2z_2$ 上, 可利用式(2-23)、(2-24)、(2-25)、(2-26), 得到

$$\begin{bmatrix} P_{x_2} \\ P_{y_2} \\ P_{z_2} \end{bmatrix} = L^T(\gamma_v) L^T(\alpha, \beta) \begin{bmatrix} P_{x_1} \\ P_{y_1} \\ P_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \cos \alpha \cos \beta \\ P(\sin \alpha \cos \gamma_v + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_v) \\ P(\sin \alpha \sin \gamma_v - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma_v) \end{bmatrix} \quad (2-36)$$

将式(2-34)、(2-35)、(2-36)代入式(2-33)中, 即得到导弹质心运动的动力学方程的标量形式为

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= P \cos \alpha \cos \beta - X - mg \sin \theta \\ mV \frac{d\theta}{dt} &= P (\sin \alpha \cos \gamma_v + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_v) + Y \cos \gamma_v - Z \sin \gamma_v - mg \cos \theta \\ -mV \cos \theta \frac{d\psi_v}{dt} &= P (\sin \alpha \sin \gamma_v - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma_v) + Y \sin \gamma_v + Z \cos \gamma_v \end{aligned} \right\} \quad (2-37)$$

式中 $\frac{dV}{dt}$ ——导弹质心加速度沿弹道切向(Ox_2 轴)的投影,称切向加速度;

$V \frac{d\theta}{dt}$ ——导弹质心加速度在铅垂面(Ox_2y_2)内沿弹道法线(Oy_2 轴)上投影,称法向加速度;

$-mV \cos \theta \frac{d\psi_v}{dt}$ ——导弹质心加速度的水平分量(即沿 Oz_2 轴),也称法向加速度。式中左端“-”号表明:向心力为正,所对应 $\dot{\psi}_v$ 为负;反之亦是。它是由角度 ψ_v 的正负号定义所决定的。

2. 导弹绕质心转动的动力学方程

导弹绕质心转动的动力学矢量方程(2-4)写成在弹体坐标系上的标量形式最为简单。

弹体坐标系是动坐标系,设弹体坐标系相对地面坐标系的转动角速度用 ω 表示。

同理,在动坐标系(弹体坐标系)上建立导弹绕质心转动的动力学方程,式(2-4)可写成

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{\delta \mathbf{H}}{\delta t} + \omega \times \mathbf{H} = \mathbf{M} + \mathbf{M}_p \quad (2-38)$$

设 i_1 、 j_1 、 k_1 分别为沿弹体坐标系 $Ox_1y_1z_1$ 各轴的单位矢量; ω_{x_1} 、 ω_{y_1} 、 ω_{z_1} 为弹体坐标系相对地面坐标系的转动角速度 ω 沿弹体坐标系各轴上分量;动量矩 $\mathbf{H}$ 在弹体坐标系各轴上分量为 H_{x_1} 、 H_{y_1} 、 H_{z_1} 。

$$\frac{\delta \mathbf{H}}{\delta t} = \frac{dH_{x_1}}{dt} i_1 + \frac{dH_{y_1}}{dt} j_1 + \frac{dH_{z_1}}{dt} k_1 \quad (2-39)$$

动量矩 $\mathbf{H}$ 可表示为

$$\mathbf{H} = \mathbf{J} \cdot \omega$$

式中 $\mathbf{J}$ ——惯性张量。

动量矩 $\mathbf{H}$ 在弹体坐标系各轴上分量可表示为

$$\begin{bmatrix} H_{x_1} \\ H_{y_1} \\ H_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{x_1x_1} & -J_{x_1y_1} & -J_{x_1z_1} \\ -J_{y_1x_1} & J_{y_1y_1} & -J_{y_1z_1} \\ -J_{z_1x_1} & -J_{z_1y_1} & J_{z_1z_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{x_1} \\ \omega_{y_1} \\ \omega_{z_1} \end{bmatrix} \quad (2-40)$$

式中 $J_{x_1x_1}$ 、 $J_{y_1y_1}$ 、 $J_{z_1z_1}$ ——导弹对弹体坐标系各轴的转动惯量;

$J_{x_1y_1}$ 、 $J_{x_1z_1}$ 、……、 $J_{z_1y_1}$ ——导弹对弹体坐标系各轴的惯量积。

对于战术导弹来说,一般多为轴对称外形,这时可认为弹体坐标系就是它的惯性主轴系。在此条件下,导弹对弹体坐标系各轴的惯量积为零。为书写方便,上述转动惯量分别以 J_{x_1} 、 J_{y_1} 、 J_{z_1} 表示,则式(2-40)可简化为

$$\begin{bmatrix} H_{x_1} \\ H_{y_1} \\ H_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & J_{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & J_{z_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{x_1} \\ \omega_{y_1} \\ \omega_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{x_1} \omega_{x_1} \\ J_{y_1} \omega_{y_1} \\ J_{z_1} \omega_{z_1} \end{bmatrix} \quad (2-41)$$

式(2-41)代入式(2-39)中,可得

$$\frac{\delta \mathbf{H}}{\delta t} = J_{x_1} \frac{d\omega_{x_1}}{dt} \mathbf{i}_1 + J_{y_1} \frac{d\omega_{y_1}}{dt} \mathbf{j}_1 + J_{z_1} \frac{d\omega_{z_1}}{dt} \mathbf{k}_1 \quad (2-42)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ \omega_{x_1} & \omega_{y_1} & \omega_{z_1} \\ H_{x_1} & H_{y_1} & H_{z_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ \omega_{x_1} & \omega_{y_1} & \omega_{z_1} \\ J_{x_1}\omega_{x_1} & J_{y_1}\omega_{y_1} & J_{z_1}\omega_{z_1} \end{vmatrix} \\ &= (J_{z_1} - J_{y_1})\omega_{x_1}\omega_{y_1}\mathbf{i}_1 + (J_{x_1} - J_{z_1})\omega_{x_1}\omega_{z_1}\mathbf{j}_1 \\ &\quad + (J_{y_1} - J_{x_1})\omega_{y_1}\omega_{z_1}\mathbf{k}_1 \end{aligned} \quad (2-43)$$

式(2-42)、(2-43)代入式(2-38)中,于是导弹绕质心转动的动力学标量方程为

$$\left. \begin{aligned} J_{x_1} \frac{d\omega_{x_1}}{dt} + (J_{z_1} - J_{y_1})\omega_{x_1}\omega_{y_1} &= M_{x_1} \\ J_{y_1} \frac{d\omega_{y_1}}{dt} + (J_{x_1} - J_{z_1})\omega_{x_1}\omega_{z_1} &= M_{y_1} \\ J_{z_1} \frac{d\omega_{z_1}}{dt} + (J_{y_1} - J_{x_1})\omega_{y_1}\omega_{x_1} &= M_{z_1} \end{aligned} \right\} \quad (2-44)$$

式中 $J_{x_1}, J_{y_1}, J_{z_1}$ ——分别为导弹对于弹体坐标系(即惯性主轴系)各轴的转动惯量,它们随着燃料燃烧产物的喷出而不断变化;

$\omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}$ ——弹体坐标系相对地面坐标系的转动角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 在弹体坐标系各轴上的分量;

$\frac{d\omega_{x_1}}{dt}, \frac{d\omega_{y_1}}{dt}, \frac{d\omega_{z_1}}{dt}$ ——分别为弹体转动角加速度矢量在弹体坐标系各轴上的分量;

$M_{x_1}, M_{y_1}, M_{z_1}$ ——分别为作用在导弹上的所有外力(含推力)对质心的力矩在弹体坐标系各轴上的分量。

后面为书写方便,省略式(2-44)中脚注“1”。

二、运动学方程

导弹运动方程组还包括描述各运动参数之间的关系的运动学方程。它将分别建立描述导弹质心相对地面坐标系运动的运动学方程和导弹弹体相对地面坐标系姿态变化的运动学方程。

1. 导弹质心运动的运动学方程

要确定导弹质心相对于地面坐标系的运动轨迹(弹道),需要建立导弹质心相对于地面坐标系运动的运动学方程。计算空气动力、推力时,需要知道导弹在任一瞬时所处的高度,通过弹道计算确定相应瞬时导弹所处的位置。因此,要建立导弹质心相对于地面坐标系 $Axyz$ 的位置方程。

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \quad (2-45)$$

根据弹道坐标系的定义可知，导弹质心的速度矢量与弹道坐标系的 Ox_2 轴重合，即

$$\begin{bmatrix} V_{x_2} \\ V_{y_2} \\ V_{z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-46)$$

利用地面坐标系与弹道坐标系的转换关系可得

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = L^T(\theta, \psi_v) \begin{bmatrix} V_{x_2} \\ V_{y_2} \\ V_{z_2} \end{bmatrix} \quad (2-47)$$

将式(2-46)、(2-22)代入式(2-47)中，并将其结果代入式(2-45)，即得到导弹质心运动的运动学方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= V \cos \theta \cos \psi_v \\ \frac{dy}{dt} &= V \sin \theta \\ \frac{dz}{dt} &= -V \cos \theta \sin \psi_v \end{aligned} \right\} \quad (2-48)$$

2. 导弹绕质心转动的运动学方程

要确定导弹在空间的姿态，就需要建立描述导弹弹体相对地面坐标系姿态变化的运动学方程，亦即建立姿态角 ϑ 、 ψ 、 γ 变化率与导弹相对地面坐标系转动角速度分量 ω_{x_1} 、 ω_{y_1} 、 ω_{z_1} 之间的关系式。

我们知道，根据地面坐标系与弹体坐标系的转换关系可得

$$\omega = \dot{\psi} + \dot{\vartheta} + \dot{\gamma}$$

由于 $\dot{\psi}$ 、 $\dot{\gamma}$ 分别与地面坐标系 Ay 轴和弹体坐标系的 Ox_1 轴重合，而 $\dot{\vartheta}$ 与 Oz' 轴重合（见图 2-4），故有

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \omega_{x_1} \\ \omega_{y_1} \\ \omega_{z_1} \end{bmatrix} &= L(\gamma, \vartheta, \psi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix} + L(\gamma) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\psi} \sin \vartheta + \dot{\gamma} \\ \dot{\psi} \cos \vartheta \cos \gamma + \dot{\vartheta} \sin \gamma \\ -\dot{\psi} \cos \vartheta \sin \gamma + \dot{\vartheta} \cos \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin \vartheta & 1 \\ \sin \gamma & \cos \vartheta \cos \gamma & 0 \\ \cos \gamma & -\cos \vartheta \sin \gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

经变换后得

$$\begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \\ 0 & \frac{\cos \gamma}{\cos \vartheta} & -\frac{\sin \gamma}{\cos \vartheta} \\ 1 & -\tan \vartheta \cos \gamma & \tan \vartheta \sin \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{x_1} \\ \omega_{y_1} \\ \omega_{z_1} \end{bmatrix} \quad (2-49)$$

上式展开后得到导弹绕质心转动的运动学方程：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_{y_1} \sin\gamma + \omega_{z_1} \cos\gamma \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{1}{\cos\vartheta} (\omega_{y_1} \cos\gamma - \omega_{z_1} \sin\gamma) \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_{x_1} - \tan\vartheta (\omega_{y_1} \cos\gamma - \omega_{z_1} \sin\gamma) \end{aligned} \right\} \quad (2-50)$$

同样，为书写方便，省略式(2-50)中的脚注“1”。

三、质量变化方程

导弹在飞行过程中，由于发动机不断地消耗燃料，导弹质量不断减小。所以，在建立导弹运动方程组中，还需要补充描述导弹质量变化的方程，即

$$\frac{dm}{dt} = -m_c \quad (2-51)$$

式中 $\frac{dm}{dt}$ ——导弹质量变化率，即导弹在单位时间内喷射出来的质量，因为是质量的减小，故取负值。

m_c ——导弹单位时间内质量消耗量，它应该是单位时间内燃料组元质量消耗量和其他物质质量消耗量之和，但主要是燃料的消耗，故 m_c 又称为燃料质量秒流量。通常认为 m_c 是已知的时间函数，它可能是常量，也可能是变量。对于火箭发动机来说， m_c 的大小主要由发动机性能确定。

方程(2-51)可独立于导弹运动方程组中其他方程之外单独求解，即

$$m(t) = m_0 - \int_0^t m_c(t) dt \quad (2-52)$$

式中 m_0 ——导弹的初始质量。

四、几何关系方程

前面定义的四组常用坐标系，它们之间的关系由 8 个角度(即 $\vartheta, \psi, \gamma, \theta, \psi_v, \alpha, \beta, \gamma_v$)联系起来(如图 2-9 所示)。因为某单位矢量以不同途径投影到任意坐标系的同一轴上，其结果应是相等的，根据这一原理可知这 8 个角度并不是完全独立的。例如，导弹的速度矢量 V 相对于地面坐标系 $Axyz$ 的方位，可以通过速度坐标系相对弹体坐标系的角参数 α, β 以及弹体坐标系相对地面坐标系的角参数 ϑ, ψ, γ 来确定。 $\vartheta, \psi, \gamma, \alpha, \beta$ 确定之后，决定速度矢量 V 的方位的角参数 θ, ψ_v 及 γ_v 也就确定了。这就说明，8 个角参数中只有 5 个是独立的，而其余 3 个角参数则分别由这 5 个独立的角参数来表示。因此，8 个角度之间存在着 3 个独立的几何关系式。根据不同的要求，可把这些几何关系表达成一些不同的形式，因此，几何关系方程不是惟一的形式。由于 θ, ψ_v 和 ϑ, ψ, γ 角参数的变化规律可分别用式(2-37)和式(2-50)来描述，就可用 $\theta, \psi_v, \vartheta, \psi$ 和 γ 等角参数来求出 α, β 和 γ_v ，分别建立相应的

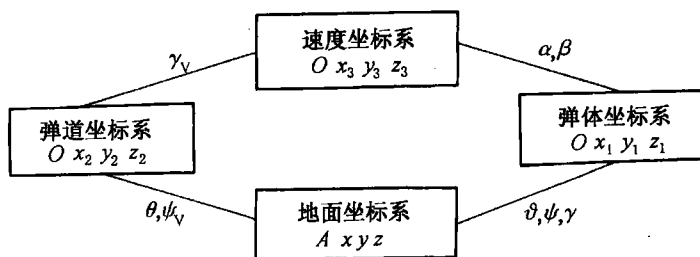


图 2-9 四个坐标系之间的八个角度

3 个几何关系方程。

建立几何关系方程,可用球面三角、四元素法或方向余弦等数学方法。下面介绍利用有关矢量运算的知识和上述方向余弦表来建立 3 个几何关系式。

我们知道,过参考系原点的任意两个单位矢量夹角 φ 的方向余弦(图 2-10),等于它们各自与参考系对应轴夹角的方向余弦乘积之和。用公式表示有

$$\cos \varphi = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \quad (2-53)$$

设 i 、 j 、 k 分别为参考系 $Axyz$ 各对应轴的单位矢量,过参考系原点 A 的两个单位矢量夹角的方向余弦记作 $\langle I_1^0 \cdot I_2^0 \rangle$,则式(2-53)又可写成

$$\langle I_1^0 \cdot I_2^0 \rangle = \langle I_1^0 \cdot i \rangle \langle I_2^0 \cdot i \rangle + \langle I_1^0 \cdot j \rangle \langle I_2^0 \cdot j \rangle + \langle I_1^0 \cdot k \rangle \langle I_2^0 \cdot k \rangle \quad (2-54)$$

若把 Ox_2 轴和 Oz_1 轴的单位矢量分别表示为 I_1^0 和 I_2^0 ,选地面坐标系 $Axyz$ 为参考系,欲求 $\langle I_1^0 \cdot I_2^0 \rangle$,先将坐标系 $Ox_2y_2z_2$ 和 $Ox_1y_1z_1$ 平移至其原点 O 与参考系的原点 A 重合,考虑到 Ox_2 轴与 Ox_3 轴重合,利用方向余弦表(表 2-1~表 2-3),求得式(2-54)的相应单位矢量的夹角余弦项,经整理得

$$\sin \beta = \cos \theta [\cos \gamma \sin(\psi - \psi_v) + \sin \vartheta \sin \gamma \cos(\psi - \psi_v)] - \sin \theta \cos \vartheta \sin \gamma \quad (2-55)$$

若把 Oy_1 轴和 Ox_2 轴的单位矢量分别表示为 I_1^0 、 I_2^0 ,仍选地面坐标系为参考系,同样把有关坐标系的原点重合在一起,利用式(2-54)和方向余弦表(表 2-1~表 2-3),即得

$$\sin \alpha = \{ \cos \theta [\sin \vartheta \cos \gamma \cos(\psi - \psi_v) - \sin \gamma \sin(\psi - \psi_v)] - \sin \theta \cos \vartheta \cos \gamma \} / \cos \beta \quad (2-56)$$

同理,选取弹体坐标系 $Ox_1y_1z_1$ 为参考系,而把速度坐标系 Oz_3 轴的单位矢量和地面坐标系 Ay 轴的单位矢量分别视为 I_1^0 、 I_2^0 。利用式(2-54)和方向余弦表(表 2-1、表 2-3)以及通过已建立的坐标转换矩阵求出速度坐标系与地面坐标系之间的方向余弦表,即得

$$\sin \gamma_v = (\cos \alpha \sin \beta \sin \vartheta - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \cos \vartheta + \cos \beta \sin \gamma \cos \vartheta) / \cos \theta \quad (2-57)$$

式(2-55)~(2-57)即为 3 个几何关系方程。

有时几何关系方程显得非常简单,例如,当导弹作无侧滑($\beta=0$)、无倾斜($\gamma=0$)飞行时,有

$$\theta = \vartheta - \alpha$$

又如,当导弹作无侧滑、零攻角情况下飞行时,有

$$\gamma = \gamma_v$$

再如,当导弹在水平面内作无倾斜机动飞行时,且攻角很小,则

$$\psi_v = \psi - \beta$$

至此,已建立了描述导弹质心运动的动力学方程(2-37)、绕质心转动的动力学方程

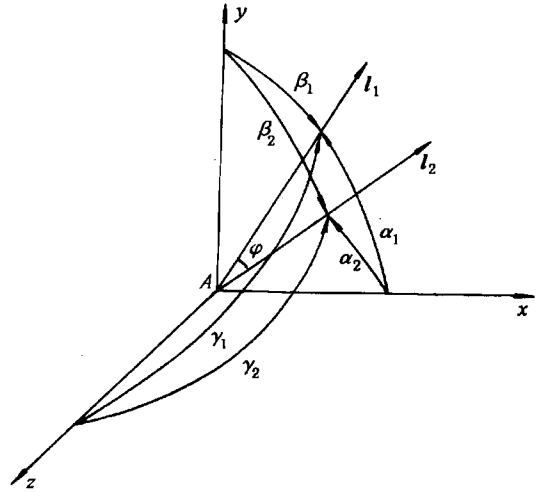


图 2-10 过参考系原点两单位矢量之夹角

(2-44)、导弹质心运动的运动学方程(2-48)、绕质心转动的运动学方程(2-50)、质量变化方程(2-51)和几何关系方程(2-55)~(2-57),以上16个方程,组成无控弹运动方程组。如果不考虑外界干扰,这16个方程中包括: $V(t)$ 、 $\theta(t)$ 、 $\phi_v(t)$ 、 $\omega_x(t)$ 、 $\omega_y(t)$ 、 $\omega_z(t)$ 、 $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $z(t)$ 、 $\vartheta(t)$ 、 $\psi(t)$ 、 $\gamma(t)$ 、 $m(t)$ 、 $\alpha(t)$ 、 $\beta(t)$ 、 $\gamma_v(t)$ 等16个未知数,方程组是封闭的。当给定初始条件,对这些方程进行数值积分,可获得无控弹道及相应运动参数的变化规律。但对于可控飞行来说,仅知道初始条件,还不能获得惟一确定解,因为在相同初始条件下,舵面的偏转规律不同,气动力和气动力矩就不同,相应的飞行弹道和相应的运动参数也不同。为确定惟一解,必须对导弹加上一定约束,即需要建立控制关系方程。

五、控制关系方程

1. 控制飞行的原理

为了保证命中目标而约束导弹飞行的方向和速度大小,就称为控制飞行。导弹是在自动控制系统作用下,使其飞行遵循一定的约束关系。要按需要改变导弹飞行方向和速度大小,它又依赖于改变作用于弹上外力合力的大小和方向。作用在导弹上的外力主要有空气动力 R 、推力 P 和重力 G ,其中重力始终指向地心,其大小也不能随意改变。因此,控制导弹飞行只能依靠改变 R 和 P 的合力 N 的大小和方向, N 称为控制力。即

$$N = P + R$$

控制力 N 沿速度方向和垂直于速度方向可分解为两个分量 N_t 和 N_n (如图2-11所示),分别称为切向控制力和法向控制力。从力学的观点,改变切向控制力以改变速度大小,改变法向控制力以改变飞行方向。

$$\text{切向控制力} \quad N_t = P_t + R_t$$

$$\text{法向控制力} \quad N_n = P_n + R_n$$

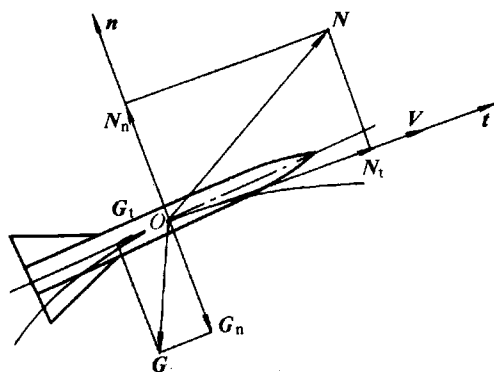


图 2-11 导弹切向力和法向力

式中

$$R_n = Y + Z$$

下面简述导弹是如何改变法向控制力的。改变法向控制力,主要是依靠改变空气动力的法向力 R_n ,它是通过改变导弹在空中姿态,从而改变导弹弹体相对气流的方位来获得的。而改变导弹的姿态是靠偏转导弹上的操纵机构(如空气舵、气动扰流片、摆动发动机等),在操纵面上相应产生操纵力,它对导弹质心产生操纵力矩,在此力矩作用下,导弹弹体就会绕其质心转动,由此改变导弹在空中的姿态。同时,固定在弹体上的空气动力面(如弹翼、尾翼等)和弹身就会获

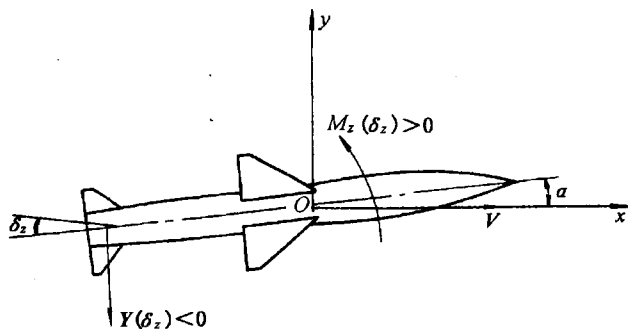


图 2-12 用空气动力来控制飞行的示意图

得新的攻角和侧滑角,从而改变了作用在导弹上的空气动力(如图 2-12 所示)。

根据空气舵的作用不同,又可分为升降舵、方向舵和副翼。无论对于轴对称导弹或面对称导弹,升降舵主要是用于操纵导弹的俯仰姿态;方向舵主要是用于操纵导弹的偏航姿态;副翼主要是用于操纵导弹的倾斜姿态。

对于轴对称型导弹,若舵面相对弹身的安装呈“+”型,此时水平位置的一对舵面就是升降舵,垂直位置的一对舵面就是方向舵(如图 2-13 所示)。若舵面相对弹身的安装位置呈“×”型(如图 2-14 所示),此时两对舵面不能各自独立地起到升降舵和方向舵的作用。当两对舵面同时向下(或向上)偏转,并且偏转的角度也一样时,两对舵面就起到升降舵的作用(如图 2-14(a)所示);当一对舵面与另一对舵面上下偏转的方向不同,但偏转角一样时,两对舵面则起着方向舵的作用(如图 2-14(b)所示);若两对舵面偏转角不同,而上下偏转的方向相同或不同,这样就既可以起到升降舵的作用,又可起到方向舵的作用(如图 2-14(c)所示)。

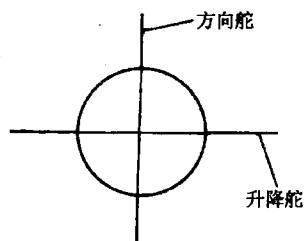


图 2-13 “+”型舵面

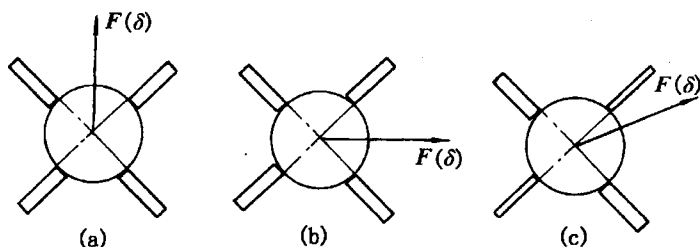


图 2-14 “×”型舵面

副翼是一对左右差动的舵面,即一个舵面与另一个舵面上下偏转的方向不同(如图 2-15 所示)。副翼可以是一对独立的舵面,也可以是采用一组舵面,使其既起到升降舵(或方向舵)的作用,又起到副翼的作用。即通过操纵机构的设计,使这组舵面不仅可以同向偏转,而且还可以差动。一对舵面其同向偏转部分相当起升降舵(或方向舵)的作用,差动部分就起到副翼的作用。

在利用气动力操纵导弹时,除可以使用偏转舵面外,还可以使用伸缩操纵面或气动扰流片等。

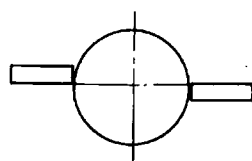


图 2-15 副翼的偏转

用反作用力(即推力)来操纵导弹也是一种可用的形式。可以用偏转主发动机的燃气流或者利用专用的可偏转的小型发动机来实现。小发动机安装在离导弹质心一定距离的地方,专门用来产生操纵力矩,在此力矩作用下,导弹将绕质心转动,同样改变导弹在空间的姿态。

利用破坏主发动机燃气流对称性的方法,也可以获得使导弹绕其质心转动的操纵力矩,也同样能改变导弹在空间的姿态。

对于轴对称型的导弹,它装有两对弹翼,并沿周向均匀分布,通过改变升降舵的偏转角 δ_z 来改变攻角 α 的大小,从而改变升力 Y 的大小和方向,操纵导弹的俯仰运动。而改变方向舵的偏转角 δ_y ,则可改变侧滑角 β ,使侧向力 Z 的大小和方向发生变化,操纵导弹的偏航运动。若升降舵和方向舵同时偏转,使 δ_z 、 δ_y 各自获得任一角度,那么 α 、 β 相应改变,得到任

一方向和大小的空气动力,同时操纵俯仰和偏航运动。另外,当 α 、 β 改变时,阻力 X 、推力的法向分量 P_n 和切向分量 P_t 也随之改变。

对于面对称型的导弹,外形似飞机,只有一对水平弹翼,其产生升力比侧力大得多,操纵纵俯仰运动仍是通过改变升降舵的偏转角 δ_z 而改变升力的大小;操纵偏航运动,则通常是差动副翼,使弹体倾斜,保持在纵向对称面内的升力也相应转到某一方向,其水平分力使导弹作偏航运动(如图2-16所示)。

综上所述,操纵导弹的俯仰、偏航和倾斜运动,就是操纵导弹的3个自由度来改变法向力的大小和方向,以达到改变导弹飞行方向的目的。为了使控制系统不至于复杂,又要形成任一方向的法向力,只要操纵导弹绕某一轴或至多绕两根轴转动,而对第三轴加以稳定。例如,对于轴对称型导弹,只需操纵导弹绕 Oz_1 轴和 Oy_1 轴转动,就可实现操纵纵俯仰和偏航运动,而对 Ox_1 轴保持稳定,以保证俯仰和偏航运动的操纵不致发生混乱;而对于面对称型导弹,一般只需操纵导弹绕 Oz_1 轴和 Ox_1 轴转动,实现操纵纵俯仰和倾斜运动,改变攻角 α 和速度倾斜角 γ_v 来产生所需的法向力,使导弹作偏航运动,而对 Oy_1 轴保持稳定。

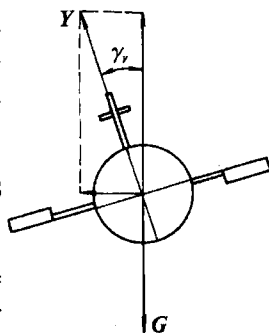


图2-16 面对称导弹的偏航运动

此外,改变速度大小,通常采用推力控制,即控制发动机节气阀偏角 δ_p 以调节发动机推力的大小来实现。

由此可见,对于导弹应具有4个操纵机构:升降舵、方向舵、副翼的操纵机构和发动机推力的调节装置。

2. 控制关系方程

实现导弹的控制飞行,导弹应具有4个操纵机构,相应必须在导弹上加以4个约束,即有4个控制关系方程。

要改变导弹的运动参数,必须通过控制系统使舵面偏转,对质心产生操纵力矩,引起弹体转动,使 α (或 β 、 γ_v)变化,从而改变 N_n 的大小和方向,导弹运动参数产生相应变化,这就是控制的主要过程(如图2-12所示)。但从控制系统输入信号,到运动参数发生相应变化,是一个复杂过程。在飞行过程的每一瞬时,当实际运动参数与按导引关系要求的运动参数不相符时,就产生控制信号。因此,控制系统操纵舵面决定于每一瞬时导弹的运动参数。导弹制导系统的工作原理是按“误差工作”。例如,导弹飞行中的俯仰角 ϑ 与要求的俯仰角 ϑ_* 不相等时,即存在偏差角 $\Delta\vartheta = \vartheta - \vartheta_*$,控制系统将根据 $\Delta\vartheta$ 的大小使升降舵偏转相应的角度 δ_z ,最简单的比例控制关系为

$$\delta_z = k_\vartheta(\vartheta - \vartheta_*) = k_\vartheta\Delta\vartheta$$

式中 k_ϑ 为控制系统决定的比例系数,称为放大系数。

导弹在飞行过程中,控制系统总是做出消除误差 $\Delta\vartheta$ 的回答反应,根据误差的大小,偏转相应的舵面来力图消除误差 $\Delta\vartheta$ 。实际上,误差始终不为零,只是制导系统工作越准确,误差就越小而已。

设 x_{*i} 为研究瞬时由导引关系要求的运动参数值, x_i 为同一瞬时运动参数的实际值, ϵ_i 为运动参数误差,则有

$$\epsilon_i = x_i - x_{*i} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

在一般情况下, $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ 总不可能等于零, 此时控制系统将偏转舵面和发动机调节装置, 以求消除误差。而舵面和发动机调节装置的偏转角大小及方向取决于误差 ϵ_i 的数值和正负。例如, 在最简单的情况下, 对轴对称型导弹, 有如下关系存在:

$$\delta_z = f_1(\epsilon_1), \quad \delta_y = f_2(\epsilon_2), \quad \delta_x = f_3(\gamma), \quad \delta_P = f_4(\epsilon_4) \quad (2-58)$$

对于面对称型导弹, 则有如下关系存在:

$$\delta_z = f_1(\epsilon_1), \quad \delta_x = f_2(\epsilon_2), \quad \delta_y = f_3(\beta), \quad \delta_P = f_4(\epsilon_4) \quad (2-59)$$

式(2-58)、式(2-59)表示每一个操纵机构仅负责控制某一方向上的运动参数, 这是一种简单的控制关系。但对一般情况而言, 可以写成下面通用的控制关系方程

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(\dots, \epsilon_i, \dots, \delta_i, \dots) &= 0 \\ \phi_2(\dots, \epsilon_i, \dots, \delta_i, \dots) &= 0 \\ \phi_3(\dots, \epsilon_i, \dots, \delta_i, \dots) &= 0 \\ \phi_4(\dots, \epsilon_i, \dots, \delta_i, \dots) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-60)$$

式(2-60)中可以包括舵面和发动机调节装置的偏转角、运动参数误差及其它运动参数。

式(2-60)可简写成如下形式:

$$\phi_1 = 0, \quad \phi_2 = 0, \quad \phi_3 = 0, \quad \phi_4 = 0 \quad (2-61)$$

$\phi_1=0, \phi_2=0$ 关系式仅用来表示控制飞行方向, 改变飞行方向是控制系统的主要任务, 因此称它们为基本(主要)控制关系方程。 $\phi_3=0$ 关系式用以表示对第三轴加以稳定, $\phi_4=0$ 关系式仅用来表示控制速度大小, 此两个关系式则称为附加(辅助)控制关系方程。

在设计导弹弹道时, 需要综合考虑包括控制系统加在导弹上的控制关系方程在内的导弹运动方程组, 问题比较复杂。在导弹初步设计时, 可作近似处理, 即假设控制系统是按“无误差工作”的理想控制系统, 运动参数能保持按导引关系要求的规律, 这样

$$\epsilon_i = x_i - x_{*i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

即有 4 个理想控制关系式

$$\epsilon_1 = 0, \quad \epsilon_2 = 0, \quad \epsilon_3 = 0, \quad \epsilon_4 = 0 \quad (2-62)$$

在某些情况下, 理想控制关系式有简单的表达形式。

例如, 轴对称型导弹保持等速直线飞行时, 有

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \theta - \theta_* = 0 \\ \epsilon_2 &= \psi_V - \psi_{V*} = 0 \\ \epsilon_3 &= \gamma = 0 \\ \epsilon_4 &= V - V_* = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-63)$$

又如, 面对称型导弹作正常盘旋飞行时, 有

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \theta = 0, \text{ 或 } \epsilon_1 = y - y_* = 0 \text{ (其中 } y_* \text{ 为常值)} \\ \epsilon_2 &= \gamma - \gamma_* = 0 \\ \epsilon_3 &= \beta = 0 \\ \epsilon_4 &= V - V_* = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-64)$$

式(2-63)、(2-64)中, $\theta_*, \psi_{V*}, \gamma_*, V_*, \dots$ 为要求的运动参数值; $\theta, \psi_V, \gamma, V \dots$ 为导弹飞行中实际的运动参数值。

六、导弹运动方程组

综合前面所得到的方程(2-37)、(2-44)、(2-48)、(2-50)、(2-51)、(2-55)、(2-56)、(2-57)和(2-61),即组成描述导弹的空间运动方程组

$$\begin{aligned}
 m \frac{dV}{dt} &= P \cos \alpha \cos \beta - X - mg \sin \theta \\
 mV \frac{d\theta}{dt} &= P(\sin \alpha \cos \gamma_v + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_v) + Y \cos \gamma_v - Z \sin \gamma_v - mg \cos \theta \\
 -mV \cos \theta \frac{d\psi_v}{dt} &= P(\sin \alpha \sin \gamma_v - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma_v) + Y \sin \gamma_v + Z \cos \gamma_v \\
 J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y) \omega_z \omega_y &= M_x \\
 J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z) \omega_x \omega_z &= M_y \\
 J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x) \omega_y \omega_x &= M_z \\
 \frac{dx}{dt} &= V \cos \theta \cos \psi_v \\
 \frac{dy}{dt} &= V \sin \theta \\
 \frac{dz}{dt} &= -V \cos \theta \sin \psi_v \\
 \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma \\
 \frac{d\psi}{dt} &= (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) / \cos \vartheta \\
 \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_x - \tan \vartheta (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) \\
 \frac{dm}{dt} &= -m_c \\
 \sin \beta &= \cos \theta [\cos \gamma \sin(\psi - \psi_v) + \sin \vartheta \sin \gamma \cos(\psi - \psi_v)] - \sin \theta \cos \vartheta \sin \gamma \\
 \sin \alpha &= \{\cos \theta [\sin \vartheta \cos \gamma \cos(\psi - \psi_v) - \sin \gamma \sin(\psi - \psi_v)] - \sin \theta \cos \vartheta \cos \gamma\} / \cos \beta \\
 \sin \gamma_v &= (\cos \alpha \sin \beta \sin \vartheta - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \cos \vartheta + \cos \beta \sin \gamma \cos \vartheta) / \cos \theta \\
 \phi_1 &= 0 \\
 \phi_2 &= 0 \\
 \phi_3 &= 0 \\
 \phi_4 &= 0
 \end{aligned} \tag{2-65}$$

式(2-65)为以标量的形式描述的导弹空间运动方程组,它是一组非线性的常微分方程,在这20个方程中,包括有20个未知数: $V(t)$ 、 $\theta(t)$ 、 $\psi_v(t)$ 、 $\omega_x(t)$ 、 $\omega_y(t)$ 、 $\omega_z(t)$ 、 $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $z(t)$ 、 $\vartheta(t)$ 、 $\psi(t)$ 、 $\gamma(t)$ 、 $m(t)$ 、 $\alpha(t)$ 、 $\beta(t)$ 、 $\gamma_v(t)$ 、 $\delta_2(t)$ 、 $\delta_y(t)$ 、 $\delta_x(t)$ 、 $\delta_P(t)$,所以方程组(2-65)是封闭的,给定初始条件后,用数值积分法可以解得有控弹道及其相应的20个参数的变化规律。

§ 2-4 导弹的纵向运动和侧向运动

在上一节,我们用了 20 个方程来描述导弹在空间的运动。在工程上,用于实际计算的导弹运动方程组的方程个数往往远不止 20 个。例如,有时还需加上计算气动力和气动力矩的计算公式;若导弹是按目标运动来导引,还应加上目标运动方程。由于导弹各飞行段受力情况不同,相应运动方程组也将是不同的。因此,研究导弹的飞行问题是较复杂的。

一般说来,运动方程组的方程数目越多,描述导弹的运动就越完整、越准确。但研究和解算也就越麻烦。在工程上,特别在导弹和制导系统的初步设计阶段,在解算精度允许的范围内,应用一些近似方法,对导弹运动方程组进行简化,以便利用较简单的运动方程组来达到研究导弹运动的目的。例如,在一定假设条件下,把导弹运动方程组(2-65)分解为纵向运动方程组和侧向运动方程组,或简化为在铅垂平面内的运动方程组和水平面内的运动方程组等。实践证明,这些简化与分解都具有一定的实用价值。

一、导弹的纵向运动和侧向运动

所谓纵向运动,是指导弹运动参数 β 、 γ 、 γ_V 、 ω_x 、 ω_y 、 ψ 、 ψ_V 、 z 等恒为零的运动。假定,导弹在某个铅垂平面内飞行,又具有理想的倾斜稳定系统。由于导弹的外形相对于 Ox_1y_1 平面对称的,理想倾斜稳定系统能保证导弹的纵向对称面 Ox_1y_1 始终与该飞行的铅垂平面重合,这时运动参数 β 、 γ 、 γ_V 、 ω_x 、 ω_y 总应等于零。为了研究方便起见,如果将地面坐标系的 Ax 轴选在飞行的铅垂平面内,显然,参数 ψ 、 ψ_V 、 z 也将恒等于零,因此,导弹在铅垂平面内运动为纵向运动。

导弹的纵向运动,是由导弹质心在飞行平面(或对称平面 Ox_1y_1)内的平移运动和绕 Oz_1 轴的转动运动所组成。所以,在纵向运动中,参数 V 、 θ 、 ϑ 、 α 、 ω_z 、 x 、 y 等是随时间变化的,这些参数通常称为纵向运动的运动学参数,简称为纵向运动参数。

在纵向运动中等于零的参数 β 、 γ 、 γ_V 、 ω_x 、 ω_y 、 ψ 、 ψ_V 、 z 等通常称为侧向运动的运动学参数,简称为侧向运动参数。

所谓侧向运动是相应于侧向运动参数 β 、 γ 、 γ_V 、 ω_x 、 ω_y 、 ψ 、 ψ_V 、 z 等随时间变化的运动,它由导弹质心沿 Oz_1 轴的平移运动以及绕 Ox_1 轴和 Oy_1 轴的转动运动所组成。

由导弹运动方程组(2-65)可以看出:它既含有纵向运动参数,又含有侧向运动参数。在描述纵向运动参数变化的方程中,含有侧向运动参数,同样在描述侧向运动参数变化的方程中,则含有纵向运动参数。由此可知,导弹的一般运动是由纵向运动和侧向运动所组成,它们之间是互相关联又互相影响着。

当导弹在给定的铅垂平面内运动时,由于纵向运动是对称的,因此,只要不破坏运动的对称性,也就是说,在不出现偏航和倾斜操纵机构的偏转,以及因诸干扰因素而产生侧向运动参数对其零值的偏离能足够快地消除的情况下,纵向运动是可以实现的,而且它是可以独立存在的。这时,描述侧向运动参数变化的方程恒等于零,描述纵向运动参数变化的纵向运动方程只有 10 个,其中包含的参数有: V 、 θ 、 ϑ 、 α 、 x 、 y 、 ω_z 、 m 、 δ_z 、 δ_P 等 10 个。但是,描述侧向运动参数变化的侧向运动方程组,不能离开纵向运动参数而单独组成,也就是说,侧向运动不能离开纵向运动而单独存在,它只能与纵向运动同时存在。

二、导弹的一般运动分解为纵向运动和侧向运动

若能将导弹的一般运动方程组(2-65)分成独立的两组——一组是描述纵向运动参数变化的纵向运动方程组,另一组是描述侧向运动参数变化的侧向运动方程组,则研究导弹的运动规律时,联立求解的方程数目就可以大为减少,就便于研究。为了能独立求解纵向运动方程组,必须从描述纵向运动参数变化的方程右端去掉侧向运动参数 β 、 γ 、 γ_v 、 ψ 、 ψ_v 、 ω_x 、 ω_y 等。也就是说,要把纵向运动和侧向运动分开研究,需要满足下述假设条件:

(1) 侧向运动参数 β 、 γ 、 γ_v 、 ω_x 、 ω_y 及舵偏角 δ_x 、 δ_y 都比较小。这样就可以令

$$\cos\beta \approx \cos\gamma \approx \cos\gamma_v \approx 1$$

且略去小量的乘积 $\sin\beta\sin\gamma_v$ 、 $z\sin\gamma_v$ 、 $\omega_x\omega_y$ 、 $\omega_y\sin\gamma$ 、……以及参数 β 、 δ_x 、 δ_y 对阻力 X 的影响。

(2) 导弹基本上在某个铅垂面内飞行,即其弹道与铅垂面弹道差别不大,则 $\cos\psi_v \approx 1$ 。

(3) 俯仰操纵机构的偏转仅取决于纵向运动参数;而偏航、倾斜操纵机构的偏转又仅取决于侧向运动参数。

利用这些假设,就能将导弹的运动方程组分为描述纵向运动的方程组及描述侧向运动的方程组。

描述导弹纵向运动的方程组为

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= P \cos\alpha - X - mg \sin\theta \\ mV \frac{d\theta}{dt} &= P \sin\alpha + Y - mg \cos\theta \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} &= M_z \\ \frac{dx}{dt} &= V \cos\theta \\ \frac{dy}{dt} &= V \sin\theta \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_z \\ \frac{dm}{dt} &= -m_c \\ \alpha &= \vartheta - \theta \\ \phi_1 &= 0 \\ \phi_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-66)$$

纵向运动方程组(2-66)也是描述导弹在铅垂平面内运动的方程组,它共有10个方程,包含有10个未知参数: $V(t)$ 、 $\theta(t)$ 、 $\omega_z(t)$ 、 $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $\vartheta(t)$ 、 $m(t)$ 、 $\alpha(t)$ 、 $\delta_z(t)$ 、 $\delta_P(t)$,所以方程组(2-66)是封闭的,可以独立求解。

描述导弹侧向运动的方程组为

$$\left. \begin{aligned} -mV \cos\theta \frac{d\psi_v}{dt} &= (P \sin\alpha + Y) \sin\gamma_v - (P \cos\alpha \sin\beta - Z) \cos\gamma_v \\ J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y) \omega_z \omega_y &= M_x \end{aligned} \right\} \quad (2-67)$$

$$\left.
\begin{aligned}
J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z)\omega_x\omega_z &= M_y \\
\frac{dz}{dt} &= -V\cos\theta\sin\phi_V \\
\frac{d\psi}{dt} &= (\omega_y\cos\gamma - \omega_z\sin\gamma)/\cos\vartheta \\
\frac{d\gamma}{dt} &= \omega_x - \tan\vartheta(\omega_y\cos\gamma - \omega_z\sin\gamma) \\
\sin\beta &= \cos\theta[\cos\gamma\sin(\psi - \phi_V) + \sin\vartheta\sin\gamma\cos(\psi - \phi_V)] - \sin\theta\cos\vartheta\sin\gamma \\
\sin\gamma_V &= (\cos\alpha\sin\beta\sin\vartheta - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\cos\vartheta + \cos\beta\sin\gamma\cos\vartheta)/\cos\theta \\
\phi_2 &= 0 \\
\phi_3 &= 0
\end{aligned}
\right\} \quad (2-67) \text{ 续}$$

侧向运动方程组(2-67)共有 10 个方程,除了含有 $\phi_V(t)$ 、 $\omega_x(t)$ 、 $\omega_y(t)$ 、 $z(t)$ 、 $\psi(t)$ 、 $\gamma(t)$ 、 $\beta(t)$ 、 $\gamma_V(t)$ 、 $\delta_y(t)$ 、 $\delta_x(t)$ 10 个侧向运动参数之外,还包括除去坐标 x 以外的所有纵向运动参数 V 、 θ 、 α 、 ω_z 、 y 、 ϑ 、 δ_z 等。无论怎样简化方程组(2-67),都不能从中消去如 V 、 y 和 m 这些纵向参数。这说明要研究侧向运动参数比较小的运动时,必须首先求解纵向运动方程组(2-66),然后,将解出的纵向运动参数代入侧向运动方程组(2-67)中,才可解出侧向运动参数的变化规律。

这样的简化,能使联立求解的方程组的阶次降低一半,且能得到非常准确的结果。

但是,当侧向运动参数较大时,上述假设条件得不到满足,上述分组计算的办法会带来显著的计算误差,因而就不能再将导弹的一般运动分为纵向运动和侧向运动来研究,应将纵向和侧向运动同时考虑,也就是说,应求解一般的运动方程组(2-65)。

§ 2-5 导弹的平面运动

一般说,导弹是作空间运动的,平面运动是导弹运动的特殊情况。从各类导弹的飞行情况来看,它们有时是在某一平面内飞行的。例如地-空导弹在许多场合是在铅垂面内飞行,或在某一倾斜平面内飞行。飞航式导弹在爬升段及末导段也(或近似)在铅垂面内飞行。再如空-空导弹的运动,在许多场合则(或近似)在水平面内飞行,飞航式导弹的巡航段也基本上处在水平面内飞行。所以,平面运动虽是导弹运动的特例,但是,研究导弹的平面运动仍具有很大的实际意义。在导弹的初步设计阶段,在计算精度允许范围内,研究和解算导弹的平面弹道也有一定的应用价值。

一、导弹在铅垂平面内运动

导弹在铅垂平面内运动时,导弹的速度矢量 V 始终处于该平面内,导弹的弹道偏角 ϕ_V 为常值(若选地面坐标系 Ax 轴位于该铅垂平面内,则 $\phi_V=0$);设推力矢量 P 与弹体纵轴重合,且导弹纵向对称平面与该铅垂面重合。若要使导弹在铅垂平面内飞行,那么在垂直于该铅垂平面方向(即水平方向)上的侧向力应等于零,此时, β 、 γ 、 γ_V 等均为零。在铅垂平面内运动时,导弹只有在铅垂平面内质心的平移运动和绕 Oz_1 轴的转动运动,而沿 Oz_1 方向无平移运动,绕 Ox_1 轴和 Oy_1 轴也无转动,这时, $z=0$ 、 $\omega_x=0$ 、 $\omega_y=0$ 。导弹在铅垂面内运动时,导弹受到的

外力有：发动机推力 P 、空气阻力 X 和升力 Y 、重力 G 。

导弹在铅垂平面内运动的方程组与描述导弹纵向运动的方程组(2-66)相同，不再赘述。

二、导弹在水平面内运动

导弹在水平面内运动时，它的速度矢量 V 始终处于该水平面内且弹道倾角 θ 恒等于零。此时，作用在导弹上沿铅垂方向上的法向控制力应与导弹的重量相平衡。所以，为保持平飞，导弹应具有一定的攻角，以产生所需的法向控制力。

要使导弹在水平面内作机动飞行，则要求在水平面内沿垂直于速度 V 的法向方向产生一定的侧向力。对于有翼导弹，侧向力通常是借助于侧滑(轴对称型导弹)或倾斜(面对称型导弹)运动形成的。如果导弹既有侧滑又有倾斜，则将使控制复杂化，所以轴对称型导弹通常采用保持无倾斜而带侧滑的飞行，而面对称型导弹通常采用保持无侧滑而有倾斜的飞行。

导弹在水平面内运动，除在水平面内作平移运动外，还有绕质心的转动。为了与不断变化的导弹重量相平衡，所需的法向控制力也要相应变化，这就应改变 δ_z ，使导弹绕 Oz_1 轴转动。除此之外，对于利用侧滑产生侧向力的导弹，还要绕 Oy_1 轴转动，但无需绕 Ox_1 轴转动；而对于利用倾斜产生侧向力(即升力的水平分量)的导弹，还要绕 Ox_1 轴转动，但无需绕 Oy_1 轴转动。

导弹在水平面内机动飞行，由于产生侧向力的方法不同，因此，描述水平面内运动的方程组也不同。

1. 导弹在水平面内有侧滑而无倾斜的运动方程组

导弹在水平面内有侧滑而无倾斜运动，故有 $\theta \equiv 0$ ， y 为某一常值， $\gamma \equiv 0$ ， $\gamma_v = 0$ ， $\omega_x \equiv 0$ ，由方程组(2-65)可得

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= P \cos \alpha \cos \beta - X \\ mg &= P \sin \alpha + Y \\ -mV \frac{d\psi_v}{dt} &= -P \cos \alpha \sin \beta + Z \\ J_y \frac{d\omega_y}{dt} &= M_y \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} &= M_z \\ \frac{dx}{dt} &= V \cos \psi_v \\ \frac{dz}{dt} &= -V \sin \psi_v \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_z \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_y / \cos \vartheta \\ \frac{dm}{dt} &= -m_c \\ \beta &= \psi - \psi_v \end{aligned} \right\} \quad (2-68)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \vartheta \\ \phi_2 &= 0 \\ \phi_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-68) \text{ 续}$$

这组方程共有 14 个, 其中包含参数有: $V(t)$ 、 $\phi_v(t)$ 、 $\omega_y(t)$ 、 $\omega_z(t)$ 、 $x(t)$ 、 $z(t)$ 、 $\vartheta(t)$ 、 $\phi(t)$ 、 $m(t)$ 、 $\alpha(t)$ 、 $\beta(t)$ 、 $\delta_z(t)$ 、 $\delta_y(t)$ 、 $\delta_P(t)$ 等 14 个, 方程组是封闭的。

2. 导弹在水平面内有倾斜而无侧滑的运动方程组

导弹在水平面内有倾斜而无侧滑运动, 故有 $\theta \equiv 0$ (y 为某一常值)、 $\beta \equiv 0$ 、 $\omega_y \equiv 0$ 。设攻角 α (或俯仰角 ϑ)、角速度 ω_z 比较小时, 经简化后的有倾斜而无侧滑的水平面运动的近似方程组为

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= P - X \\ mg &= P \cos \gamma_v + Y \cos \gamma_v \\ -mV \frac{d\phi_v}{dt} &= P \sin \gamma_v + Y \sin \gamma_v \\ J_x \frac{d\omega_x}{dt} &= M_x \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} &= M_z \\ \frac{dx}{dt} &= V \cos \phi_v \\ \frac{dz}{dt} &= -V \sin \phi_v \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_z \cos \gamma \\ \frac{d\phi}{dt} &= -\omega_z \sin \gamma \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_x \\ \frac{dm}{dt} &= -m_c \\ \alpha &= -\arcsin \left[\frac{\sin(\phi - \phi_v)}{\sin \gamma} \right] \\ \gamma_v &= \gamma \\ \phi_2 &= 0 \\ \phi_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-69)$$

这组方程共有 15 个, 其中包含的参数有: $V(t)$ 、 $\phi_v(t)$ 、 $\omega_x(t)$ 、 $\omega_z(t)$ 、 $x(t)$ 、 $z(t)$ 、 $\vartheta(t)$ 、 $\phi(t)$ 、 $\gamma(t)$ 、 $m(t)$ 、 $\alpha(t)$ 、 $\gamma_v(t)$ 、 $\delta_z(t)$ 、 $\delta_x(t)$ 、 $\delta_P(t)$ 等 15 个, 方程组是封闭的。

§ 2-6 导弹的质心运动

一、“瞬时平衡”假设

导弹的一般运动是由其质心的运动和绕其质心的转动所组成的。在导弹初步设计阶段, 为

能简捷地得到导弹可能的飞行弹道及其主要飞行特性,研究导弹的飞行问题通常分两步进行:首先,暂且不考虑导弹绕质心的转动运动,而将导弹当作一个可操纵质点来研究;然后,在此基础上再研究导弹绕其质心的转动运动。采用这种简化的处理方法来研究导弹作为一个可操纵质点的运动特性,通常基于下列假设:

(1) 导弹绕弹体轴的转动是无惯性的,即

$$J_x = J_y = J_z = 0。$$

(2) 导弹的控制系统理想地工作,即无误差,也无时间延迟。

(3) 略去飞行中的随机干扰对作用在导弹上法向力的影响。

前两点假设的实质,就是认为导弹在整个飞行期间的任一瞬时都处于平衡状态,即导弹操纵机构偏转时,作用在导弹上的力矩在每一瞬时都处于平衡状态,这就是所谓的“瞬时平衡”假设。

从第一章知道,俯仰和偏航力矩一般可表示为

$$M_z = M_z(V, y, \alpha, \delta_z, \omega_z, \dot{\alpha}, \dot{\delta}_z)$$

$$M_y = M_y(V, y, \beta, \delta_y, \omega_y, \omega_x, \dot{\beta}, \dot{\delta}_y)$$

然而,在大多数情况下,角速度 ω_x 、 ω_y 、 ω_z 及导数 $\dot{\alpha}$ 、 $\dot{\beta}$ 、 $\dot{\delta}_z$ 、 $\dot{\delta}_y$ 对力矩 M_z 和 M_y 的影响,与角度 α 、 β 、 δ_z 、 δ_y 对力矩 M_z 和 M_y 的影响相比是次要的。采用“瞬时平衡”假设实际上也就是完全忽略前者的影响,于是有

$$M_z = M_z(V, y, \alpha, \delta_z) = 0$$

$$M_y = M_y(V, y, \beta, \delta_y) = 0$$

这些关系式通常称为平衡关系式。对于轴对称型导弹,在攻角和侧滑角不大的情况下,具有线性空气动力特性,于是有

$$\left(\frac{\delta_z}{\alpha} \right)_B = - \frac{m_z^\alpha}{m_z^{\delta_z}}$$

$$\left(\frac{\delta_y}{\beta} \right)_B = - \frac{m_y^\beta}{m_y^{\delta_y}}$$

由此可见,关于导弹无惯性的假定意味着:当操纵机构偏转时, α 和 β 都瞬时达到它的平衡值。

实际上,导弹的运动过程是个可控过程,由于控制系统本身以及控制对象(弹体)都存在着惯性,导弹从操纵机构偏转到运动参数发生相应变化并不是在瞬间完成的,而要经过某一段时间。例如,升降舵阶跃偏转 δ_z 角以后,将引起弹体绕 Oz_1 轴振荡转动,其攻角变化过程也是振荡的(如图 2-17),作用在导弹上的力和力矩也发生振荡变化,致使导弹的运动参数也出现振荡变化,只有过渡过程结束时才达到它的稳态值。大量的飞行试验结果表明:导弹的实际飞行轨迹总是在某一光滑的曲线附近变化。

认为导弹的转动无惯性,忽略了控制系统工作

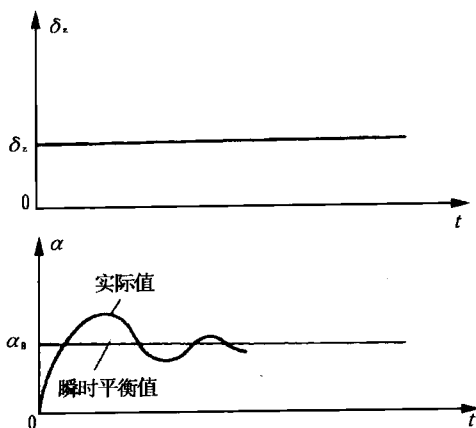


图 2-17 攻角的过渡过程

的过渡过程, 实际上是认为导弹运动参数(如 α 、 β 、 δ_z 、 δ_y 等)的变化是在瞬间完成的, 外力是随控制作用而瞬时地变化的。

在真实飞行中, 总有随机的干扰, 这些干扰可能直接作用在导弹上(如阵风、燃料流动导致弹体振动等), 也可能通过控制系统作用在导弹上(如从目标反射的起伏信号、噪音的干扰等)。一般情况下, 干扰使导弹绕质心发生随机振荡。这些振荡会引起升力 Y 和侧向力 Z 的随机增量及迎面阻力 X 的增大。在一次近似中, 可不计及导弹的随机振荡对 Y 和 Z 的影响。但 X 增大, 会引起飞行速度略为减小, 在把导弹的质心运动和绕质心的转动运动分开研究时, 为尽可能得到接近于真实的弹道, 必须将导弹的迎面阻力略为增大, 以便计及导弹随机振荡的影响。

二、导弹质心运动方程组

基于上述简化, 可以把导弹的质心运动和绕质心转动运动分开研究。于是, 从方程组(2-65)中就可以直接得到描述导弹质心(可操纵质点)的运动方程组

$$\left. \begin{aligned}
 m \frac{dV}{dt} &= P \cos \alpha_B \cos \beta_B - X - mg \sin \theta \\
 mV \frac{d\theta}{dt} &= P (\sin \alpha_B \cos \gamma_V + \cos \alpha_B \sin \beta_B \sin \gamma_V) + Y_B \cos \gamma_V - Z_B \sin \gamma_V - mg \cos \theta \\
 - mV \cos \theta \frac{d\psi_V}{dt} &= P (\sin \alpha_B \sin \gamma_V - \cos \alpha_B \sin \beta_B \cos \gamma_V) + Y_B \sin \gamma_V + Z_B \cos \gamma_V \\
 \frac{dx}{dt} &= V \cos \theta \cos \psi_V \\
 \frac{dy}{dt} &= V \sin \theta \\
 \frac{dz}{dt} &= -V \cos \theta \sin \psi_V \\
 \frac{dm}{dt} &= -m_c \\
 \alpha_B &= -\frac{m_z^{\delta_z}}{m_z^a} \delta_z \\
 \beta_B &= -\frac{m_y^{\delta_y}}{m_y^a} \delta_y \\
 \epsilon_1 &= 0 \\
 \epsilon_2 &= 0 \\
 \epsilon_3 &= 0 \\
 \epsilon_4 &= 0
 \end{aligned} \right\} (2-70)$$

式中 α_B 、 β_B ——分别为平衡攻角、平衡侧滑角;

Y_B 、 Z_B ——分别为 α_B 、 β_B 所对应的平衡升力、平衡侧向力。

方程组(2-70)共有 13 个方程, 其中含有未知数 $V(t)$ 、 $\theta(t)$ 、 $\psi_V(t)$ 、 $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $z(t)$ 、 $m(t)$ 、 $\alpha_B(t)$ 、 $\beta_B(t)$ 、 $\gamma_V(t)$ 、 $\delta_z(t)$ 、 $\delta_y(t)$ 、 $\delta_P(t)$ 等 13 个, 所以方程组(2-70)是封闭的。对于火箭发动机, 其推力是不进行调节的, m_c 可以认为是时间的已知函数, 那么, 方程组(2-70)的第 7 个方程可单独积分, 且 $\epsilon_4=0$ 也就不存在了。这样, 方程的个数减少了 2 个, 而未知数也减少了

2 个 (m, δ_P) ，剩下的方程组仍是封闭的。

利用方程组 (2-70) 计算得到的导弹运动参数的“稳态值”，它对弹体和制导系统的设计都有重要意义。

值得指出的是：对于操纵性能比较好，绕质心转动运动不太激烈的导弹，利用“瞬时平衡”假设导出的质心运动方程组 (2-70) 进行弹道计算，可以得到令人满意的结果。当导弹的操纵性能较差，并且绕质心的转动运动比较激烈时，必须考虑导弹绕质心的转动运动对质心运动的影响，否则会导致原则性的错误。

三、导弹在铅垂平面内的质心运动方程组

基于上述假设，简化方程组 (2-66)，就可以得到导弹在铅垂平面内的质心运动方程组

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= P \cos \alpha_B - X - mg \sin \theta \\ mV \frac{d\theta}{dt} &= P \sin \alpha_B + Y_B - mg \cos \theta \\ \frac{dx}{dt} &= V \cos \theta \\ \frac{dy}{dt} &= V \sin \theta \\ \frac{dm}{dt} &= -m_c \\ \varepsilon_1 &= 0 \\ \varepsilon_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-71)$$

方程组 (2-71) 共有 7 个方程，它包含未知数 $V(t)$ 、 $\theta(t)$ 、 $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $m(t)$ 、 $\alpha_B(t)$ 、 $\delta_P(t)$ 等 7 个，由于采用“瞬时平衡”假设， $\delta_z(t)$ 可根据平衡关系式单独求解，所以方程组 (2-71) 是封闭的。

四、导弹在水平面内的质心运动方程组

由上述简化假设，可以从运动方程组 (2-68)、(2-69) 中简化得到水平面内的质心运动方程组。如果是利用侧滑产生侧向力的情况，且攻角 α 和侧滑角 β 都不大，则导弹在水平面内的质心运动方程组为

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= P - X \\ mg &= P \alpha_B + Y_B \\ -mV \frac{d\phi_V}{dt} &= -P \beta_B + Z_B \\ \frac{dx}{dt} &= V \cos \phi_V \\ \frac{dz}{dt} &= -V \sin \phi_V \\ \frac{dm}{dt} &= -m_c \end{aligned} \right\} \quad (2-72)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi_V + \beta_B \\ \alpha_B &= \vartheta \\ \epsilon_2 &= 0 \\ \epsilon_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-72) \text{ 续}$$

上述方程组, 含有未知数 $V(t)$ 、 $\psi_V(t)$ 、 $x(t)$ 、 $z(t)$ 、 $m(t)$ 、 $\psi(t)$ 、 $\alpha_B(t)$ 、 $\beta_B(t)$ 、 $\vartheta(t)$ 、 $\delta_P(t)$ 等 10 个。至于舵偏角 $\delta_z(t)$ 、 $\delta_y(t)$ 可利用瞬时平衡关系式求得。

五、理想弹道、理论弹道、实际弹道

所谓理想弹道, 就是把导弹看做是一个可操纵质点, 认为控制系统是理想工作, 且不考虑导弹绕质心转动, 以及不考虑外界的各种干扰, 由此所求得的飞行轨迹称“理想弹道”。理想弹道又是一种理论弹道。分别求解方程组 (2-70)、(2-71)、(2-72), 可以得到导弹在空间或在铅垂平面、水平面内的理想弹道以及主要的飞行性能。

所谓理论弹道, 是指将导弹视为某一力学模型 (可操纵质点系或刚体, 或弹性体), 它作为控制系统的一个环节 (控制对象), 将动力学方程、运动学方程、控制系统方程以及附加其他方程 (质量变化方程、几何关系方程等) 综合在一起, 通过数值积分而求得的弹道, 而且方程中所用的弹体结构参数和外形几何参数, 以及发动机的特性参数均取设计值, 大气参数取标准值, 控制系统的参数取额定值, 方程组的初始条件符合规定值等。其所以称为理论弹道, 原因也在于此。由此可知, 理想弹道是理论弹道的一种简化情况。

导弹在真实飞行中的轨迹称为实际弹道。显然, 它不同于理论弹道或理想弹道。而且, 由于在飞行中有各种随机干扰作用, 因此, 各发导弹飞行的实际弹道也是不相同的, 这是由于各发弹的参数和外界飞行环境不可能相同的缘故。

§ 2-7 导弹的机动性和过载

导弹的机动性能是导弹飞行性能中的重要特性之一。导弹在飞行中所受到的作用力和所产生加速度的大小, 可以用过载来衡量。通常利用过载矢量的概念来评定导弹的机动性。过载与弹体、制导系统的设计有着密切的关系。本节将介绍导弹的机动性和过载的概念, 导弹的运动与过载的关系, 以及导弹设计中常用的几个过载的概念。

一、导弹的机动性和过载概念

所谓导弹的机动性是指导弹可能迅速地改变飞行速度大小和方向的能力。导弹攻击活动的目标, 特别是空中机动目标, 必须具备良好的机动性能。机动性能是评价导弹飞行性能的重要指标之一。

如何评定导弹的机动性能呢? 导弹的机动性可以用切向加速度和法向加速度来表证, 它们分别表示导弹能改变飞行速度大小和方向的迅速程度。或者用产生控制力的能力来评定导弹的机动性。作用在导弹上的外力中, 重力是不可控制的力, 而空气动力和推力是可控制的力, 控制力反映改变加速度的能力。

我们感兴趣的是利用过载矢量的概念来评定导弹的机动性。下面引出关于过载的概念。

设 N 是作用在导弹上除重力以外的所有外力的合力 (即控制力), 则导弹质心的加速度 a

可表示为

$$a = \frac{N + G}{m}$$

如果以重力加速度 g 为度量单位, 则得到相对加速度 (量纲为 1)

$$\frac{a}{g} = \frac{N}{G} + \frac{g}{g}$$

将其中 N 与 G 之比值定义为过载, 以 n 表示, 即

$$n = \frac{N}{G}$$

所谓导弹的过载, 是指作用在导弹上除了重力以外所有外力的合力对导弹重量的比值。过载是个矢量, 它的方向与控制力 N 方向一致, 其模值表示控制力为导弹重量的倍数。

过载矢量表征控制力 N 的大小和方向, 因此, 可利用过载矢量来表征导弹的机动性。

导引弹道运动学分析中, 将引入另一种过载定义。定义为作用在导弹上的所有外力 (包括重力) 的合力对导弹重量的比值, 以 n' 表示, 即

$$n' = \frac{N + G}{G}$$

或者

$$n' = \frac{a}{g}$$

显然, 由于过载定义的不同, 同一情况下的过载值也就不同。

例如, 某物体作垂直上升或下降运动, 如果其加速度的数值均等于重力加速度 g , 则两种不同的过载定义将得出不同的过载值 (如图 2-18 所示)。若按第二种定义 (合力包括重力) 来求, 在上升或者下降运动时, 该物体的过载值都等于 1。而按第一种定义 (不包括重力) 来求, 物体上升时的过载值是 2, 这说明在该物体上须施加两倍于重量的力, 才能使物体以大小为 g 的加速度作上升运动; 下降时, 物体的过载值为零, 这说明在物体上无须施加别的力, 就靠自身的重量能产生下降的重力加速度。由此可见, 按第一种定义求得的过载值, 更能说明力和运动之间的关系。

过载矢量的大小和方向通常是由它在某个坐标系上的投影来确定的。导弹质心运动的动力学方程可用过载矢量在弹道坐标系各轴上的投影分量来表示; 对弹体或部件研究其受力情况并进行强度分析时, 需要知道过载矢量在弹体坐标系各轴上投影。

过载矢量 n 在弹道坐标系 $Ox_2y_2z_2$ 各轴上投影为

$$\left. \begin{aligned} n_{x_2} &= \frac{N_{x_2}}{G} = \frac{1}{G} (P \cos \alpha \cos \beta - X) \\ n_{y_2} &= \frac{N_{y_2}}{G} = \frac{1}{G} [P (\sin \alpha \cos \gamma_v + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_v) + Y \cos \gamma_v - Z \sin \gamma_v] \\ n_{z_2} &= \frac{N_{z_2}}{G} = \frac{1}{G} [P (\sin \alpha \sin \gamma_v - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma_v) + Y \sin \gamma_v + Z \cos \gamma_v] \end{aligned} \right\} \quad (2-73)$$

过载矢量 n 在速度坐标系 $Ox_3y_3z_3$ 各轴上投影为

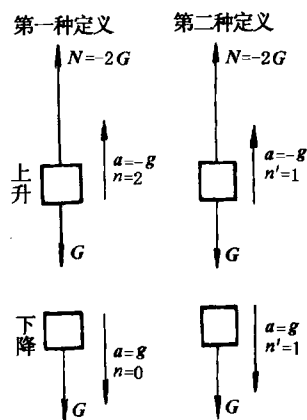


图 2-18 垂直运动中过载的不同定义值

$$\begin{bmatrix} n_{x_3} \\ n_{y_3} \\ n_{z_3} \end{bmatrix} = L(\gamma_V) \begin{bmatrix} n_{x_2} \\ n_{y_2} \\ n_{z_2} \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} n_{x_3} &= \frac{1}{G}(P \cos \alpha \cos \beta - X) \\ n_{y_3} &= \frac{1}{G}(P \sin \alpha + Y) \\ n_{z_3} &= \frac{1}{G}(-P \cos \alpha \sin \beta + Z) \end{aligned} \right\} \quad (2-74)$$

式(2-74)也可由式(2-73)中令 $\gamma_V = 0$ 得到。

过载矢量在速度方向上的投影 n_{x_2} 和 n_{x_3} 称为切向过载；在垂直于速度方向上的投影 n_{y_2} 、 n_{z_2} 和 n_{y_3} 、 n_{z_3} 称为法向过载。

导弹的机动性可以用切向过载和法向过载来评定。显然，切向过载越大，导弹所能产生的切向加速度就越大，这表示导弹的速度值改变得越快，它能更快地接近目标；法向过载越大，导弹所能产生的法向加速度就越大，在相同速度下，导弹改变飞行方向的能力就越大，即导弹越能作较弯曲的弹道飞行。因此，导弹过载越大，机动性能就越好。

过载矢量 $\mathbf{n}$ 在弹体坐标系 $Ox_1y_1z_1$ 各轴上投影为

$$\begin{bmatrix} n_{x_1} \\ n_{y_1} \\ n_{z_1} \end{bmatrix} = L(\alpha, \beta) \begin{bmatrix} n_{x_3} \\ n_{y_3} \\ n_{z_3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n_{x_3} \cos \alpha \cos \beta + n_{y_3} \sin \alpha - n_{z_3} \cos \alpha \sin \beta \\ -n_{x_3} \sin \alpha \cos \beta + n_{y_3} \cos \alpha + n_{z_3} \sin \alpha \sin \beta \\ n_{x_3} \sin \beta + n_{z_3} \cos \beta \end{bmatrix} \quad (2-75)$$

式中过载矢量在弹体纵轴 Ox_1 上的投影分量 n_{x_1} 称为纵向过载；在垂直于弹体纵轴方向上的投影分量 n_{y_1} 、 n_{z_1} 一般称为横向过载。

二、运动与过载

过载矢量不仅是评定导弹机动性能的标志，而且它和导弹的运动有密切的关系。

描述导弹质心运动的动力学方程可用过载矢量在弹道坐标系各轴上的分量 n_{x_2} 、 n_{y_2} 、 n_{z_2} 表示为

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{g} \frac{dV}{dt} &= n_{x_2} - \sin \theta \\ \frac{V}{g} \frac{d\theta}{dt} &= n_{y_2} - \cos \theta \\ -\frac{V}{g} \cos \theta \frac{d\phi_V}{dt} &= n_{z_2} \end{aligned} \right\} \quad (2-76)$$

式(2-76)左端表示导弹质心的无量纲加速度在弹道坐标系上的三个分量。此式描述导弹质心运动与过载之间的关系。由此可见，用过载来表示导弹质心运动的动力学方程，形式很简单。

同样, 过载也可用运动学参数(V 、 θ 、 ψ_V 等)来表示:

$$\left. \begin{aligned} n_{x_2} &= \frac{1}{g} \frac{dV}{dt} + \sin\theta \\ n_{y_2} &= \frac{V}{g} \frac{d\theta}{dt} + \cos\theta \\ n_{z_2} &= -\frac{V}{g} \cos\theta \frac{d\psi_V}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (2-77)$$

式(2-77)中参数 V 、 θ 和 ψ_V 表示飞行速度的大小和方向, 式的右边含有这些参数对时间的导数。由此可见, 过载矢量的投影表征着导弹改变飞行速度大小和方向的能力。

从式(2-77)可得到某些特殊飞行情况下的过载:

在铅垂平面内飞行时, $n_{z_2}=0$;

在水平面内飞行时, $n_{y_2}=1$;

作直线飞行时, $n_{y_2}=\cos\theta=\text{常数}$, $n_{z_2}=0$;

作等速直线飞行时, $n_{x_2}=\sin\theta=\text{常数}$, $n_{y_2}=\cos\theta=\text{常数}$, $n_{z_2}=0$;

作水平直线飞行时, $n_{y_2}=1$, $n_{z_2}=0$;

作等速水平直线飞行时, $n_{x_2}=0$, $n_{y_2}=1$, $n_{z_2}=0$ 。

过载矢量的投影不仅表征导弹改变飞行速度大小和方向的能力, 而且还能定性表示弹道上各点的切向加速度以及飞行弹道的形状。

由式(2-76)可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= g(n_{x_2} - \sin\theta) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{g}{V}(n_{y_2} - \cos\theta) \\ \frac{d\psi_V}{dt} &= -\frac{g}{V\cos\theta}n_{z_2} \end{aligned} \right\} \quad (2-78)$$

由式(2-78)可见:

当 $n_{x_2}=\sin\theta$ 时, 导弹在该瞬时的飞行是等速的; 当 $n_{x_2}>\sin\theta$ 时, 导弹在该瞬时的飞行是加速的; 当 $n_{x_2}<\sin\theta$ 时, 导弹在该瞬时是减速飞行。

当研究飞行弹道在铅垂平面 Ox_2y_2 内投影时, 如果 $n_{y_2}>\cos\theta$, 则 $\frac{d\theta}{dt}>0$, 此时弹道向上弯曲; 如果 $n_{y_2}<\cos\theta$, 则此时弹道向下弯曲; 如果 $n_{y_2}=\cos\theta$, 则弹道在该点处曲率为零(如图

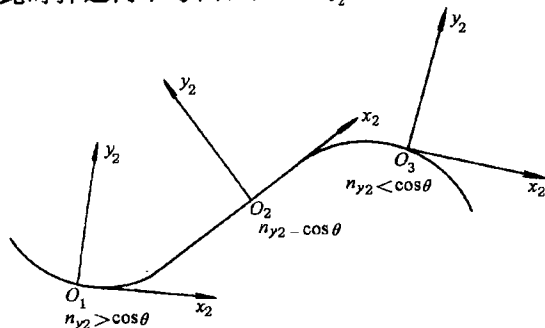


图 2-19 铅垂面内弹道形状与 n_{y_2} 关系

2-19所示)。

当研究飞行弹道在坐标平面 Ox_2z_2 内的投影时, 如果 $n_{z_2} > 0$, 则 $\frac{d\phi_v}{dt} < 0$, 此时弹道向右弯曲; 如果 $n_{z_2} < 0$, 则 $\frac{d\phi_v}{dt} > 0$, 此时弹道向左弯曲; 如果 $n_{z_2} = 0$, 则弹道在该点处曲率为零 (如图 2-20 所示)。

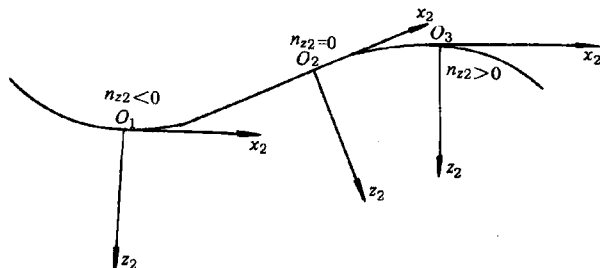


图 2-20 Ox_2z_2 平面内弹道形状与 n_{z_2} 关系

三、弹道曲率半径与法向过载的关系

建立弹道曲率半径与法向过载之间的关系, 对研究弹道特性也是必要的。现在来建立法向过载与弹道曲率半径之间的关系。

如果导弹在铅垂平面内运动, 那么弹道上某点的曲率就是该点处的弹道倾角 θ 对弹道弧长 s 的导数, 即

$$K = \frac{d\theta}{ds}$$

而该点的曲率半径 ρ_{y_2} 则为曲率 K 的倒数, 所以有

$$\rho_{y_2} = \frac{ds}{d\theta} = \frac{V}{d\theta/dt}$$

将式(2-78)的第二个方程代入上式可得到

$$\rho_{y_2} = \frac{V^2}{g(n_{y_2} - \cos\theta)} \quad (2-79)$$

上式表明: 在给定速度 V 的情况下, 法向过载 n_{y_2} 越大, 曲率半径越小, 在该点处弹道越弯曲, 导弹转弯速率就越大; 若在同样的法向过载 n_{y_2} 下, 随着飞行速度 V 的增加, 弹道曲率半径就增加, 这说明导弹飞得越快, 它越不容易转弯。

如果导弹在 Ox_2z_2 平面内飞行, 同理, 其曲率半径 ρ_{z_2} 可写成

$$\rho_{z_2} = -\frac{ds}{d\phi_v} = -\frac{V}{d\phi_v/dt}$$

将(2-78)式的第三个方程代入上式可得到

$$\rho_{z_2} = \frac{V^2 \cos\theta}{gn_{z_2}} \quad (2-80)$$

四、需用过载、极限过载和可用过载

在弹体和控制系统设计中, 常用到过载的概念。导弹的飞行过载决定了弹上各部件、各

种仪器所受的载荷，而外载荷是弹体设计和控制系统设计的重要原始数据之一。因此，在设计某些部件或仪器时，需要考虑导弹在飞行中所受的过载。在设计中，为保证部件或仪器在飞行中能正常地工作，并根据导弹战术技术要求的规定，它们承受的过载不得超过某个数值，此值就决定了这些部件或仪器可能受到的最大载荷。

在导弹设计时，还用到需用过载、极限过载和可用过载的概念，下面分别进行叙述。

1. 需用过载

导弹的需用过载是指导弹按给定的弹道飞行时所需要的过载，以 n_R 表示，其值可由解算弹道方程求出运动参数再代入式(2-77)中算出。需用过载是飞行弹道的一个很重要特性。

需用过载必须满足导弹的战术技术要求，例如，满足针对所要攻击的目标特性的要求，攻击机动性能良好的空中目标，则导弹沿给定的导引规律飞行所需的法向过载必然要大；满足导弹主要飞行性能的要求；满足作战空域、可攻击区的要求等。

从设计和制造的观点，希望需用过载在满足导弹战术技术要求的前提下越小越好。因为需用过载越小，飞行中导弹所承受的载荷就越小，这对弹体结构、弹上仪器和设备的正常工作以及减小导引误差（特别是在临近目标时）都是有利的。

2. 极限过载

需用过载必须满足导弹的战术技术要求，这是问题的一个方面，即需要方面。另一方面，导弹在飞行过程中能否产生那么大的过载呢？这是可能方面。因为，一枚导弹有一定的外形和几何尺寸，它在给定的飞行高度和速度下只能产生有限的过载。如果导弹在实际飞行中所能产生的过载大于或等于需用过载，那么它就能沿着要求（给定）的理论弹道飞行。如果小于需用过载，尽管控制系统能正常工作，但由于导弹所能产生的最大过载小于沿要求（给定）弹道飞行所需要的过载值，导弹就不可能继续沿着所要求（给定）的弹道飞行，导致导弹脱靶。

在给定的飞行高度和速度情况下，导弹在飞行中所能产生的过载取决于攻角 α 、侧滑角 β 及操纵机构（舵面）的偏转角 δ_z 、 δ_y 。

现在来建立它们之间的关系。

在飞行攻角和侧滑角都不太大的情况下。导弹具有线性空气动力特性，对于轴对称型导弹，这时有

$$\left. \begin{aligned} Y &= Y^a \alpha + Y^{\delta_z} \delta_z \\ Z &= Z^{\beta} \beta + Z^{\delta_y} \delta_y \end{aligned} \right\} \quad (2-81)$$

若忽略 $\bar{m}_z^{\omega_z}$ 、 $\bar{m}_y^{\omega_y}$ 、 $\bar{m}_z^{\dot{\alpha}}$ 、 $\bar{m}_y^{\dot{\beta}}$ 、 $\bar{m}_z^{\dot{\delta}_z}$ 和 $\bar{m}_y^{\dot{\delta}_y}$ 等力矩系数中较小的项，则导弹的平衡条件为

$$\left. \begin{aligned} m_z^a \alpha + m_z^{\delta_z} \delta_z &= 0 \\ m_y^{\beta} \beta + m_y^{\delta_y} \delta_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-82)$$

将式(2-82)代入式(2-81)中，消去操纵机构（舵面）的偏转角，并将其结果代入式(2-73)中的第二、第三个方程，若 α 、 β 、 γ_v 比较小，经简化整理后就得到平衡时的法向过载和攻角、侧滑角的关系

$$\left. \begin{aligned} n_{y_2 B} &= n_{y_2 B}^a \alpha \\ n_{z_2 B} &= n_{z_2 B}^{\beta} \beta \end{aligned} \right\} \quad (2-83)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} n_{y_2B}^a &= \frac{1}{G} \left(\frac{P}{57.3} + Y^a - \frac{m_z^a}{m_{\delta_z}} Y^{\delta_z} \right) \\ n_{z_2B}^\beta &= \frac{1}{G} \left(-\frac{P}{57.3} + Z^\beta - \frac{m_y^\beta}{m_{\delta_y}} Z^{\delta_y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2-84)$$

这里攻角 α 和侧滑角 β 的单位是度。由式(2-83)可见,平衡飞行时,导弹的法向过载正比于该瞬时的 α 和 β 。但是,飞行攻角和侧滑角是不能无限大的,它们的最大允许值与许多因素有关。例如,随着 α 或 β 的增加,导弹的静稳定度通常是减小的,甚至在大攻角或侧滑角情况下,导弹变成为静不稳定的。这时,操纵纵运动的控制系统的的设计比较困难,因为自动驾驶仪不可能在各种飞行状况下都能得到满意的特性。因此,必须将 α 和 β 限制在比较小的数值范围内(通常 $8^\circ \sim 12^\circ$),使得力矩特性曲线几乎是线性的。攻角和侧滑角的最大允许值取决于导弹的气动布局和飞行马赫数 M_a 。飞行攻角或侧滑角最大允许值还受其临界值限制。如果导弹的飞行攻角或侧滑角达到临界值,此时导弹的升力系数或侧向力系数达到最大值。若再继续增大 α 或 β ,升力系数或侧向力系数就会急剧下降,导弹将会飞行失速。显然,攻角或侧滑角的临界值是一种极限情况。

导弹的极限过载是指攻角或侧滑角达到临界值时所对应的过载,以 n_L 表示。

3. 可用过载

类似地将式(2-82)代入式(2-81)中,消去 α 和 β ,并经简化,则得到平衡时的法向过载和操纵机构(舵面)偏转角之间的关系

$$\left. \begin{aligned} n_{y_2B} &= n_{y_2B}^{\delta_z} \delta_z \\ n_{z_2B} &= n_{z_2B}^{\delta_y} \delta_y \end{aligned} \right\} \quad (2-85)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} n_{y_2B}^{\delta_z} &= \frac{1}{G} \left[-\frac{m_z^{\delta_z}}{m_z} \left(\frac{P}{57.3} + Y^a \right) + Y^{\delta_z} \right] \\ n_{z_2B}^{\delta_y} &= \frac{1}{G} \left[-\frac{m_y^{\delta_y}}{m_y} \left(Z^\beta - \frac{P}{57.3} \right) + Z^{\delta_y} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2-86)$$

由式(2-85)可知,导弹所能产生的法向过载与操纵机构(舵面)偏转角 δ_z 、 δ_y 成正比,而 δ_z 、 δ_y 的大小亦会受一些因素限制。

例如,升降舵的最大偏转角 δ_{zmax} 与下列因素有关:

(1) 受攻角临界值限制。对于轴对称导弹,平衡条件下有

$$\delta_{zmax} < \left| \frac{m_z^a}{m_z} (\alpha_{cr})_B \right| \quad (2-87)$$

式中 $(\alpha_{cr})_B$ 为平衡攻角的临界值。

(2) 舵面效率的限制。操纵机构(舵面)的效率随着偏转角的增大而降低。如果舵面处在弹身尾部(正常式),舵面处的平均有效攻角限制在 20° 以内,则可用下式来限制最大舵偏角

$$\delta_{zmax} < 20 / \left[1 - \frac{m_z^{\delta_z}}{m_z^a} (1 - \epsilon^a) \right] \quad (^\circ) \quad (2-88)$$

式中 ϵ^a ——单位攻角的下洗。

由式(2-88)决定的限制值往往比由式(2-87)决定的限制值大得多。

(3) 结构强度的限制。要避免由舵面最大偏转角 $\delta_{z\max}$ 决定的法向过载过大而使弹体结构受到破坏。

综合考虑影响 $\delta_{z\max}$ 的各种因素, 就可以确定 $\delta_{z\max}$ 的数值。

导弹的可用过载是指操纵机构(舵面)偏转到最大时, 处于平衡状态下, 导弹所能产生的过载, 以 n_p 表示。可用法向过载表征导弹产生法向控制力的实际能力。若要求导弹沿着导引规律所要求的理论弹道飞行, 那么, 在这条弹道上的任一点, 可用过载都要大于或等于需用过载。否则, 导弹就不可能按照所要求的弹道飞行, 从而导致脱靶。

因此, 在确定导弹的可用过载时, 既必须考虑到保证导弹具有足够的机动性能, 又必须考虑到上述因素的限制。由最大舵偏角确定的可用过载, 在考虑安全系数以后, 将作为强度校核的依据。

在实际飞行过程中, 各种干扰因素总是存在的, 因此, 在导弹设计中, 必须留有一定的过载余量, 用以克服各种扰动因素导致的附加过载。所以有

$$n_p \geq n_R + \Delta n$$

式中 Δn ——过载裕量。

综上所述, 需用过载、可用过载和极限过载在一般情况下应满足如下不等式

$$n_L > n_p > n_R$$

§ 2-8 低速滚转导弹的运动方程组

低速滚转导弹是指在飞行过程中, 绕其纵轴低速(每秒几转或几十转)自旋的一类导弹。滚转导弹的研制是从 50 年代初开始的, 最早被应用于反坦克导弹上; 60 年代初, 又被广泛地应用于小型防空导弹上。

低速滚转导弹通常采用斜置尾翼、弧形尾翼或起飞发动机喷管斜置等方式赋予导弹一定的滚转角速度。这类导弹的主要特点是: 实现单通道控制, 控制系统简单, 导弹只需一对操纵机构, 利用其随纵轴旋转和控制操纵机构的换向, 可获得俯仰和偏航方向的控制力, 导弹实现作空间任意方向运动; 滚转导弹在飞行过程中, 将产生马格努斯效应和陀螺效应, 使纵向运动和侧向运动相互交连, 俯仰运动和偏航运动不可能分开研究; 导弹滚转可以改善发动机推力偏心、质量偏心、导弹外形工艺误差等干扰所造成的影响, 减小无控飞行段的散布; 由第一章定义的弹体坐标系和速度坐标系之间关系所决定的攻角、侧滑角将随同弹体绕纵轴滚转而周期交变。

一、滚转导弹常用坐标系和坐标系间的转换

第一章所定义的弹体坐标系的 Oy_1 轴和速度坐标系的 Oy_3 轴都在导弹的纵向对称面内, 当弹体滚转时, 纵向对称面就跟着滚转, 因而攻角 α 和侧滑角 β 也将随之产生周期性交变, 给研究导弹的运动带来诸多不便。为此, 在建立滚转导弹运动方程组时, 除了要用到第一、二章所定义的地面坐标系 $Axyz$ 、弹道坐标系 $Ox_2y_2z_2$ 、弹体坐标系 $Ox_1y_1z_1$ 和速度坐标系 $Ox_3y_3z_3$ 外, 还要建立两个新的坐标系, 即准弹体坐标系 $Ox_4y_4z_4$ 和准速度坐标系 $Ox_5y_5z_5$, 并建立这两个新坐标系与其它有关坐标系之间的坐标转换矩阵, 同时, 重新定义攻角和侧滑角。借助于它们所建立的滚转导弹运动方程组, 在研究分析滚转导弹运动的特性和规律时, 获得

的攻角和侧滑角的变化规律更为直观。

1. 两个新坐标系的定义

(1) 准弹体坐标系 $Ox_4y_4z_4$

坐标系的原点 O 取在导弹的瞬时质心上； Ox_4 轴与弹体纵轴重合，指向头部为正； Oy_4 轴位于包含弹体纵轴的铅垂面内，且垂直于 Ox_4 轴，指向上为正； Oz_4 轴与其他两轴垂直并构成右手坐标系。

(2) 准速度坐标系 $Ox_5y_5z_5$

坐标系的原点 O 取在导弹的瞬时质心上； Ox_5 轴与导弹质心的速度矢量 V 重合； Oy_5 轴位于包含弹体纵轴的铅垂面内，且垂直于 Ox_5 轴，指向上为正； Oz_5 轴与其它两轴垂直并构成右手坐标系。

2. 各坐标系之间的关系及其转换

(1) 地面坐标系与准弹体坐标系之间的关系及其转换

根据准弹体坐标系的定义，它相对地面坐标系的方位可用第二章所定义的俯仰角 ϑ 和偏航角 ψ 确定（如图 2-21 所示）。地面坐标系与准弹体坐标系之间的

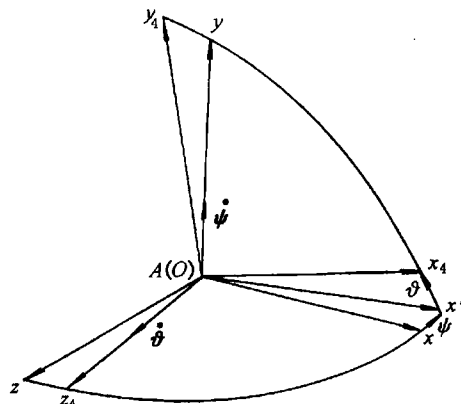


图 2-21 地面坐标系与准弹体坐标系之间关系

的转换矩阵 $L(\vartheta, \psi)$ 可这样求得：首先将地面坐标系 $Axyz$ 与准弹体坐标系 $Ox_4y_4z_4$ 的原点及各对应坐标轴分别重合，以地面坐标系为基准，第一次以角速度 $\dot{\psi}$ 绕 Ay 轴旋转 ψ 角， Ax 轴、 Az 轴分别转到 Ax' 、 Az_4 轴上，形成过渡坐标系 $Ax'yz_4$ ；第二次以角速度 $\dot{\vartheta}$ 绕 Oz_4 轴旋转 ϑ 角，最终形成准弹体坐标系 $O(A)x_4y_4z_4$ 。所以，转换矩阵 $L(\vartheta, \psi)$ 为其相应的两个初等旋转矩阵的乘积，可写成

$$L(\vartheta, \psi) = L(\vartheta) L(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\vartheta\cos\psi & \sin\vartheta & -\cos\vartheta\sin\psi \\ -\sin\vartheta\cos\psi & \cos\vartheta & \sin\vartheta\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix} \quad (2-89)$$

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix} = L(\vartheta, \psi) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2-90)$$

其方向余弦表见表 2-5。

表 2-5 地面坐标系与准弹体坐标系之间的方向余弦表

	Ax	Ay	Az *
Ox_4	$\cos\vartheta\cos\psi$	$\sin\vartheta$	$-\cos\vartheta\sin\psi$
Oy_4	$-\sin\vartheta\cos\psi$	$\cos\vartheta$	$\sin\vartheta\sin\psi$
Oz_4	$\sin\psi$	0	$\cos\psi$

(2) 准速度坐标系与准弹体坐标系之间的关系及其转换

根据准速度坐标系和准弹体坐标系的定义，它们之间的关系由两个角度来确定（如图

2-22所示), 分别定义如下

攻角 α^* : 导弹质心的速度矢量 $V(Ox_5$ 轴) 在铅垂面 Ox_4y_4 上的投影与弹体纵轴 Ox_4 的夹角。若 Ox_4 轴位于 V 的投影线的上方(即产生正升力), 则 α^* 角为正; 反之为负。

侧滑角 β^* : 速度矢量 $V(Ox_5$ 轴) 与铅垂面 Ox_4y_4 之间的夹角。沿飞行方向观察, 若来流从右侧流向弹体(即产生负侧向力), 则所对应的侧滑角 β^* 为正; 反之为负。

准速度坐标系与准弹体坐标系之间的转换矩阵可以通过两次旋转求得, $L(\alpha^*, \beta^*)$ 可直接参照式(2-24)写出

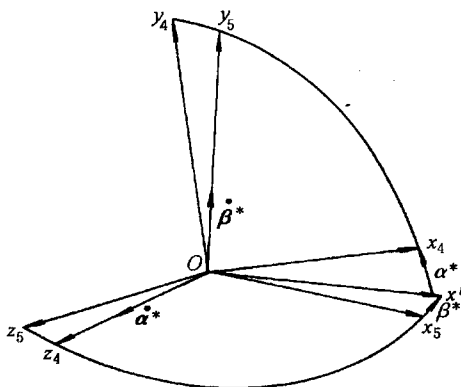


图 2-22 准速度坐标系与准弹体坐标系之间关系

$$L(\alpha^*, \beta^*) = L(\alpha^*)L(\beta^*) = \begin{bmatrix} \cos\alpha^* \cos\beta^* & \sin\alpha^* & -\cos\alpha^* \sin\beta^* \\ -\sin\alpha^* \cos\beta^* & \cos\alpha^* & \sin\alpha^* \sin\beta^* \\ \sin\beta^* & 0 & \cos\beta^* \end{bmatrix} \quad (2-91)$$

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix} = L(\alpha^*, \beta^*) \begin{bmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \end{bmatrix} \quad (2-92)$$

准速度坐标系与准弹体坐标系之间的关系的方向余弦表见表 2-6。

表 2-6 准速度坐标系与准弹体坐标系之间的方向余弦表

	Ox_5	Oy_5	Oz_5
Ox_4	$\cos\alpha^* \cos\beta^*$	$\sin\alpha^*$	$-\cos\alpha^* \sin\beta^*$
Oy_4	$-\sin\alpha^* \cos\beta^*$	$\cos\alpha^*$	$\sin\alpha^* \sin\beta^*$
Oz_4	$\sin\beta^*$	0	$\cos\beta^*$

(3) 弹道坐标系与准速度坐标系之间的关系及其转换

由这两个坐标系的定义可知, Ox_2 轴和 Ox_5 轴均与导弹质心的速度矢量 V 重合, 所以, 它们之间的关系用一个角度即可确定(如图 2-23 所示), 定义如下

速度倾斜角 γ_v^* : 准速度坐标系的 Oy_5 轴与包含速度矢量 V 的铅垂面 Ox_2y_2 之间的夹角。参照式(2-26), 即得转换矩阵 $L(\gamma_v^*)$

$$L(\gamma_v^*) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma_v^* & \sin\gamma_v^* \\ 0 & -\sin\gamma_v^* & \cos\gamma_v^* \end{bmatrix} \quad (2-93)$$

$$\begin{bmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \end{bmatrix} = L(\gamma_v^*) \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (2-94)$$

其方向余弦表见表 2-7。

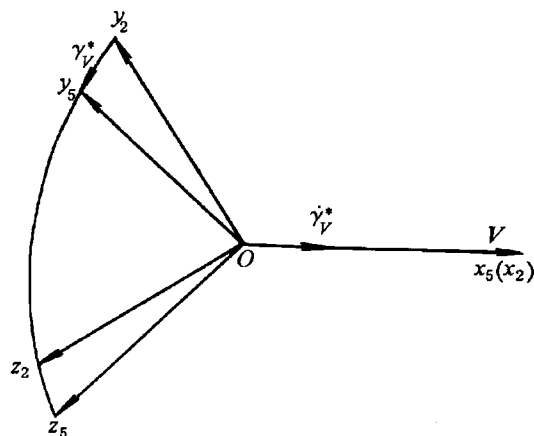


图 2-23 弹道坐标系与准速度坐标系之间关系

表 2-7 弹道坐标系与准速度坐标系之间的方向余弦表

	Ox_2	Oy_2	Oz_2
Ox_5	1	0	0
Oy_5	0	$\cos \gamma_V^*$	$\sin \gamma_V^*$
Oz_5	0	$-\sin \gamma_V^*$	$\cos \gamma_V^*$

(4) 准弹体坐标系与弹体坐标系之间的关系及其转换

设滚转导弹的滚转角速度为 $\dot{\gamma}$ 。由于导弹纵向对称面 Ox_1y_1 随弹体以角速度 $\dot{\gamma}$ 旋转，因此，准弹体坐标系与弹体坐标系之间的关系及其转换矩阵 $L(\dot{\gamma}t)$ 可写成

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = L(\dot{\gamma}t) \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix} \quad (2-95)$$

$$L(\dot{\gamma}t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \dot{\gamma}t & \sin \dot{\gamma}t \\ 0 & -\sin \dot{\gamma}t & \cos \dot{\gamma}t \end{bmatrix} \quad (2-96)$$

其方向余弦表见表 2-8。

表 2-8 准弹体坐标系与弹体坐标系之间的方向余弦表

	Ox_4	Oy_4	Oz_4
Ox_1	1	0	0
Oy_1	0	$\cos \dot{\gamma}t$	$\sin \dot{\gamma}t$
Oz_1	0	$-\sin \dot{\gamma}t$	$\cos \dot{\gamma}t$

3. 角参数 α 、 β 与 α^* 、 β^* 之间的关系

当导弹绕其纵轴的自旋角速度 $\dot{\gamma}=0$ 时,弹体坐标系 $Ox_1y_1z_1$ 和准弹体坐标系 $Ox_4y_4z_4$,速度坐标系 $Ox_3y_3z_3$ 和准速度坐标系 $Ox_5y_5z_5$ 分别是重合的;而当 $\dot{\gamma}\neq 0$ 时,由于纵向对称面 Ox_1y_1 随弹体一起旋转,根据角参数 α 、 β 、 γ_v 的定义可知: α 、 β 、 γ_v 都将随弹体的旋转而周期交变。下面推导角参数 α 、 β 、与 α^* 、 β^* 之间的关系。

由式(2-92)和式(2-95)可得

$$\begin{bmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \end{bmatrix} = L^T(\alpha^*, \beta^*) L^T(\dot{\gamma}t) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (2-97)$$

式中 $L^T(\alpha^*, \beta^*)$ 和 $L^T(\dot{\gamma}t)$ 分别由式(2-91)和式(2-96)可得,于是

$$\begin{aligned} & L^T(\alpha^*, \beta^*) L^T(\dot{\gamma}t) \\ = & \begin{bmatrix} \cos\alpha^* \cos\beta^* & \sin\beta^* \sin\dot{\gamma}t - \sin\alpha^* \cos\beta^* \cos\dot{\gamma}t & \sin\alpha^* \cos\beta^* \sin\dot{\gamma}t + \sin\beta^* \cos\dot{\gamma}t \\ \sin\alpha^* & \cos\alpha^* \cos\dot{\gamma}t & -\cos\alpha^* \sin\dot{\gamma}t \\ -\cos\alpha^* \sin\beta^* & \sin\alpha^* \sin\beta^* \cos\dot{\gamma}t + \cos\beta^* \sin\dot{\gamma}t & -\sin\alpha^* \sin\beta^* \sin\dot{\gamma}t + \cos\beta^* \cos\dot{\gamma}t \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-98)$$

由第二章式(2-23)及式(2-24)可得

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = L^T(\alpha, \beta) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (2-99)$$

$$L^T(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \cos\alpha \cos\beta & -\sin\alpha \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha \sin\beta & \sin\alpha \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \quad (2-100)$$

为推导简单起见,设沿 Ox_1 、 Oy_1 、 Oz_1 轴分别为单位矢量。根据速度坐标系和准速度坐标系的定义可知, Ox_3 轴和 Ox_5 轴都与速度矢量 V 重合。因此,单位列矢量 $[x_1, y_1, z_1]^T = [1, 1, 1]^T$ 分别在 Ox_3 轴和 Ox_5 轴上的投影结果必然相等。若视 α 、 β 和 α^* 、 β^* 为小量,由式(2-97)~式(2-100)推导并经简化后可得

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\dot{\gamma}t & -\sin\dot{\gamma}t \\ \sin\dot{\gamma}t & \cos\dot{\gamma}t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{bmatrix} \quad (2-101)$$

$$\text{或} \quad \begin{bmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\dot{\gamma}t & \sin\dot{\gamma}t \\ -\sin\dot{\gamma}t & \cos\dot{\gamma}t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (2-102)$$

通过式(2-102)可进一步了解滚转导弹和非滚转导弹有关角参数之间的关系。同时还可看出,选用了准弹体坐标系和准速度坐标系之后,就有可能使滚转导弹的某些运动参数(如 α^* 、 β^* 、 γ_v^*)的变化规律更加直观。

二、滚转导弹的操纵力和操纵力矩

滚转导弹一般采用单通道控制系统,同时实现控制俯仰和偏航运动的任务。滚转导弹设

计中,广泛地采用脉冲调宽控制信号直接控制继电式操纵机构(例如摆帽、空气扰流片、燃气扰流片等)。下面以摆帽为例说明操纵力的产生。

假设控制系统理想工作,操纵机构是理想的继电式偏转,没有时间延迟存在。设导弹开始旋转时刻,弹体坐标系和准弹体坐标系相重合($\gamma=0$),操纵机构处于水平位置,操纵机构偏转轴(相当于铰链轴)平行于弹体的 Oy_1 轴,且规定产生的操纵力指向 Oz_1 轴的负向时,操纵机构的偏转角 $\delta>0$ 。反之, $\delta<0$ 。

由于弹体本身具有低通滤波特性,故只有脉冲调宽操纵机构产生的操纵力的周期平均值才能得到弹体的响应。弹体滚转时,操纵力 F_c 随弹体滚转。若控制信号的极性不变,即操纵机构的偏摆不换向时,则操纵力 F_c 随弹体滚转一周在准弹体系 Oy_4 轴和 Oz_4 轴方向上的周期平均的操纵力为零(如图 2-24 所示)。若弹体滚转的前半周期($0\leq\dot{\gamma}t<\pi$)控制信号使 $\delta>0$,而后半周期($\pi\leq\dot{\gamma}t<2\pi$)控制信号的极性改变,使 $\delta<0$ 时,则操纵力 F_c 随弹体滚转一周在 Oy_4 轴和 Oz_4 轴方向上的投影

变化曲线,如图 2-25 所示。由图可以看出:操纵力 F_c 在 Oy_4 轴方向的周期平均值 F_{y_4} 达到最大,而沿 Oz_4 轴方向的周期平均值 $F_{z_4}=0$ 。这可由图 2-25 中的曲线进行积分可以求得

$$\begin{aligned} F_{y_4} &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} F_c \sin\gamma d\gamma - \int_{\pi}^{2\pi} F_c \sin\gamma d\gamma \right) \\ &= \frac{F_c}{2\pi} \left[(-\cos\gamma) \Big|_0^{\pi} + (\cos\gamma) \Big|_{\pi}^{2\pi} \right] = \frac{2}{\pi} F_c \\ F_{z_4} &= -\frac{F_c}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \cos\gamma d\gamma - \int_{\pi}^{2\pi} \cos\gamma d\gamma \right) = 0 \end{aligned}$$

这就是说,当控制信号的初始相位为零时,弹体每滚转半个周期,控制信号改变一次极性。于是作用于导弹上的周期平均操纵力 $F(\delta)$ 为

$$F(\delta) = F_{y_4} + F_{z_4} = F_{y_4}$$

即在上述条件下,周期平均操纵力 $F(\delta)$ 总是与 Oy_4 轴重合

$$F(\delta) = F_{y_4} = \frac{2}{\pi} F_c \quad (2-103)$$

若控制信号的初始相位超前(或滞后)某个 φ 角,那么周期平均操纵力 $F(\delta)$ 也将超前(或滞后) φ 角(如图 2-26 所示)。这时,周期平均操纵力 $F(\delta)$ 在准弹体坐标系 Oy_4 轴和 Oz_4 轴方向上的投影分别为

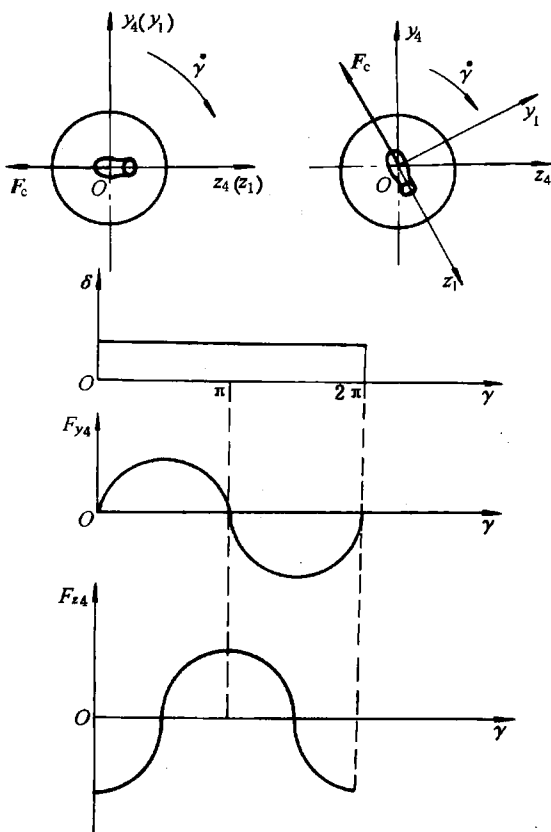


图 2-24 操纵机构偏摆不换向情况

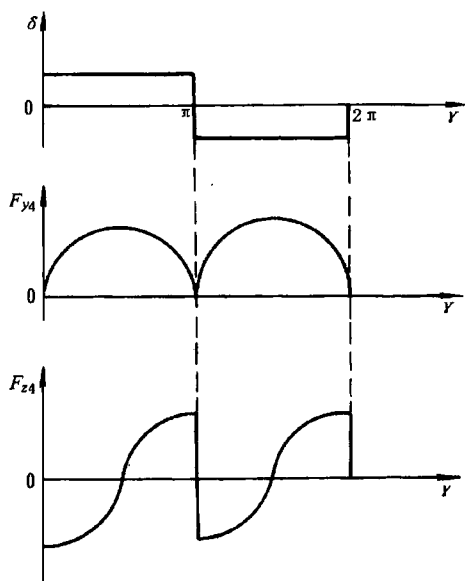


图 2-25 控制信号初始相位为零时, 操纵机构偏摆每半个周期换向一次的情况

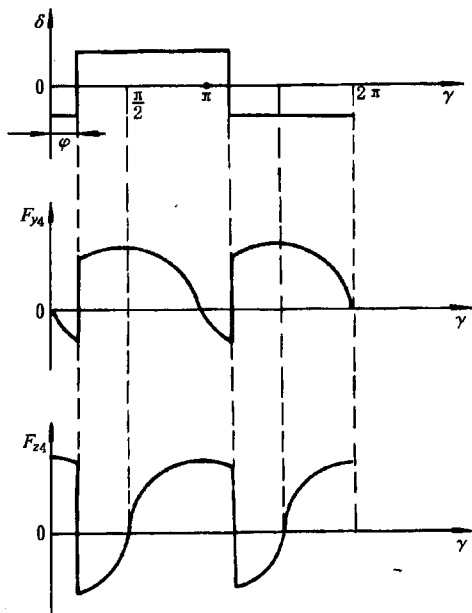


图 2-26 控制信号初始相位滞后 φ 角, 操纵机构偏摆每半周期换向一次情况

$$\left. \begin{aligned} F_{y_4} &= F(\delta) \cos \varphi \\ F_{z_4} &= F(\delta) \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2-104)$$

将式(2-104)两端分别除以 $F(\delta)$, 并令

$$\left. \begin{aligned} K_y &= \frac{F_{y_4}}{F(\delta)} = \frac{F(\delta) \cos \varphi}{F(\delta)} = \cos \varphi \\ K_z &= \frac{F_{z_4}}{F(\delta)} = \frac{F(\delta) \sin \varphi}{F(\delta)} = \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2-105)$$

式中 K_y 、 K_z 分别称为俯仰指令系数和偏航指令系数。

将式(2-103)、(2-105)代入式(2-104)中, 则得

$$\left. \begin{aligned} F_{y_4} &= K_y \frac{2}{\pi} F_c \\ F_{z_4} &= K_z \frac{2}{\pi} F_c \end{aligned} \right\} \quad (2-106)$$

于是, F_{y_4} 、 F_{z_4} 分别相对于 Oz_4 轴、 Oy_4 轴之操纵力矩为

$$\left. \begin{aligned} M_{cy_4} &= K_z \frac{2}{\pi} F_c (x_p - x_G) \\ M_{cz_4} &= -K_y \frac{2}{\pi} F_c (x_p - x_G) \end{aligned} \right\} \quad (2-107)$$

式中 x_p 、 x_G ——分别为由弹体顶点至操纵力 F_c 的作用点、导弹质心的距离。

三、低速滚转导弹的运动方程组

1. 导弹质心运动的动力学方程

建立低速滚转导弹质心运动的动力学标量方程时, 仍把方程(2-3)写成在弹道坐标系 $Ox_2y_2z_2$ 上的标量形式, 并假设导弹是在平行重力场中飞行, 推力矢量 P 与弹体纵轴重合。而空气动力是沿准速度坐标系上分解, 操纵力是沿准弹体坐标系上分解。利用相应的转换矩阵, 求出推力、空气动力、重力和操纵力在弹道坐标系 $Ox_2y_2z_2$ 各轴上的投影, 然后将其代入式(2-33)中, 最后得到低速滚转导弹质心运动的动力学标量方程

$$\begin{bmatrix} m \frac{dV}{dt} \\ mV \frac{d\theta}{dt} \\ -mV \cos\theta \frac{d\psi_v}{dt} \end{bmatrix} = L^T(\gamma_v^*) L^T(\alpha^*, \beta^*) \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + L^T(\gamma_v^*) \begin{bmatrix} -X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} +$$

$$L(\theta, \psi_v) \begin{bmatrix} 0 \\ -G \\ 0 \end{bmatrix} + L^T(\gamma_v^*) L^T(\alpha^*, \beta^*) \begin{bmatrix} 0 \\ K_y \frac{2}{\pi} F_c \\ K_z \frac{2}{\pi} F_c \end{bmatrix}$$

展开后可得

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= P \cos\alpha^* \cos\beta^* - X - mg \sin\theta + \\ &\quad \frac{2}{\pi} F_c (K_z \sin\beta^* - K_y \sin\alpha^* \cos\beta^*) \\ mV \frac{d\theta}{dt} &= P (\sin\alpha^* \cos\gamma_v^* + \cos\alpha^* \sin\beta^* \sin\gamma_v^*) + Y \cos\gamma_v^* - \\ &\quad Z \sin\gamma_v^* - mg \cos\theta + \frac{2}{\pi} F_c [K_y (\cos\alpha^* \cos\gamma_v^* - \\ &\quad \sin\alpha^* \sin\beta^* \sin\gamma_v^*) - K_z \sin\gamma_v^* \cos\beta^*] \\ -mV \cos\theta \frac{d\psi_v}{dt} &= P (\sin\alpha^* \sin\gamma_v^* - \cos\alpha^* \sin\beta^* \cos\gamma_v^*) + \\ &\quad Y \sin\gamma_v^* + Z \cos\gamma_v^* + \frac{2}{\pi} F_c [K_y (\sin\alpha^* \sin\beta^* \cos\gamma_v^* + \\ &\quad \cos\alpha^* \sin\gamma_v^*) + K_z \cos\gamma_v^* \cos\beta^*] \end{aligned} \right\} \quad (2-108)$$

2. 导弹绕质心转动的动力学方程

低速滚转导弹绕质心转动的动力学方程写成在准弹体坐标系上的标量形式最为简单。

设准弹体坐标系 $Ox_4y_4z_4$ 相对于地面坐标系的转动角速度为 ω' , 由图 2-21 可知

$$\omega' = \dot{\psi} + \dot{\vartheta}$$

于是, 弹体坐标系 $Ox_1y_1z_1$ 相对于地面坐标系的转动角速度 ω 可写成

$$\omega = \omega' + \dot{\gamma} \quad (2-109)$$

式中 $\dot{\gamma}$ ——低速滚转导弹绕弹体纵轴的自旋角速度。

采用推导非滚转导弹绕质心转动的动力学方程的方法, 则有

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\delta H}{\delta t} + \omega' \times H = M + M_p \quad (2-110)$$

$$\frac{\delta H}{\delta t} = J_{x_4} \frac{d\omega_{x_4}}{dt} i_4 + J_{y_4} \frac{d\omega_{y_4}}{dt} j_4 + J_{z_4} \frac{d\omega_{z_4}}{dt} k_4 \quad (2-111)$$

$$\omega' \times H = \begin{vmatrix} i_4 & j_4 & k_4 \\ \omega'_{x_4} & \omega'_{y_4} & \omega'_{z_4} \\ J_{x_4} \omega_{x_4} & J_{y_4} \omega_{y_4} & J_{z_4} \omega_{z_4} \end{vmatrix} \quad (2-112)$$

式中

$$\begin{bmatrix} \omega'_{x_4} \\ \omega'_{y_4} \\ \omega'_{z_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{x_4} - \dot{\gamma} \\ \omega_{y_4} \\ \omega_{z_4} \end{bmatrix} \quad (2-113)$$

式(2-113)代入式(2-112)中, 展开后得

$$\begin{aligned} \omega' \times H = & (J_{x_4} - J_{y_4}) \omega_{x_4} \omega_{y_4} i_4 + [(J_{x_4} - J_{z_4}) \omega_{x_4} \omega_{z_4} + \\ & J_{z_4} \omega_{z_4} \dot{\gamma}] j_4 + [(J_{y_4} - J_{x_4}) \omega_{y_4} \omega_{x_4} - J_{y_4} \omega_{y_4} \dot{\gamma}] k_4 \end{aligned} \quad (2-114)$$

式(2-111)、式(2-114)代入式(2-110)中, 最后得低速滚转导弹绕质心转动的动力学标量方程

$$\left. \begin{aligned} J_{x_4} \frac{d\omega_{x_4}}{dt} + (J_{x_4} - J_{y_4}) \omega_{x_4} \omega_{y_4} &= M_{x_4} + M_{cx_4} \\ J_{y_4} \frac{d\omega_{y_4}}{dt} + (J_{x_4} - J_{z_4}) \omega_{x_4} \omega_{z_4} + J_{z_4} \omega_{z_4} \dot{\gamma} &= M_{y_4} + M_{cy_4} \\ J_{z_4} \frac{d\omega_{z_4}}{dt} + (J_{y_4} - J_{x_4}) \omega_{y_4} \omega_{x_4} - J_{y_4} \omega_{y_4} \dot{\gamma} &= M_{z_4} + M_{cz_4} \end{aligned} \right\} \quad (2-115)$$

式中 M_{x_4} 、 M_{y_4} 、 M_{z_4} ——分别为作用在导弹上除操纵力之外所有外力(含推力)对质心的力矩在准弹体坐标系各轴上的分量;

M_{cx_4} 、 M_{cy_4} 、 M_{cz_4} ——分别为操纵力矩在准弹体坐标系各轴上的分量。

3. 导弹的运动学方程

描述低速滚转导弹质心运动的运动学方程与式(2-48)相同。

下面建立描述低速滚转导弹绕质心转动的运动学方程

$$\begin{aligned} \omega &= \omega' + \dot{\gamma} = \dot{\psi} + \dot{\vartheta} + \dot{\gamma} \\ \begin{bmatrix} \omega_{x_4} \\ \omega_{y_4} \\ \omega_{z_4} \end{bmatrix} &= L(\vartheta, \psi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\gamma} + \dot{\psi} \sin \vartheta \\ \dot{\psi} \cos \vartheta \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \vartheta & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \sin \vartheta & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \omega_{x_4} \\ \omega_{y_4} \\ \omega_{z_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\tan \vartheta & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos \vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{x_4} \\ \omega_{y_4} \\ \omega_{z_4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

于是, 低速滚转导弹绕质心转动的运动学方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_{x_4} - \omega_{y_4} \tan\vartheta \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{1}{\cos\vartheta} \omega_{y_4} \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_{z_4} \end{aligned} \right\} \quad (2-116)$$

4. 几何关系方程

对低速滚转导弹需要补充的 3 个几何关系方程, 其推导方法与本章推导非滚转导弹的几何关系方程的方法相同。

若将地面坐标系视为参考系, Oz_4 轴和 Ox_2 轴为过参考系原点的两条直线, 则利用式(2-54)和方向余弦表 2-2、表 2-5、表 2-6 得到

$$\sin\beta^* = \cos\theta \sin(\psi - \psi_v) \quad (2-117)$$

同理, 可得到另外两个几何关系方程:

$$\sin\gamma_v^* = \tan\beta^* \tan\theta \quad (2-118)$$

$$\alpha^* = \vartheta - \arcsin(\sin\theta/\cos\beta^*) \quad (2-119)$$

5. 低速滚转导弹运动方程组

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= P \cos\alpha^* \cos\beta^* - X - mg \sin\theta + \frac{2}{\pi} F_c (K_x \sin\beta^* - K_y \sin\alpha^* \cos\beta^*) \\ mV \frac{d\theta}{dt} &= P (\sin\alpha^* \cos\gamma_v^* + \cos\alpha^* \sin\beta^* \sin\gamma_v^*) + Y \cos\gamma_v^* - Z \sin\gamma_v^* - mg \cos\theta + \frac{2}{\pi} F_c \cdot \\ &\quad [K_y (\cos\alpha^* \cos\gamma_v^* - \sin\alpha^* \sin\beta^* \sin\gamma_v^*) - K_x \sin\gamma_v^* \cos\beta^*] \\ - mV \cos\theta \frac{d\psi_v}{dt} &= P (\sin\alpha^* \sin\gamma_v^* - \cos\alpha^* \sin\beta^* \cos\gamma_v^*) + Y \sin\gamma_v^* + Z \cos\gamma_v^* + \frac{2}{\pi} F_c [K_y (\sin\alpha^* \sin\beta^* \cos\gamma_v^* + \cos\alpha^* \sin\gamma_v^*) + K_x \cos\gamma_v^* \cos\beta^*] \\ J_{x_4} \frac{d\omega_{x_4}}{dt} &= M_{x_4} + M_{cx_4} - (J_{z_4} - J_{y_4}) \omega_{x_4} \omega_{y_4} \\ J_{y_4} \frac{d\omega_{y_4}}{dt} &= M_{y_4} + M_{cy_4} - (J_{x_4} - J_{z_4}) \omega_{x_4} \omega_{z_4} - J_{z_4} \omega_{x_4} \dot{\gamma} \\ J_{z_4} \frac{d\omega_{z_4}}{dt} &= M_{z_4} + M_{cz_4} - (J_{y_4} - J_{x_4}) \omega_{y_4} \omega_{x_4} + J_{y_4} \omega_{y_4} \dot{\gamma} \\ \frac{dx}{dt} &= V \cos\theta \cos\psi_v \\ \frac{dy}{dt} &= V \sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (2-120)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dz}{dt} &= -V \cos \theta \sin \phi_V \\
 \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_{x_4} - \omega_{y_4} \tan \vartheta \\
 \frac{d\phi}{dt} &= \frac{1}{\cos \vartheta} \omega_{y_4} \\
 \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_{z_4} \\
 \frac{dm}{dt} &= -m_c \\
 \beta^* &= \arcsin[\cos \theta \sin(\psi - \phi_V)] \\
 \alpha^* &= \vartheta - \arcsin(\sin \theta / \cos \beta^*) \\
 \gamma_V^* &= \arcsin(\tan \beta^* \tan \theta) \\
 \phi_1 &= 0 \\
 \phi_2 &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad \text{续(2-120)}$$

式中 K_y 、 K_z ——分别为俯仰指令系数和偏航指令系数；
 F_c ——操纵力。

$$M_{cx_4} = 0$$

$$M_{cy_4} = K_z \frac{2}{\pi} F_c (x_P - x_G)$$

$$M_{cz_4} = -K_y \frac{2}{\pi} F_c (x_P - x_G)$$

$$M_{x_4} = (m_{x_4 0} + \bar{m}_{x_4}^{\omega_{x_4}} \bar{\omega}_{x_4} + \bar{m}_{x_4}^{\omega_{y_4}} \bar{\omega}_{y_4} + \bar{m}_{x_4}^{\omega_{z_4}} \bar{\omega}_{z_4}) q S l$$

$$M_{y_4} = (\bar{m}_{y_4}^{\beta^*} \beta^* + \bar{m}_{y_4}^{\omega_{y_4}} \bar{\omega}_{y_4} + \bar{m}_{y_4}^{\omega_{x_4}} \bar{\omega}_{x_4}) q S L_B$$

$$M_{z_4} = (\bar{m}_{z_4}^{\alpha^*} \alpha^* + \bar{m}_{z_4}^{\omega_{z_4}} \bar{\omega}_{z_4} + \bar{m}_{z_4}^{\omega_{x_4}} \bar{\omega}_{x_4}) q S L_B$$

其中 $\bar{m}_{y_4}^{\omega_{x_4}}$ 、 $\bar{m}_{x_4}^{\omega_{x_4}}$ ——马格努斯力矩系数的导数；

$\bar{m}_{x_4}^{\omega_{y_4}}$ 、 $\bar{m}_{x_4}^{\omega_{z_4}}$ ——交叉力矩系数的导数；

$M_{x_4 0}$ ——导弹上、下(或左、右)外形不对称引起的滚动力矩系数；

x_P ——弹体顶点至操纵力 F_c 的作用点之间的距离；

x_G ——弹体顶点至导弹质心的距离；

l ——导弹的翼展；

L_B ——导弹弹身长度。

§ 2-9 导弹运动方程组的数值解法

描述导弹在空间的运动方程组中，在一般情况下，方程右边是运动参数的非线性函数，因此，导弹运动方程组是非线性的一阶常微分方程组。这样一组方程，通常得不到解析解，只

有在一些十分特殊的情况下，通过大量简化，方能求出近似方程的解析解。但是，在导弹的弹道研究中进行比较精确的计算时，往往不允许进行过分的简化。因此，工程上多运用数值积分方法求解这一微分方程组。数值积分的特点在于可以获得导弹各运动参数的变化规律，但它只可能获得相应于某些初始条件下的特解，而得不到包含任意常数的一般解。在数值积分时，选取适当的步长，逐步积分计算，计算量一般是很大的。目前广泛采用数字计算机来解算导弹的弹道问题。数字计算机能在一定的精度范围内获得微分方程的数值解。计算工作量很大的一条弹道在数字计算机上很快就能算出结果，这为弹道的分析研究工作提供了十分便利的条件。

一、微分方程数值积分

采用数值积分法，常用的方法基本上有三类，即单步法、多步法和预测校正法。这些方法在数值分析教程中都有详细介绍。在数字计算机上常用的微分方程的数值解法有欧拉(Euler)法、龙格-库塔(Runge—Kutta)法和阿当姆斯(Adams)法，这里仅给出其计算式。

1. 欧拉法

欧拉法属于单步法，是最简单的数值积分方法。

设有一组常微分方程

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

若已知 t_k 瞬时的参数值 $(x_1)_k, (x_2)_k, \dots, (x_n)_k$ ，则可计算出该瞬时的右函数值 $(f_1)_k, (f_2)_k, \dots, (f_n)_k$ ，亦即求得各参数在 t_k 时刻的变化率 $\left(\frac{dx_1}{dt}\right)_k, \left(\frac{dx_2}{dt}\right)_k, \dots, \left(\frac{dx_n}{dt}\right)_k$ 。欲求瞬时 $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ 参数值，用欧拉法可由下式求得

$$\begin{aligned}(x_1)_{k+1} &= (x_1)_k + \left(\frac{dx_1}{dt}\right)_k \Delta t = (x_1)_k + (f_1)_k \Delta t \\ (x_2)_{k+1} &= (x_2)_k + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)_k \Delta t = (x_2)_k + (f_2)_k \Delta t \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ (x_n)_{k+1} &= (x_n)_k + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)_k \Delta t = (x_n)_k + (f_n)_k \Delta t\end{aligned}$$

依此类推，有了 t_{k+1} 瞬时的参数 $(x_1)_{k+1}, (x_2)_{k+1}, \dots, (x_n)_{k+1}$ 的数值之后，又可以求得 $t_{k+2} = t_{k+1} + \Delta t$ 瞬时的参数值 $(x_1)_{k+2}, (x_2)_{k+2}, \dots, (x_n)_{k+2}$ ，如此循环下去，就可以求得任意时刻的参数值。一般作法是：由前一时刻 t_k 的数值 $(x_i)_k$ 就可以求出后一时刻 t_{k+1} 的数值 $(x_i)_{k+1}$ ($i=1, 2, \dots, n$)。这种方法称为单步法。由于它可以直接由微分方程已知的初值 $(x_i)_0$ 作为它递推计算

时的初值，而不需要其他信息，因此它是一种自启动的算法。

误差是欧拉数值积分法本身固有的。从欧拉法可以清楚地看出，微分方程的数值解实质上就是以有限的差分来近似地表示精确解，或者说，是用一条折线来逼近精确解，故欧拉法有时也称为折线法。欧拉法的积分误差是比较大的。若积分步长 Δt 减小，其误差也减小。

2. 龙格-库塔法

欧拉法的特点是简单易行，但精度低。在同样计算步长的条件下，龙格-库塔法的计算精度要比欧拉法高，但计算工作量要比欧拉法大，其计算方法如下：

设有一阶微分方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

若已知 t_k 时刻的参数值 x_k ，则可用龙格-库塔法求 $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ 时刻的 x_{k+1} 的近似值。四阶龙格-库塔公式为

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$K_1 = \Delta t \cdot f(t_k, x_k)$$

$$K_2 = \Delta t \cdot f\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}, x_k + \frac{1}{2}K_1\right)$$

$$K_3 = \Delta t \cdot f\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}, x_k + \frac{1}{2}K_2\right)$$

$$K_4 = \Delta t \cdot f(t_k + \Delta t, x_k + K_3)$$

四阶龙格-库塔法每积分一个步长，需要计算四次右端函数值，并将其线性组合求出被积函数的增量 Δx_k 。四阶龙格-库塔法除了精度较高外，还易于编制计算程序，改变步长方便，也是一种自启动的单步数值积分方法。

3. 亚当姆斯预估-校正法

亚当姆斯预估-校正法的递推计算公式为：

预估公式

$$x_{k+1} = x_k + \frac{\Delta t}{24}(55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3})$$

校正公式

$$x_{k+1} = x_k + \frac{\Delta t}{24}(9f_{k+1} + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2})$$

由上述公式看出：用亚当姆斯预估-校正公式求解 x_{k+1} 时，需要知道 $t_k, t_{k-1}, t_{k-2}, t_{k-3}$ 各时刻的 $f(t, x)$ 值。所以，亚当姆斯法又称为多步型的算法。这种算法不是自启动的，它必须用其他方法先获得所求时刻以前多步的解。

利用亚当姆斯预估-校正方法进行数值积分时，一般先用龙格-库塔法自启动，算出前四步的积分结果，然后再利用亚当姆斯预估-校正法进行迭代计算，这是一种比较有效的方法。龙格-库塔法每积分一步需要计算四次右端函数值，计算量大，但该方法可以自启动。而亚当姆斯法每积分一步，只需要计算两次右端函数值，迭代计算量少，但是，不能自启动。因此，把这两种数值积分法的优点结合起来，其效果是比较理想的。

总之，对一个微分方程(或微分方程组)进行数值积分时，数值积分方法的选取通常需要

考虑的因素有：积分精度、计算速度、数值解的稳定性等。这些问题在数值分析教程中都有比较详细的讨论。

二、运动方程组的数值积分举例

利用计算机编程求解运动方程组，必须首先选定计算方案，它包括数学模型、原始数据、计算方法、计算步长、初值及初始条件、计算要求等。不同的设计阶段，不同的设计要求，其所选取的计算情况是不相同的。如在方案设计阶段，通常选用质点弹道计算的数学模型，计算步长以弹道计算结果不发散为条件而定。而在设计定型阶段，应采用空间弹道的数学模型，计算用的原始数据必须经多次试验确认后的最可信数据，计算条件及计算要求则要根据导弹设计定型的有关文件要求确定。

求解运动方程组的一般步骤是：

1. 建立数学模型

现以在铅垂平面内无控飞行的运动方程组为例，假设它的数学模型为

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= P \cos \alpha - X - G \sin \theta \\ mV \frac{d\theta}{dt} &= P \sin \alpha + Y - G \cos \theta \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} &= M_z^a + M_z^{\bar{\omega}} \bar{\omega}_z \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_z \\ \frac{dx}{dt} &= V \cos \theta \\ \frac{dy}{dt} &= V \sin \theta \\ \frac{dm}{dt} &= -m_c \\ \alpha &= \vartheta - \theta \end{aligned} \right\} \quad (2-121)$$

2. 准备原始数据

求解导弹运动方程组，必须给出所需的原始数据，它们一般来源于总体初步设计、估算和实验结果。这些原始数据可能是以曲线或表格函数的形式给出，也可以用拟合的表达式给定。对运动方程组(2-121)进行数值积分，应当给出如下原始数据：

(1) 标准大气参数，包括大气密度 ρ 、声速 C 以及重力加速度 g 。

(2) 导弹气动力和气动力矩有关的数据，包括阻力系数 c_x 、升力系数 c_y 随攻角 α 和马赫数 M_a 变化的关系曲线或相应的表格函数；静稳定力矩系数导数 m_z^a 随攻角 α 、 M_a 数及质心位置 x_G 变化的关系曲线或相应的表格函数；以及阻尼力矩系数导数 $m_z^{\bar{\omega}}$ 随攻角 α 和 M_a 数变化的关系曲线或相应的表格函数。

(3) 推力 $P(t)$ 、燃料质量流量 $m_c(t)$ 、质心位置 $x_G(t)$ 和转动惯量 $J_z(t)$ 的表格函数或相应的数学表达式。

(4) 导弹的外形几何尺寸、特征面积和特征长度。

(5) 积分初始条件, 即 t_0 、 V_0 、 θ_0 、 ω_{z_0} 、 ϑ_0 、 x_0 、 y_0 、 m_0 、 α_0 等的值。

3. 空气动力和空气动力矩表达式

$$X = c_x \frac{1}{2} \rho V^2 S$$

$$Y = c_y \frac{1}{2} \rho V^2 S$$

$$M_z = M_z^a \alpha + M_z^{\bar{\omega}_z} \bar{\omega}_z = (m_z^a \alpha + m_z^{\bar{\omega}_z} \bar{\omega}_z) \frac{1}{2} \rho V^2 S L$$

其中

$$m_z^a = (m_z^a)_{x_G=x_{G0}} + c_y(x_G - x_{G0})/\alpha L$$

$(m_z^a)_{x_G=x_{G0}}$ 表示在质心位置为 x_{G0} 时的静稳定性导数值。

L 为特征长度。

4. 确定数值积分方法并选取积分步长

利用计算机编程求解时, 通常采用龙格-库塔法或阿当姆斯法进行积分。本算例采用四阶龙格-库塔法。积分方法确定以后, 选择合适的积分步长, 积分步长也可以在程序运算过程中, 根据不同步长下的积分结果精度比较来选取。

5. 编制计算程序

弹道计算的算法采用各种常规的算法, 采用 FORTRAN 语言、C 语言。计算程序采用模块化结构, 便于各模块分别调试, 最后联调, 以缩短整个程序的调试时间。当然, 并非每种弹道计算都要采用计算模块结构, 例如, 在初始设计阶段, 数学模型作了简化, 计算情况也相对比较简单。

本例用 C 语言编制求解方程组(2-121)的程序, 源程序见附录一。现对程序说明如下: 该程序由 8 个函数组成, 各函数之间的调用关系如图 2-27 所示。这些函数包括:

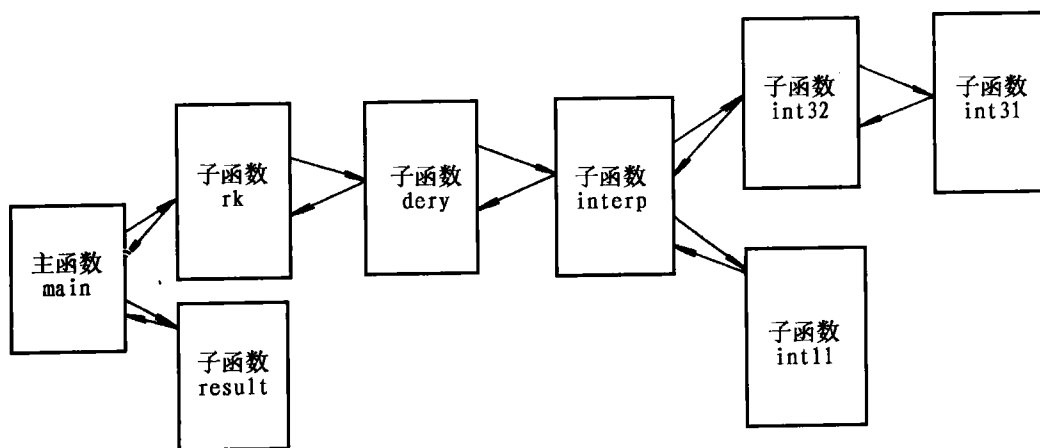


图 2-27 各函数之间的调用关系示意图

(1) 主函数 main, 其主要功能是读入原始数据, 调用 rk 子函数进行弹道积分, 并调用 result 子函数记录计算结果。

(2) 龙格-库塔子函数 rk, 是龙格-库塔积分算法子函数, 其中调用右端函数 dery 子函数。

(3) result 子函数, 用于记录积分计算的结果, 将积分结果写入输出数据文件中。

(4) 右端函数 dery 子函数, 用于计算方程组(2-121)的右端函数, 其中调用了插值子函数 interp。

(5) 插值子函数 interp, 所有需要插值的参数都集中在该函数中计算, 其中调用子函数 int11 和 int32。

(6) 不等距单变元线性插值子函数 int11, 主要用于转动惯量 J_z 、质心位置 x_G 、推力 P 等单变量函数的插值。

(7) 等距双变元抛物线——线性插值子函数 int32, 主要用于气动力系数 c_x 、 c_y , 气动力矩系数 m_z^a 、 m_z^{ω} 等双变量函数的插值, 该函数调用插值子函数 int31。

(8) 等距单变元抛物线插值子函数 int31, 被 int32 调用, 完成子函数 int32 的抛物线插值功能。

关于程序中出现的数组和变量名, 作如下说明:

ACX[5][6]: 阻力系数数组;

ACY[5][6]: 升力系数数组;

AMZAF[5][6]: 某一质心位置下的静稳定性导数数组;

AMZWZ[5][2]: 阻尼力矩系数导数数组。

这些数组的表格形式如下表 2-9 所示。

表 2-9

α_{ij} α	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
M						
M_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
M_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}
M_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}
M_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}
M_5	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	a_{56}

AXG[11][2]: 质心位置 x_G 随时间的变化规律;

AJZ[3][2]: 转动惯量 J_z 随时间的变化规律。

它们的表格函数形式如表 2-10 所示。

表 2-10

b_{11}	b_{12}
b_{21}	b_{22}
b_{31}	b_{32}
$\vdots$	$\vdots$
b_{n1}	b_{n2}

AP[2]: 起飞、续航发动机的推力值;

AMC[2]: 起飞、续航发动机的燃料质量秒流量值;

AGC[2]: 质心位置变化的始末值;

ANDM[2]: 气动数据插值所需的 Ma 数的最小、最大值;

ANDAF[2]: 气动数据插值所需的攻角 α 的最小、最大值;

Y[8]: 存放积分结果的数组, 该数组在程序开始时存放积分初值;

dy[8]: 存放右端函数值的数组;

B[3]: 存放三个时间值的数组, 其中 B[0]存放导弹离轨时间; B[1]存放起飞发动机工作结束时间; B[2]存放续航发动机工作结束时间。

程序中的其他数组都是存放中间结果的数组。

程序中其他的一些主要变量名有

L——特征长度；

S——特征面积；

SONIC——声速 C ；

RHO——大气密度 ρ ；

h——积分步长。

其他变量名都是工作过程变量。

运行该程序，得到弹道曲线、速度曲线和攻角曲线分别见图 2-28、2-29 和 2-30。

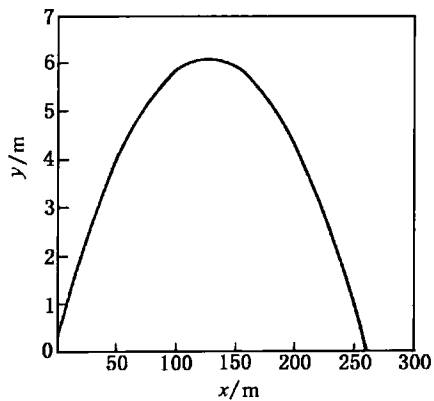


图 2-28 求解方程组(2-121)所得弹道曲线

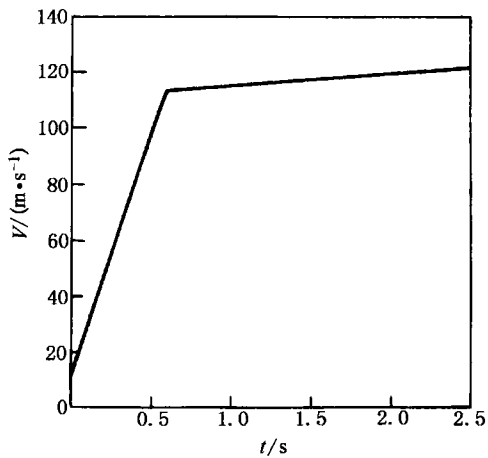


图 2-29 求解方程组(2-121)所得的 $V(t)$ 曲线

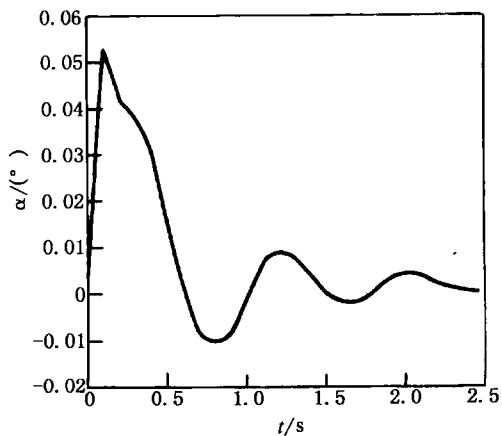


图 2-30 求解方程组(2-121)所得的 $\alpha(t)$ 曲线

第三章 方案飞行弹道

导弹的弹道可分为两大类，一类是方案弹道；另一类是导引弹道。本章介绍导弹的方案飞行弹道。

所谓飞行方案，是指设计弹道时所选定的某个运动参数随时间的变化规律。运动参数是指俯仰角 $\vartheta_*(t)$ 、攻角 $\alpha_*(t)$ 、弹道倾角 $\theta_*(t)$ 或高度 $H_*(t)$ 等。在这类导弹上，一般装有一套按所选定的飞行方案设计的程序自动控制装置，导弹飞行时的舵面偏转规律，就是由这套装置来实现的。因此，飞行方案选定以后，导弹在空间的飞行轨迹将由此而确定。也就是说，导弹发射出去后，它的飞行轨迹就不能随意变更。这类自动实现飞行方案的属于自主控制导弹。导弹按预定的飞行方案所作的飞行称为方案飞行。它所对应的飞行弹道称为方案弹道。

飞行方案设计也就是导弹飞行轨迹设计。飞行方案设计的主要依据是使用部门提出的战术技术指标和使用要求。如装载发射载体、攻击目标类型、射程、巡航速度和高度、制导体制、动力系统体制、导弹的几何尺寸及发射质量等。当要求同一导弹可以从地面固定发射装置、地面车辆、飞机、水面舰艇、潜艇等多种载体上发射，因此，在飞行方案设计时，应掌握各种发射载体的运动特性、结构性能。不同目标有着不同的特性，因此，飞行方案设计时，必须搞清攻击对象，掌握目标的物理特性，从而选用最有效的攻击方式。

进行飞行方案设计时，还必须掌握导弹自身的总体特性。如导弹外形尺寸、质量、气动参数、动力系统的性能参数、控制体制、制导方式等。只有掌握导弹总体特性后，才能扬长避短，充分发挥各系统功能，优选出最为理想的飞行方案。

方案飞行的情况是经常遇到的。例如，弹道式导弹攻击地面上静止的目标，其主动段通常按方案飞行。许多导弹的弹道除了导向目标的导引段之外，也具有方案飞行段。例如，飞航式导弹在攻击静止或运动缓慢的地面各种类型的目标（如桥梁、铁路枢纽、机场、雷达站、港口、工厂、城市设施、坦克群、军队集结地等）或海上目标（如军舰、运输船、潜艇等）时，其弹道的爬升段（或称初始段）和平飞段就是方案飞行段（如图 3-1 所示）。反坦克导弹的某些飞行段也有按方案飞行的。一些垂直发射的地-空导弹的初始段也有采用方案飞行的。此外，方案飞行在一些无人驾驶靶机、侦察机上也被广泛地采用。

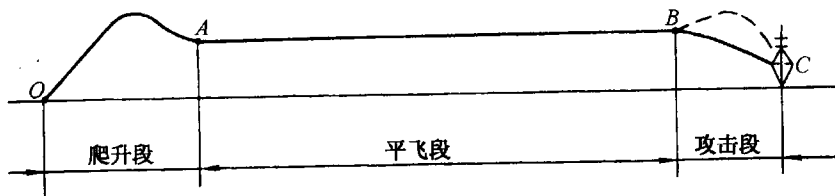


图 3-1 飞航式反舰导弹的弹道分段

§ 3-1 爬升段的方案飞行

飞航式导弹一般用在“岸对舰”、“舰对舰”、“空对地”等类型的导弹上。无论“岸（舰）对

舰”导弹从地面爬升至预定高度的爬升段，还是“空对地”导弹从载机上发射起到进入预定的飞行高度的下滑段，其运动的控制常常采用方案飞行的方法，且一般是控制导弹在一个固定不变的铅垂平面内飞行。

一、铅垂平面内的导弹运动方程组

若地面坐标系的 Ax 轴选取在飞行平面内，则导弹质心的坐标 z 和弹道偏角 ψ_v 恒等于零。假定导弹的纵向对称面 Ox_1y_1 始终与飞行平面重合，则速度倾斜角 γ_v 和侧滑角 β 也等于零。这样，导弹在铅垂面内的质心运动方程组为

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= P \cos \alpha - X - mg \sin \theta \\ mV \frac{d\theta}{dt} &= P \sin \alpha + Y - mg \cos \theta \\ \frac{dx}{dt} &= V \cos \theta \\ \frac{dy}{dt} &= V \sin \theta \\ \frac{dm}{dt} &= -m_c \\ \epsilon_1 &= 0 \\ \epsilon_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

方程组(3-1)中含有7个未知参数： V 、 θ 、 x 、 y 、 m 、 α 、 δ_P (或 P)。

铅垂平面内的方案飞行取决于飞行速度的方向，其理想控制关系式为 $\epsilon_1=0$ ；发动机的工作状态直接影响飞行速度大小，其理想控制关系式为 $\epsilon_4=0$ 。

飞行速度的方向直接用弹道倾角 $\theta_*(t)$ 给出，或者间接地用俯仰角 $\vartheta_*(t)$ 、攻角 $\alpha_*(t)$ 、法向过载 $n_{y_2}*(t)$ 、爬升率 $\dot{H}_*(t)$ 等给出。

如果导弹采用火箭发动机，则燃料的质量流量 m_c 为已知（在许多情况下 m_c 是常值）；发动机的推力 P 仅与飞行高度有关，在计算弹道时，它们之间的关系通常也是给定的。因此，采用火箭发动机的情况下，方程组(3-1)中的第五式和第七式可以分别用已知的关系式 $m(t)$ 和 $P(t, y)$ 代替。

对于空气喷气发动机（飞航式导弹多采用这种发动机）， m_c 和 P 不仅与飞行速度和高度有关，而且还与发动机工作状态有关。因此，方程组(3-1)中必须给出约束方程 $\epsilon_4=0$ 。但在弹道计算时，常用发动机产生额定推力的情况，而燃料的质量流量取其平均值（即取常值）。这时，方程组(3-1)中的第五式和第七式仍可以去掉。

下面分别讨论理论上可能采取的各种飞行方案的理想控制关系式。

1. 给定弹道倾角的变化规律 $\theta_*(t)$

如果给出弹道倾角的变化规律 $\theta_*(t)$ ，则理想控制关系式为

$$\epsilon_1 = \theta(t) - \theta_*(t) = 0$$

即

$$\theta(t) = \theta_*(t)$$

或

$$\epsilon_1 = \dot{\theta}(t) - \dot{\theta}_*(t) = 0$$

式中 $\theta_*(t)$ ——设计中所选择的飞行方案。

选择飞行方案是为了使导弹按所要求的弹道飞行。例如，飞航式导弹以 θ_0 发射并逐渐爬升，然后转入平飞 ($\theta=0$)，这时飞行方案 $\theta_*(t)$ 可以设计成各种变化规律。如可以设计成直线 (如图 3-2 中 a)，也可以设计成曲线 (如图 3-2 中 b 、 c)。

2. 给定俯仰角的变化规律 $\vartheta_*(t)$

如果给出俯仰角的变化规律 $\vartheta_*(t)$ ，则理想控制关系式为

$$\epsilon_1 = \vartheta(t) - \vartheta_*(t) = 0$$

即

$$\vartheta(t) = \vartheta_*(t)$$

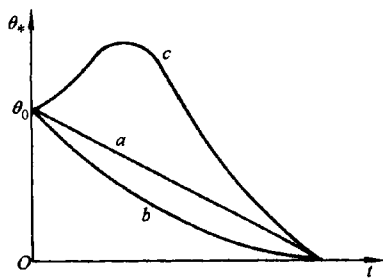


图 3-2 爬升段 $\theta_*(t)$ 曲线示意图

为了计算导弹的弹道，还需在方程组 (3-1) 中引入几何关系方程

$$\alpha = \vartheta - \theta$$

3. 给定攻角的变化规律 $\alpha_*(t)$

给定攻角的变化规律 $\alpha_*(t)$ ，是为了使导弹爬升得最快，即希望飞行所需的攻角始终等于允许的最大值 $\alpha_{\max}$ ；或者是为了防止需用法向过载超过可用法向过载值而对攻角加以一定的限制；若导弹是采用冲压式发动机，为了能正常工作，攻角也要限制在一定范围内。

如果给定攻角的变化规律 $\alpha_*(t)$ ，则理想控制关系式为

$$\epsilon_1 = \alpha(t) - \alpha_*(t)$$

即

$$\alpha(t) = \alpha_*(t)$$

4. 给定法向过载的变化规律 $n_{y_2*}(t)$

给定法向过载的变化规律 $n_{y_2*}(t)$ ，往往是为了保证导弹的强度，其理想控制关系式可表示为

$$\epsilon_1 = n_{y_2}(t) - n_{y_2*}(t) = 0$$

即

$$n_{y_2}(t) = n_{y_2*}(t)$$

由第二章中知道，平衡条件下，导弹的法向过载 n_{y_2B} 可表示为

$$n_{y_2B} = \frac{(P + Y^a)\alpha_B}{G}$$

即

$$\alpha_B = \frac{G n_{y_2B}}{P + c_y^a \frac{1}{2} \rho V^2 S}$$

根据力矩平衡条件可求得升降舵平衡偏角 $\delta_{zB}(t)$ 与法向过载 $n_{y_2B}(t)$ 之间的关系

$$\delta_{zB}(t) = -\frac{m_z^a}{m_{\delta_z^a}} \alpha_B = -\frac{m_z^a}{m_{\delta_z^a}} \frac{G n_{y_2B}(t)}{P + c_y^a \frac{1}{2} \rho V^2 S}$$

从上式可以看出，对于法向过载的限制，可以通过对攻角或升降舵偏角的限制的方法来实现。

5. 给定爬升率 $\dot{H}_*(t)$

如果给出爬升率的变化规律 $\dot{H}_*(t)$ ，则理想控制关系式为

$$\epsilon_1 = \dot{H}(t) - \dot{H}_*(t) = 0$$

即

$$\frac{dy}{dt} = \dot{H}_*(t)$$

$\dot{H}_*(t)$ 的变化规律可以设计成各种各样的形状,例如可以是一常值(如图 3-3 中 a 所示),也可以是变值(如图 3-3 中 b 所示)。

二、爬升段按给定俯仰角的方案飞行

为了使导弹按预定的规律爬高,在理论上可以给出攻角变化规律 $\alpha_*(t)$ 、弹道倾角变化规律 $\theta_*(t)$ 、俯仰角变化规律 $\vartheta_*(t)$ 、高度变化规律 $\dot{H}_*(t)$,选取上述几种规律中的一种或几种,均可实现爬升段的弹道设计。事实上,用于导弹上的攻角传感器测量精度较差,

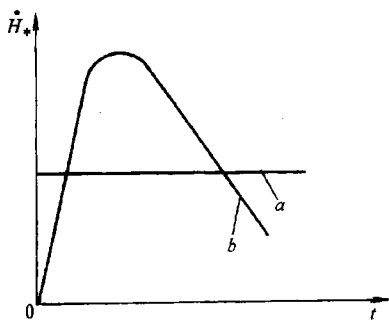


图 3-3 $\dot{H}_*(t)$ 曲线示意图

不能满足控制精度的要求,且结构安装带来一定的麻烦。虽然根据预定的爬升规律可以计算求得导弹的弹道倾角,但也存在一定的误差,而直接测量弹道倾角的设备目前还没有可能应用于导弹上。因此,在飞航式导弹上,通常采用程序俯仰角、程序高度等来实现爬升段的方案控制。

当前,飞航式导弹上采用的自动驾驶仪控制系统或惯性控制系统,均能实时提供导弹的俯仰角 ϑ 。因此,可以设计合理的程序俯仰角,使导弹俯仰角按程序俯仰角飞行,即以导弹的实际俯仰角与程序俯仰角之差值作为控制信号来控制导弹的爬升飞行。

在进行程序俯仰角设计时,应充分考虑到导弹发射基座的特性、初始发射角的限制、最小射程的要求、最大高度点的限制等条件;同时还应考虑导弹自身的特性,如受结构限制、过载范围限制、发动机工作特性要求导弹攻角变化范围不宜太大;程序俯仰角在弹上实现的可能性等。

程序俯仰角在弹上的实现,视导弹采用的控制系统的不同而不同。对于自动驾驶仪控制系统,程序俯仰角可以装在俯仰自由陀螺的基盘上;对惯性控制系统,可在弹上综合控制计算机中编排上程序俯仰角规律。

飞航式导弹典型程序俯仰角的变化规律为

$$\vartheta_* = \begin{cases} \vartheta_0 & t < t_1 \\ (\vartheta_0 - \vartheta_p)e^{-\frac{(t-t_1)}{K}} + \vartheta_p & t_1 \leq t < t_2 \\ \vartheta_p & t \geq t_2 \end{cases} \quad (3-2)$$

式中 ϑ_0 ——初始俯仰角;

ϑ_p ——平飞时俯仰角;

t_1 、 t_2 ——给定的指令时间;

K ——控制参数。

描述按给定俯仰角的方案飞行的运动方程组为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{P \cos \alpha - X}{m} - g \sin \theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{mV} (P \sin \alpha + Y - mg \cos \theta) \\ \frac{dx}{dt} &= V \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (3-3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= V \sin \theta \\ \frac{dm}{dt} &= -m_c \\ \alpha &= \vartheta - \theta \\ \varepsilon_1 &= \vartheta(t) - \vartheta_*(t) = 0 \\ \varepsilon_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-3) \text{ 续}$$

方程组(3-3)包含8个未知参数: $V, \theta, x, y, m, \alpha, \vartheta, \delta_P$ (或 P)，解算这组方程就能得到这些参数随时间的变化规律，同时也就得到了按给定俯仰角的方案飞行弹道。

下面讨论两个特殊飞行情况的飞行方案。

1. 直线爬升的飞行方案 $\vartheta_*(t)$

直线爬升飞行时，弹道倾角为常值，它的变化率 $d\theta/dt$ 为零。于是由方程组(3-3)的第二式可以得到

$$P \sin \alpha + Y = G \cos \theta \quad (3-4)$$

上式表明：直线爬升时，作用在导弹上的法向控制力必须和重力的法向分量平衡，而且，在飞行攻角不大的情况下，攻角可表示成

$$\alpha = \frac{G \cos \theta}{P + Y^a} \quad (3-5)$$

这样，直线爬升时的飞行方案 $\vartheta_*(t)$ 为

$$\vartheta_*(t) = \theta + \frac{G \cos \theta}{P + Y^a} \quad (3-6)$$

式中 θ 为某一常值。显然，如果按式(3-6)方案 $\vartheta_*(t)$ 飞行，导弹就能实现直线爬升。

2. 等速直线爬升

若要求导弹作等速直线爬升飞行，必须使 $\dot{V}=0, \dot{\theta}=0$ 。从方程组(3-3)的第一式和第二式可得

$$\left. \begin{aligned} P \cos \alpha - X &= G \sin \theta \\ P \sin \alpha + Y &= G \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (3-7)$$

上式表明：导弹要实现等速直线飞行，发动机推力在弹道切线方向上的分量与阻力之差必须等于重力在弹道切线方向上的分量；同时，作用在导弹上的法向控制力应等于重力在法线方向上的分量。下面就来讨论同时满足这两个条件的可能性。

假设导弹在等速直线爬升飞行过程中，发动机的推力和导弹的重量均为常值，且速度 V 和弹道倾角 θ 是已知常值。

第一章曾经指出：在导弹气动外形给定的情况下，阻力系数取决于导弹的飞行马赫数、飞行高度和攻角。对于从地面爬升的导弹来说，它的爬升高度一般不大，在此高度范围内的大气参数(如密度 ρ 和声速 C 等)可近似取海平面上的数值。于是，切向力($P \cos \alpha - X$)仅是攻角 α 的函数，它们之间的关系曲线如图3-4所示。

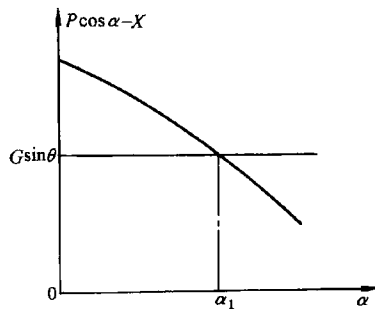


图3-4 等速爬升时需用攻角的确定

为使导弹等速爬升，必须满足方程组(3-7)的第一式。

根据上述假设, $G\sin\theta$ 为常值, 它在图 3-4 中为一条平行于横坐标的直线。因此, 图中两线的交点所对应的攻角 α_1 就是导弹作等速爬升飞行时的需用攻角。

在飞行攻角不大的情况下, 导弹直线爬升时的需用攻角由方程组(3-7)第二式可得

$$\alpha_2 = \frac{G\cos\theta}{P + Y^a} \quad (3-8)$$

由此可以得出: 导弹等速直线爬升的条件应是

$$\alpha_1 = \alpha_2 \quad (3-9)$$

实际上, 这条件是很难得到满足的。因为即使通过精心设计, 或许能找到一组参数(V 、 θ 、 P 、 G 、 c_x 、 c_y^a 等)以满足式(3-7), 可是在飞行过程中, 导弹不可避免受到各种干扰, 一旦某一参数偏离了它的设计值, 导弹就不可能真正实现等速直线飞行。更何况发动机推力和导弹重量在等速直线爬升飞行过程中并非常值, 而是随时间变化的, 特别是在发动机不能自动调节的情况下, 要使导弹时刻都严格地按等速直线爬升飞行是不可能的。即使发动机推力可以自动调节, 要实现等速直线爬升飞行也只能是近似的。

三、下滑段按给定高度的方案飞行

对空中投放攻击地面或海面目标的空对地或空对舰导弹, 导弹从投放到转入平飞的运动称为下滑段运动。为使导弹具有较好的隐蔽性和较强的突防能力, 要求导弹在脱离载机后平稳下滑, 较快地转入平飞。

目前, 飞航式导弹控制系统中都有测量飞行高度的无线电高度表、气压高度表, 因而, 完全有可能利用高度信息对导弹进行高度控制。

为使导弹较快地下滑, 并平稳地转入平飞, 通常采用指数形式的高度程序, 其表达式为

$$H_s = \begin{cases} H_1 & t < t_1 \\ (H_1 - H_2)e^{-K(t-t_1)} + H_2 & t_1 \leq t < t_2 \\ H_2 & t \geq t_2 \end{cases} \quad (3-10)$$

式中 H_1 ——下滑段起点高度;

H_2 ——导弹巡航飞行时的平飞高度;

t_1 、 t_2 ——给定的指令时间;

K ——控制常数。

H_1 、 H_2 是根据战术技术指标要求而确定的。 t_1 、 t_2 、 K 应根据战术技术指标中最小射程的要求, 使下滑过程中高度超调量小、转入平飞时间最短、下滑过程中导弹所承受的过载小于导弹结构所允许值、且导弹运动姿态不影响发动机的正常工作等综合因素来确定。

§ 3-2 平飞段方案飞行

平飞段为飞航式导弹的主要飞行段。此段特点是导弹不作大的机动飞行, 为等速等高飞行。在平飞段运动可分解为纵向运动和侧向运动加以研究和分析。

一、平飞段铅垂平面内的运动

平飞段铅垂平面内运动比较简单, 其简化运动方程组为

$$\left. \begin{aligned} P \cos \alpha &= X \\ P \sin \alpha + Y &= G \\ \frac{dx}{dt} &= V \\ \frac{dm}{dt} &= -m_c \\ \delta_z &= -\frac{m_z^a}{m_z^{\delta_z}} \alpha \end{aligned} \right\} \quad (3-11)$$

对于给定的平飞高度和速度,在气动数据 c_x 、 c_y^a 、 m_z^a 、 $m_z^{\delta_z}$ 已知情况下,可由方程组(3-11)求得使导弹保持等高等速飞行所需的推力 P 、攻角 α 、升降舵偏转角 δ_z 等。

对于绝大多数飞航式导弹,保持等高状态飞行所需的平衡攻角一般较小,由方程组(3-11)第二式可得

$$\alpha(t) = \frac{G(t)}{P + c_y^a q S} \quad (3-12)$$

上式中,无论是火箭发动机,还是喷气发动机,在等高等速飞行时,其推力的理论值为常数。在给定的速度下, c_y^a 亦为定值。惟有导弹重量 G 随着燃料的不断消耗,其值将越来越小。由于发动机推力一定,燃料质量秒消耗量也就一定,因而

$$m(t) = m_0 - m_c t$$

对应有

$$\alpha(t) = \alpha_0 - K_a t$$

由此可得出等高等速飞行时俯仰角的变化规律,即 $\vartheta(t) = \alpha(t)$ 。只要控制俯仰角按 $\vartheta(t)$ 规律变化,就能实现等高等速飞行。

实际上,由于测量导弹俯仰角的元器件的不完善性,测量结果与实际值之间存在差异。正是由于这种差异的存在,使利用姿态角控制实现等高飞行性能较差,尤其对于远程及超音速飞行的飞航式导弹更是如此。

随着测高技术的不断发展,直接利用导弹飞行的高度信息,控制导弹实现等高飞行已在飞航式导弹上得以广泛使用。

下面讨论导弹作为刚体,在非理想控制条件下实现等高飞行的高度控制,这时升降舵偏转角的变化规律为

$$\left. \begin{aligned} \Delta \delta_z &= K_{\Delta H} \Delta H \\ \Delta H &= H - H_0 \end{aligned} \right\} \quad (3-13)$$

式中 H_0 ——要求的平飞高度;

H ——实际飞行高度;

$K_{\Delta H}$ ——放大系数。

如图 3-5 所示,当实际飞行高度小于预定的平飞高度 H_0 时,高度差 $\Delta H < 0$,为使导弹增加高度以保持平飞,升降舵应产生附加偏角 $\Delta \delta_z$,在其作用下,产生一个正的附加力矩 $\Delta M_z = M_z^{\delta_z} \Delta \delta_z$ 。这个力矩使导弹抬头,因而产生了一个正的附加攻角 $\Delta \alpha$,它使导弹产生一个向上的附加升力。导弹

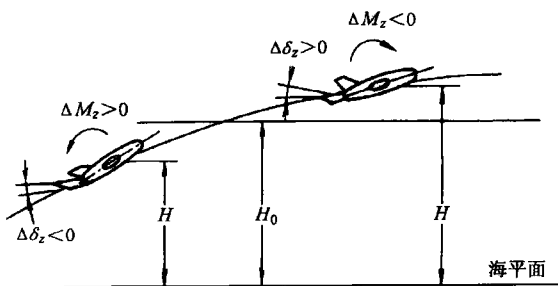


图 3-5 等高飞行

在这个附加升力的作用下,高度增加,逐渐向预定的平飞高度 H_0 逼近。反之,当导弹的实际高度大于预定的平飞高度时,高度差 $\Delta H > 0$ 。此时,应产生附加舵偏角 $\Delta \delta_z$,在其作用下,产生一个低头力矩 $\Delta M_z = M_z^0 \Delta \delta_z < 0$,并产生了一个负的附加攻角 $\Delta \alpha$,引起一个负的附加升力,从而使导弹的高度降低。

式(3-13)中的 $\Delta \delta_z$ 角度虽然是使导弹保持等高飞行所必需的,但是,由于控制系统和弹体具有惯性,导弹在预定平飞高度上将出现振荡现象(如图3-6中的虚线所示)。因此,为了使导弹能尽快地稳定在预定的平飞高度上,必须在式(3-13)中再引入一项与高度变化率 $\Delta \dot{H} = \frac{d\Delta H}{dt}$ 有关的量,即

$$\Delta \delta_z = K_{\Delta H} \Delta H + K_{\Delta \dot{H}} \Delta \dot{H} \quad (3-14)$$

式中 $K_{\Delta \dot{H}}$ ——放大系数,它表示当有单位高度变化率时升降舵所应偏转的角度。

附加舵偏转角增加了一项 $K_{\Delta \dot{H}} \Delta \dot{H}$,它将产生阻尼力矩,抑制高度变化率的数值,以减小导弹在进入预定平飞高度的飞行过程中产生的超高或掉高现象,使导弹能在预定的平飞高度上稳定地飞行,从而改善了过渡过程的品质。图3-6中的实线是由式(3-14)描述的舵面偏转规律所对应的飞行弹道。

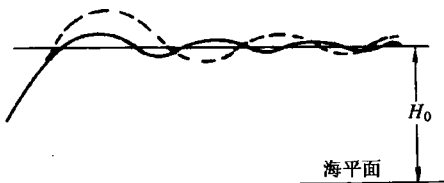


图3-6 等高飞行时的弹道

现在来讨论 $K_{\Delta H}$ 值的符号。如上所述,当导弹的实际高度小于预定的平飞高度时,即 $\Delta H < 0$,为使导弹增加高度以保持平飞,升降舵要相应地有附加偏转角,产生抬头力矩,对正常式导弹来说,升降舵附加偏转角 $\Delta \delta_z$ 应为负值;对于鸭式导弹来说,升降舵附加偏转角 $\Delta \delta_z$ 则应为正值。因此,正常式导弹, $K_{\Delta H}$ 为正值;鸭式导弹, $K_{\Delta H}$ 为负值。

上面分析了 $\Delta \delta_z = K_{\Delta H} \Delta H + K_{\Delta \dot{H}} \Delta \dot{H}$ 时导弹飞行高度的变化情况。只要放大系数 $K_{\Delta H}$ 和 $K_{\Delta \dot{H}}$ 之间的比值选择得合理,就可以很快地稳定在预定的飞行高度上,得到比较满意的过渡过程。

为了进一步改善等高飞行的品质,实现等高飞行的高度控制规律可选取

$$\Delta \delta_z = K_{\Delta H} \Delta H + K_{\Delta \dot{H}} \Delta \dot{H} + K_{\int \Delta H dt} \int \Delta H dt \quad (3-15)$$

式中 $K_{\int \Delta H dt}$ ——放大系数。

平飞高度 H_0 的确定。 H_0 一方面要根据战术技术指标的要求,另一方面要根据具体型号的作战使用背景来确定。对于攻击海面目标的空对舰、舰对舰、岸对舰导弹来说,为获得较高的突防能力,平飞高度一般小于 50 m,也可进行二次降高飞行。对于空对地导弹,由于地面情况比较复杂,其平飞高度应视作战航路上地形情况而定,也可视地形变化情况装定几个不同的平飞高度,使导弹安全、可靠、有效地攻击预定目标。

二、平飞段水平面内的运动

对于从地面或舰上发射的飞航式导弹,加速爬升段,速度变化大,纵向运动参数变化激烈,从而侧向运动在助推器工作段是不加控制的。进入主发动机工作的飞行段,才对侧向运动实施控制。由于在助推段侧向运动不控制,在各种干扰因素作用下势必造成一定的姿态和

位置偏差。如果主发动机工作一开始就把较大的偏差量作为控制量加入，极易造成侧向运动的振荡，严重时会造成发散。为避免此种由于控制不当而造成的失误，可采取下列偏航角程序信号

$$\psi_* = \begin{cases} \psi_k & t < t_k \\ \psi_k e^{-K_\psi(t-t_k)} & t_k \leq t < t_2 \\ 0 & t \geq t_2 \end{cases} \quad (3-16)$$

式中 t_k ——助推器分离时刻；

t_2 ——给定时间；

ψ_k —— t_k 时刻的偏航角；

K_ψ ——控制系数。

控制规律为

$$\delta_y = K_{\Delta\psi}(\psi - \psi_*) + K_{\Delta\dot{\psi}}\dot{\Delta\psi} \quad (3-17)$$

式中 $\Delta\psi = \psi - \psi_*$, $\Delta\dot{\psi} = \frac{d\Delta\psi}{dt}$ 。

从上式看出：正是引入了偏航角程序信号，使在主发动机工作后的起控时刻没将助推段终点时的偏航角偏差值直接引入控制，而是采取了按指数形式加入的过程，避免了因起控不当造成失控的现象发生。

为了提高导弹作战使用的效率，飞航式导弹在侧向通常都具有扇面发射能力。对于有初始扇面角的情况，同样在助推段航向运动不加控制，导弹沿初始航向角方向飞行。进入主发动机工作后，开始只进行角度控制，使导弹航向角不断改变。到一定时刻，引入质心控制，导弹航向角保持常值，在指向目标方向作直线飞行。对于采用惯性控制系统的飞航式导弹，实现上述控制是较为容易的。此时，偏航角程序信号和侧偏位置信号为

$$\psi_* = \begin{cases} \psi_0 & t < t_k \\ \psi_0 + K_{\psi_0}(t - t_k) & t_k \leq t < t_A \\ \psi_A & t \geq t_A \end{cases} \quad (3-18)$$

$$z_* = z(x) \quad (3-19)$$

控制规律为

$$\delta_y = \begin{cases} K_{\Delta\psi}(\psi - \psi_*) + K_{\Delta\dot{\psi}}\dot{\Delta\psi} & t < t_A \\ K_{\Delta\psi}(\psi - \psi_*) + K_{\Delta\dot{\psi}}\dot{\Delta\psi} + K_z(z - z_*) + K_{\int_z} \int (z - z_*) dt & t \geq t_A \end{cases} \quad (3-20)$$

式中 t_k ——助推器分离时刻；

t_A ——给定时间；

ψ_0 ——初始扇面角；

ψ_A ——给定的偏航角；

K_{ψ_0} 、 $K_{\Delta\psi}$ 、 $K_{\Delta\dot{\psi}}$ 、 K_z 、 $K_{\int_z}$ ——放大系数。

第四章 导引弹道的运动学分析

§ 4-1 概 述

按制导方法不同,弹道分为方案弹道和导引弹道。导引弹道是根据目标运动特性以某种导引方法将导弹导向目标时导弹质心运动的轨迹。空-空导弹、地-空导弹、空-地导弹的弹道以及巡航导弹的末段弹道都是导引弹道。导引方法反映导弹制导系统的工作规律。导引导弹的制导系统有自动瞄准(或称自动寻的)和遥远控制两种基本类型,也有两者兼用的,称复合制导。

所谓自动瞄准制导是由装在导弹上的敏感器(导引头)感受目标辐射或反射的能量,自动形成制导指令,控制导弹飞向目标的制导技术。自动瞄准制导系统由装在导弹上的导引头、指令计算装置和导弹控制装置组成。由于制导系统全部装在弹内,所以导弹本身装置比较复杂,但制导精度比较高。

所谓遥控制导是由制导站的测量装置和制导计算装置测量导弹相对目标的位置或速度,按预定规律加以计算处理形成制导指令,导弹接收指令,并通过姿态控制系统控制导弹,使它沿着适当的弹道飞行,直至命中目标。制导站可设在地面、空中或海上。遥控制导的优点是弹内装置较简单,作用距离较远,但制导过程制导站不能撤离,易被敌方攻击,导弹离制导站愈远时,制导精度愈差。

导引弹道的特性主要取决于导引方法和目标的运动特性。对于已经确定的某种导引方法,导弹导引弹道的主要研究内容有弹道过载、导弹速度、飞行时间、射程和脱靶量等,这些参数最终影响导弹的命中率。

根据导弹和目标的运动学关系可把导引方法按下列情况来分类:

- (1) 根据导弹速度矢量与目标线(导弹-目标连线,又称视线)的相对位置分为追踪法(两者重合)、常值前置角法(导弹速度矢量超前一个常值角度)等;
- (2) 根据目标线在空间的变化规律分为平行接近法(目标线在空间只作平行移动)、比例导引法(导弹速度矢量的转动角速度与目标线的转动角速度成比例)等;
- (3) 根据导弹纵轴与目标线的相对位置分为直接法(两者重合)、常值目标方位角法(导弹纵轴超前一个常值角度)等;
- (4) 根据“制导站-导弹”连线与“制导站-目标”连线的相对位置分为三点法(两连线重合)、前置量法(“制导站-导弹”连线超前,前置量法又称角度法)。

对导引弹道的研究是以经典力学定律为基础的。在导弹和制导系统初步设计阶段,为了简化研究,通常采用运动学分析方法。它是基于以下假设:①导弹、目标和制导站的运动视为质点运动;②制导系统的工作是理想的;③导弹速度是时间的已知函数;④目标和制导站的运动规律是已知的。这样就避开了复杂的质点系的动力学问题。针对假想目标的某些典型轨迹,先确定导引弹道的基本特性。由此得出的导引弹道是可控质点的运动学弹道。导引弹道的运动学分析虽是近似的,但它是最简单的研究方法。

为了简化研究起见,假设导弹、目标和制导站始终在同一固定平面内运动。该平面称为

攻击平面。攻击平面可能是铅垂平面、也可能是水平面或倾斜平面。

本章应用导引弹道的运动学分析方法研究几种常见导引方法的弹道特性，其目的是为了选择合适的导引方法，改善现有导引方法存在的某些缺点，为寻找新的导引方法提供依据。分析各种导引方法的弹道特性是制导系统设计的基础，也是导弹飞行力学研究的重要课题之一。

§ 4-2 相对运动方程

相对运动方程是指描述导弹、目标、制导站之间相对运动关系的方程。建立相对运动方程是导引弹道运动学分析方法的基础。相对运动方程习惯上建立在极坐标系中，其形式最简单。下面分别建立自动瞄准制导和遥控制导的相对运动方程。

一、自动瞄准制导的相对运动方程

自动瞄准制导的相对运动方程实际上是描述导弹与目标之间相对运动关系的方程。

假设在某一时刻，目标位于 T 点，导弹位于 M 点。连线 $\overline{MT}$ 称为目标瞄准线（简称为目标线或视线）。选取基准线（或称参考线） $\overline{Ax}$ ，它可以任意选择，它的位置的不同选择不会影响导弹与目标之间的相对运动特性，而只影响相对运动方程的繁简程度。为简单起见，一般选取在攻击平面内的水平线作为基准线；若目标作直线飞行，则选取目标的飞行方向为基准线方向最为简便。

根据导引弹道的运动学分析方法，假设导弹与目标的相对运动方程可以用定义在攻击平面内的极坐标参数 r 、 q 的变化规律来描述。图 4-1 中所示的参数分别定义如下：

r ——导弹相对目标的距离。导弹命中目标时 $r=0$ 。

q ——目标线与基准线之间的夹角，称目标线方位角（简称目标线角）。若从基准线逆时针转到目标线上时，则 q 为正。

σ 、 σ_T ——分别为导弹、目标速度矢量与基准线之间的夹角，称之为导弹弹道角和目标航向角。分别以导弹、目标所在位置为原点，若由基准线逆时针旋转到各自的速度矢量上时，则 σ 、 σ_T 为正。当攻击平面为铅垂面时， σ 就是弹道倾角 θ ；当攻击平面为水平面时， σ 就是弹道偏角 ψ_v 。

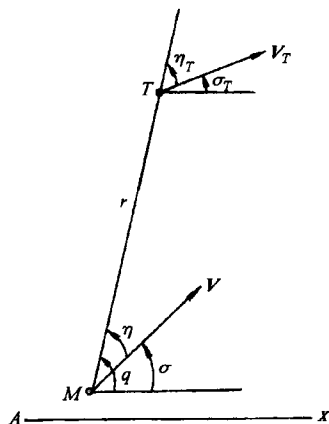


图 4-1 导弹与目标的相对位置

η 、 η_T ——分别为导弹、目标速度矢量与目标线之间的夹角，相应称之为导弹速度矢量前置角和目标速度矢量前置角（简称为前置角）。分别以导弹、目标为原点，若从各自的速度矢量逆时针旋转到目标线上时，则 η 、 η_T 为正。

自动瞄准制导的相对运动方程是指描述相对距离 r 和目标线角 q 变化率的方程。根据图 4-1 所示的导弹与目标之间的相对运动关系就可以直接建立相对运动方程。将导弹速度矢量 V 和目标速度矢量 V_T 分别沿目标线的方向及其法线方向上分解。沿目标线分量 $V \cos \eta$ 是指向目标，它使相对距离 r 减小；而分量 $V_T \cos \eta_T$ 背离导弹，它使相对距离 r 增大。显然

$$\frac{dr}{dt} = V_T \cos \eta_T - V \cos \eta$$

沿目标线的法线分量 $V \sin \eta$ 使目标线绕目标所在位置为原点逆时针旋转，使目标线角 q

增大；而分量 $V_T \sin \eta_T$ 使目标线绕导弹所在位置为原点顺时针旋转，使目标线角 q 减小。于是

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{r} (V \sin \eta - V_T \sin \eta_T)$$

同时考虑到图 4-1 所示角度间的几何关系，以及导引关系方程，就可以得到自动瞄准制导的相对运动方程组为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= V_T \cos \eta_T - V \cos \eta \\ r \frac{dq}{dt} &= V \sin \eta - V_T \sin \eta_T \\ q &= \sigma + \eta \\ q &= \sigma_T + \eta_T \\ \epsilon_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-1)$$

方程组 (4-1) 中， $\epsilon_1 = 0$ 为描述导引方法的导引关系方程（或称理想控制关系方程）。在自动瞄准制导中常见的导引方法有：追踪法、平行接近法、比例导引法等，相应的导引关系方程为：

追踪法 $\eta = 0, \epsilon_1 = \eta = 0$ ；

平行接近法 $q = q_0 = \text{常数}, \epsilon_1 = \frac{dq}{dt} = 0$ ；

比例导引法 $\dot{\sigma} = K\dot{q}, \epsilon_1 = \dot{\sigma} - K\dot{q} = 0$ 。

上述方程组中， $V(t)$ 、 $V_T(t)$ 、 $\eta_T(t)$ （或 $\sigma_T(t)$ ）为已知，方程组中只含有 5 个未知参数： $r(t)$ 、 $q(t)$ 、 $\sigma_T(t)$ （或 $\eta_T(t)$ ）、 $\sigma(t)$ 、 $\eta(t)$ ，因此方程组是封闭的，可以求得确定解。根据 $r(t)$ 、 $q(t)$ 可获得导弹相对目标的运动轨迹，称为导弹的相对弹道（即观察者在目标上所观察到的导弹运动轨迹）。若已知目标相对地面坐标系（惯性坐标系）的运动轨迹之后，则通过换算可获得导弹相对地面坐标系的运动轨迹——绝对弹道。

二、遥控制导的相对运动方程

遥控制导导弹受弹外制导站导引。导弹的运动特性不仅与目标的运动状态有关，而且还与制导站的运动状态有关。制导站可能是活动的（如空-空导弹或空-地导弹的制导站在载机上），也可能是固定不动的（如地-空导弹的制导站通常是在地面固定不动的）。因此，建立遥控制导的相对运动方程组，还需要考虑制导站的运动状态对导弹运动的影响。在导引弹道运动学分析时，假设制导站也看成运动质点，且其运动状态是已知的时间函数，并认为导弹、制导站、目标始终处在某一攻击平面内运动。

建立遥控制导的相对运动方程组是通过导弹与制导站之间的相对运动关系以及目标与制导站之间的相对运动关系来描述的。在某一时刻，制导站处在 C 点位置、导弹处在 M 点位置、目标处在 T 点位置，它们之间的相对运动关系如图 4-2 所示。图 4-2 所示的参数分别定义如下：

R_T ——制导站与目标的相对距离；

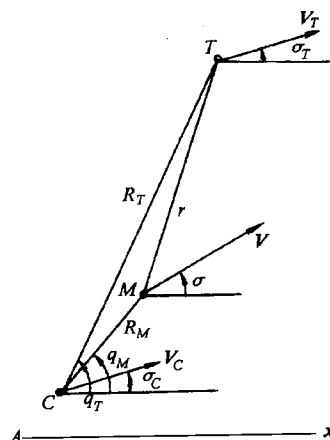


图 4-2 导弹、目标与制导站的相对位置

R_M ——制导站与导弹的相对距离；

σ_T 、 σ 、 σ_C ——分别为目标、导弹、制导站的速度矢量与基准线之间的夹角。

q_T 、 q_M ——分别为制导站-目标连线与基准线、制导站-导弹连线与基准线之间的夹角。

根据图 4-2，仿照上述建立自动瞄准制导的相对运动方程组的方法，就可以得到遥控制导的相对运动方程组。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dR_M}{dt} &= V \cos(q_M - \sigma) - V_C \cos(q_M - \sigma_C) \\ R_M \frac{dq_M}{dt} &= -V \sin(q_M - \sigma) + V_C \sin(q_M - \sigma_C) \\ \frac{dR_T}{dt} &= V_T \cos(q_T - \sigma_T) - V_C \cos(q_T - \sigma_C) \\ R_T \frac{dq_T}{dt} &= -V_T \sin(q_T - \sigma_T) + V_C \sin(q_T - \sigma_C) \\ \epsilon_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-2)$$

在遥控制导中常见的导引方法有：三点法、前置量法等，其相应的导引关系方程为

三点法： $q_M = q_T$ ；

前置量法： $q_M - q_T = C_q(R_T - R_M)$ 。

方程组(4-2)中， $V(t)$ 、 $V_T(t)$ 、 $V_C(t)$ 、 $\sigma_T(t)$ 、 $\sigma_C(t)$ 为已知时间函数，未知数有 5 个： $R_M(t)$ 、 $R_T(t)$ 、 $q_M(t)$ 、 $q_T(t)$ 、 $\sigma(t)$ ，因此，可以获得确定解。

由上述建立的相对运动方程组可见：相对运动方程组与作用在导弹上的力无直接关系，故称为运动学方程组。单独求解该方程组所得到的弹道，称为运动学弹道。

三、相对运动方程组的解

由方程组(4-1)、(4-2)可见：无论是自动瞄准制导的导弹，还是遥控制导的导弹，导弹的运动特性都由以下因素确定：目标的运动特性，如飞行高度、速度及机动性；导弹飞行速度的变化规律；导弹所采用的导引方法等。对于遥控制导的导弹，还要考虑到制导站的运动状态。

在导弹研制过程中，还不能预先具体确定目标的运动特性，一般只能根据战术技术要求所确定的目标类型，在其性能范围内选择几种典型的运动特性，如目标作等速直线飞行或正常盘旋飞行等。这样，目标的运动特性可以认为是已知的。只要目标的典型运动特性选择得合适，导弹导引弹道特性就可以估算出来。

导弹飞行速度的变化规律取决于发动机特性、导弹的结构参数和气动外形。它可以由第二章包括动力学方程在内的导弹运动方程组求解得到。本章着重介绍导引弹道的运动学分析方法，这一方法要求预先采用近似计算方法求出导弹速度的变化规律。因此，在进行导引弹道的运动学分析时就可以不考虑导弹的动力学方程，即相对运动方程组(4-1)、(4-2)可独立求解。

相对运动方程组(4-1)、(4-2)可以采用以下三种方法求解。

1. 数值积分法

运动学方程组(4-1)、(4-2)中含有微分方程，解此方程组一般采用数值积分法，可以获

得导弹运动参数随时间变化的规律及其相应的弹道。给定一组初始条件可得到相应的一组特解，但得不到包含任意待定常数的一般解。用这种方法计算工作量大，但是应用电子计算机可以大大提高计算效率并可以得到足够的计算精度。

2. 解析法

只有在特定条件下(其中最基本的假定是目标作等速直线飞行,导弹的速度为常值),才能得到满足任意初始条件下的解析表达式。虽然,这些特定条件在实际上是少见的,但是,解析解可以说明导引方法的某些一般特性。

3. 图解法

图解法也应在目标的运动特性、导弹速度的变化规律及导引方法已知的条件下进行,所

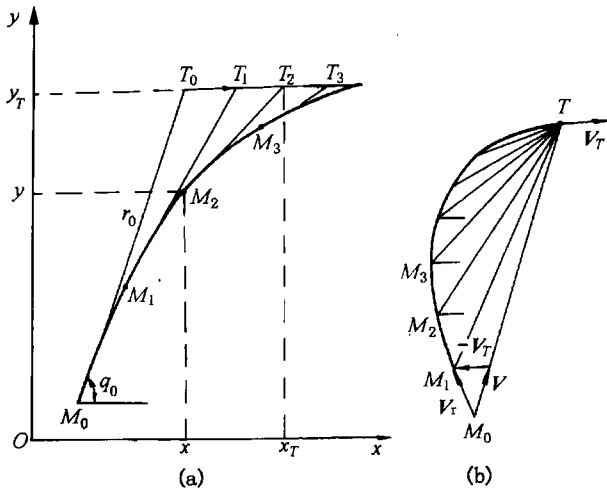


图 4-3 追踪法的导引弹道
(a) 绝对弹道; (b) 相对弹道

得到的弹道还是给定初始条件下的运动学弹道。图解法的优点是简捷、直观,但误差大。作图时,比例尺选取适当,也可以得到较为满意的结果。图 4-3 为通过图解法得到的追踪法导引弹道,(a)为绝对弹道,(b)为相对弹道。

举例: 根据相对弹道的含义用图解法作出追踪法导引的相对弹道。为讨论方便起见,假设目标作等速直线飞行,导弹作等速飞行。图解法步骤如下: 设目标固定不动,按追踪法导引关系,导弹速度矢量 V 应始终指向目标。假如导弹追踪起始位置在 $M_0(r_0, q_0)$, 起始时刻导弹的相对速度 $V_r = V - V_T$, 则沿 V_r 方向可得

到经过 1s 时导弹相对目标的位置 M_1 点, 依此类推, 可确定各瞬时导弹相对目标的位置 M_2 、 M_3 、……。最后, 光滑连接 M_0 、 M_1 、 M_2 、 M_3 、……各点, 就得到追踪法导引时的相对弹道(如图 4-3(b)所示)。显然, 相对弹道的切线即为该瞬时导弹相对速度 V_r 的方向。若导弹的起始位置 $M_0(r_0, q_0)$ 不同, 则可以作出相对弹道族, 其中每条相对弹道的形状均不相同(如图 4-4 所示)。

追踪法导引的绝对弹道的作图步骤如下:

(1) 根据目标的运动规律, 画出目标的运动轨迹, 选取适当的时间间隔 Δt_i (可以取等间隔或不等间隔), 并将目标轨迹相应分成等于 $V_T \Delta t_i$ 的若干段, 把每一瞬时 t_0 、 t_1 、 t_2 、……的目标位置 T_0 、 T_1 、 T_2 、……标注出来;

(2) 设导弹的起始位置在 M_0 点。用直线连接 M_0 和 T_0 点, 按追踪法定义, 导弹的速度矢量 V 始终指向目标。经过时间间隔 $\Delta t_1 = t_1 - t_0$ 后, 导弹飞过的距离为 $\overline{M_0 M_1} = V(t_0) \Delta t_1$, 点 M_1 应在连线 $\overline{M_0 T_0}$ 上, 据此得到在时刻 t_1 的导弹位置 M_1 点;

(3) 再连接 M_1 和 T_1 点, 并求出在时间间隔 $\Delta t_2 = t_2 - t_1$ 内导弹飞过的距离 $\overline{M_1 M_2} = V(t_1) \Delta t_2$, 点 M_2 应在连线 $\overline{M_1 T_1}$ 上, 求得导弹在时刻 t_2 的位置 M_2 点;

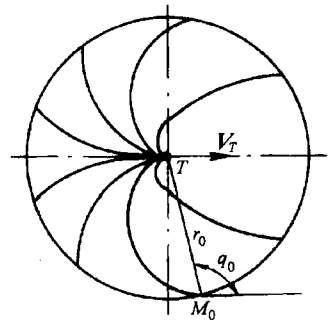


图 4-4 追踪法导引的相对弹道族

(4) 依此类推, 确定导弹位置 M_3 、 M_4 、……各点, 直至导弹与目标遭遇。最后, 用光滑曲线连接 M_0 、 M_1 、 M_2 、 M_3 、……各点, 就得追踪法导引的绝对弹道(如图 4-3(a)所示)。导弹飞行速度方向就是弹道上各点的切线方向。

如果给出目标相对于地面坐标系的运动规律 $x_T(t)$ 、 $y_T(t)$, 又用数值积分法或解析法解方程组(4-1), 分别得到 $r(t)$ 、 $q(t)$, 参照图 4-3(a), 则可以导出确定导弹相对地面坐标系运动轨迹的表达式

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x_T(t) - r(t)\cos q(t) \\ y(t) &= y_T(t) - r(t)\sin q(t) \end{aligned} \right\} \quad (4-3)$$

§ 4-3 追踪法

所谓追踪法是指导弹在攻击目标的导引过程中, 导弹的速度矢量始终指向目标的一种导引方法。这种方法要求导弹速度矢量的前置角 η 始终等于零。因此, 追踪法导引关系方程为

$$\varepsilon_1 = \eta = 0$$

一、弹道方程

追踪法导引时, 导弹与目标之间的相对运动方程组由式(4-1)可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= V_T \cos \eta_T - V \\ r \frac{dq}{dt} &= -V_T \sin \eta_T \\ q &= \sigma_T + \eta_T \end{aligned} \right\} \quad (4-4)$$

若 V 、 V_T 和 σ_T 为已知的时间函数, 则方程组(4-4)还包含 3 个未知参数: r 、 q 和 η_T 。给出初始值 r_0 、 q_0 和 η_{T0} , 用数值积分法可以得到相应的特解。

为了得到解析解, 以便了解追踪法导引的一般特性, 必须作以下假定: 目标作等速直线运动, 导弹作等速运动。

取基准线 $\overline{Ax}$ 平行于目标的运动轨迹, 这时 $\sigma_T = 0$, $q = \eta_T$ (由图 4-5 看出), 则方程组(4-4)可改写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= V_T \cos q - V \\ r \frac{dq}{dt} &= -V_T \sin q \end{aligned} \right\} \quad (4-5)$$

由方程组(4-5)可以导出相对弹道方程 $r = f(q)$ 。

用方程组(4-5)的第二式去除第一式得

$$\frac{dr}{r} = \frac{V_T \cos q - V}{-V_T \sin q} dq$$

令 $p = V/V_T$, 称为速度比。因假设导弹和目标作等速运动, 所以 p 为一常值。于是

$$\frac{dr}{r} = \frac{-\cos q + p}{\sin q} dq$$

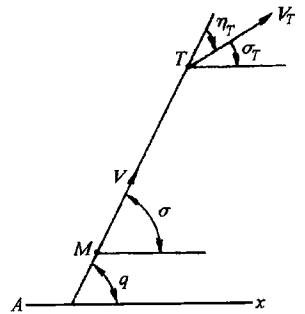


图 4-5 追踪法导引导弹与目标的相对运动关系

$$\text{积分得} \quad r = r_0 \frac{\tan^p \frac{q}{2} \sin q_0}{\tan^p \frac{q_0}{2} \sin q} \quad (4-6)$$

$$\text{令} \quad c = r_0 \frac{\sin q_0}{\tan^p \frac{q_0}{2}} \quad (4-7)$$

式中 (r_0, q_0) 为开始导引瞬时导弹相对目标的位置。

最后得到以目标为原点的极坐标形式表示的导弹相对弹道方程为

$$r = c \frac{\tan^p \frac{q}{2}}{\sin q} = c \frac{\sin^{(p-1)} \frac{q}{2}}{2 \cos^{(p+1)} \frac{q}{2}} \quad (4-8)$$

由方程(4-8)即可画出追踪法导引的相对弹道(又称追踪曲线)。步骤如下:

- ①求命中目标时的 q_k 值。命中目标时 $r_k=0$, 当 $p>1$, 由式(4-8)得到 $q_k=0$;
- ②在 q_0 到 q_k 之间取一系列 q 值, 由目标所在位置(T 点)相应引出射线;
- ③将一系列 q 值分别代入式(4-8)中, 可以求得对应的 r 值, 并在射线上截取相应线段长度, 则可求得导弹的对应位置;
- ④逐点描绘即可得到导弹的相对弹道。

二、直接命中目标的条件

从方程组(4-5)的第二式可以看出: $\dot{q}$ 总与 q 的符号相反。这表明不管导弹开始追踪瞬时的 q_0 为何值, 导弹在整个导引过程中 $|q|$ 是在不断减小, 即导弹总是绕到目标的正后方去命中目标(如图4-4所示)。因此, 命中目标, $q \rightarrow 0$ 。

由式(4-8)可以得到

若 $p>1$, 且 $q \rightarrow 0$, 则 $r \rightarrow 0$;

若 $p=1$, 且 $q \rightarrow 0$, 则 $r \rightarrow r_0 \frac{\sin q_0}{2 \tan^p \frac{q_0}{2}}$;

若 $p<1$, 且 $q \rightarrow 0$, 则 $r \rightarrow \infty$ 。

显然, 只有导弹的速度大于目标的速度才有可能直接命中; 若导弹的速度等于或小于目标的速度, 则导弹与目标最终将保持一定的距离或距离越来越远而不能直接命中目标。由此可见, 导弹直接命中目标的必要条件是导弹速度大于目标速度(即 $p>1$)。

三、导弹命中目标所需的飞行时间

导弹命中目标所需的飞行时间直接关系着控制系统及弹体参数的选择, 它是导弹武器系统设计的必要数据。

方程组(4-5)中的第一式和第二式分别乘以 $\cos q$ 和 $\sin q$, 然后相减, 经整理得

$$\cos q \frac{dr}{dt} - r \sin q \frac{dq}{dt} = V_T - V \cos q \quad (4-9)$$

方程组(4-5)的第一式可改写为

$$\cos q = \frac{\frac{dr}{dt} + V}{V_T}$$

将上式代入式(4-9)中, 整理后得

$$(p + \cos q) \frac{dr}{dt} - r \sin q \frac{dq}{dt} = V_T - pV$$

$$d[r(p + \cos q)] = (V_T - pV)dt$$

$$t = \frac{r_0(p + \cos q_0) - r(p + \cos q)}{pV - V_T} \quad (4-10)$$

将命中目标的条件(即 $r \rightarrow 0, q \rightarrow 0$)代入式(4-10)中, 可得到导弹从开始追踪至命中目标所需的飞行时间为

$$t_k = \frac{r_0(p + \cos q_0)}{pV - V_T} = \frac{r_0(p + \cos q_0)}{(V - V_T)(1 + p)} \quad (4-11)$$

由式(4-11)可以看出:

$$\text{迎面攻击}(q_0 = \pi) \text{时}, t_k = \frac{r_0}{V + V_T};$$

$$\text{尾追攻击}(q_0 = 0) \text{时}, t_k = \frac{r_0}{V - V_T};$$

$$\text{侧面攻击}(q_0 = \frac{\pi}{2}) \text{时}, t_k = \frac{r_0 p}{(V - V_T)(1 + p)}。$$

因此, 在 r_0 、 V 和 V_T 相同的条件下, q_0 在 0 至 π 范围内, 随着 q_0 的增加, 命中目标所需的飞行时间将缩短。当迎面攻击($q_0 = \pi$)时, 所需飞行时间为最短。

四、导弹的法向过载

导弹的过载特性是评定导引方法优劣的重要标志之一。过载的大小直接影响制导系统的工作条件和导引误差, 也是计算导弹弹体结构强度的重要条件。沿导引弹道飞行的需用法向过载必须小于可用法向过载。否则, 导弹的飞行将脱离追踪曲线并按着可用法向过载所决定的弹道曲线飞行, 在这种情况下, 直接命中目标已是不可能的。

本章的法向过载定义(第二章中第二种定义)为法向加速度与重力加速度之比, 即

$$n = \frac{a_n}{g} \quad (4-12)$$

式中 a_n 为作用在导弹上所有外力(包括重力)合力所产生的法向加速度。

追踪法导引导弹的法向加速度为

$$a_n = V \frac{d\sigma}{dt} = V \frac{dq}{dt} = - \frac{V V_T \sin q}{r} \quad (4-13)$$

将式(4-6)代入上式得

$$a_n = - \frac{V V_T \sin q}{r_0 \frac{\tan^p \frac{q}{2} \sin q_0}{\tan^p \frac{q_0}{2} \sin q}} = - \frac{V V_T \tan^p \frac{q_0}{2}}{r_0 \sin q_0} \frac{4 \cos^p \frac{q}{2} \sin^2 \frac{q}{2} \cos^2 \frac{q}{2}}{\sin^p \frac{q}{2}}$$

$$= -\frac{4V V_T}{r_0} \frac{\tan^p \frac{q_0}{2}}{\sin q_0} \cos^{(p+2)} \frac{q}{2} \sin^{(2-p)} \frac{q}{2} \quad (4-14)$$

将上式代入式(4-12)中, 且法向过载只考虑其绝对值, 则可表示为

$$n = \frac{4VV_T}{gr_0} \left| \frac{\tan^p \frac{q_0}{2}}{\sin q_0} \cos^{(p+2)} \frac{q}{2} \sin^{(2-p)} \frac{q}{2} \right| \quad (4-15)$$

导弹命中目标时, $q \rightarrow 0$, 由式(4-15)看出:

当 $p > 2$ 时 $\lim_{q \rightarrow 0} n = \infty$;

当 $p = 2$ 时 $\lim_{q \rightarrow 0} n = \frac{4VV_T}{g r_0} \left| \frac{\tan^p \frac{q_0}{2}}{\sin q_0} \right|$;

当 $p < 2$ 时 $\lim_{q \rightarrow 0} n = 0$ 。

由此可见: 追踪法导引, 考虑到命中点的法向过载, 只有速度比 $1 < p \leq 2$ 时, 导弹才有可能直接命中目标。

五、允许攻击区

所谓允许攻击区是指导弹在此区域内以追踪法导引飞行, 其飞行弹道上的需用法向过载均不超过可用法向过载值。

由式(4-13)得

$$r = -\frac{V V_T \sin q}{a_n}$$

将式(4-12)代入上式, 如果只考虑其绝对值, 则上式可改写为

$$r = \frac{V V_T}{gn} |\sin q| \quad (4-16)$$

在 V 、 V_T 和 n 给定的条件下, 在由 r 、 q 所组成的极坐标系中, 式(4-16)是一个圆的方程, 即追踪曲线上过载相同点的连线(简称等过载曲线)是个圆。圆心在 $(V V_T / 2gn, \pm \pi/2)$ 上, 圆的半径等于 $V V_T / 2gn$ 。在 V 、 V_T 一定时, 给出不同的 n 值, 就可以绘出圆心在 $q = \pm \pi/2$ 上, 半径大小不同的圆族, 且 n 越大, 等过载圆半径越小。这族圆正通过目标, 与目标的速度相切(如图 4-6 所示)。

假设可用法向过载为 n_p , 相应有一等过载圆。现在要确定追踪导引起始瞬时导弹相对目标的距离 r_0 为某一给定值的允许攻击区。

设导弹的初始位置分别在 M_{01} 、 M_{02}^* 、 M_{03} 点, 各自对应的追踪曲线为 1、2、3(如图 4-7 所示)。追踪曲线 1 不与 n_p 决定的圆相交, 因而追踪曲线 1 上任意一点的法向过载 $n < n_p$; 追踪曲线 3 与 n_p 决定的圆相交, 因而追踪曲线 3 上有一段的法向过载 $n > n_p$, 显然, 导弹从 M_{03} 点开始追踪导引是不允许的, 因为它不能直接命中目标; 追踪曲线 2 与 n_p 决定的圆正好相切, 切点 E 的过载最大, 且 $n = n_p$, 追踪曲线 2 上任意一点均满足 $n \leq n_p$ 。因此, M_{02}^* 点是追踪法导引的极限初始位置, 它由 r_0 、 q_0^* 确定。于是 r_0 值一定时, 允许攻击区必须满足

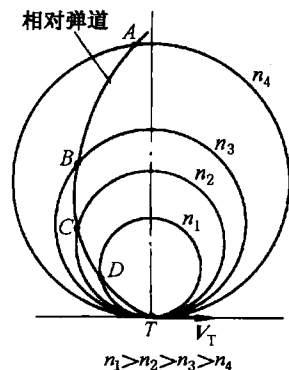


图 4-6 等过载圆族

$$|q_0| \leq |q_0^*|$$

(r_0, q_0^*) 对应的追踪曲线 2 把攻击平面分成两个区域, $|q_0| < |q_0^*|$ 的那个区域就是由导弹可用法向过载所决定的允许攻击区, 如图 4-8 中阴影线所示的区域。因此, 要确定允许攻击区, 在 r_0 值一定时, 首先必须确定 q_0^* 值。

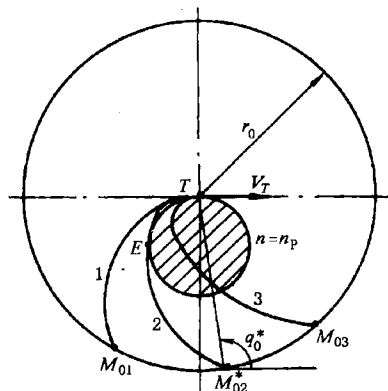


图 4-7 确定极限起始位置

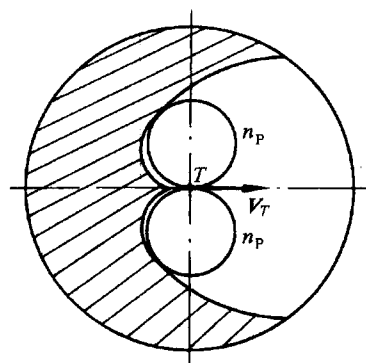


图 4-8 追踪法导引的允许攻击区

在追踪曲线 2 上, E 点过载最大, 此点所对应的坐标为 (r^*, q^*) 。 q^* 值可以由 $\frac{dn}{dq} = 0$ 求得。由式(4-15)可得

$$\frac{dn}{dq} = \frac{2V V_T}{r_0 g \frac{\sin q_0}{\tan^p \frac{q_0}{2}}} \left[(2-p) \sin^{(1-p)} \frac{q}{2} \cos^{(p+3)} \frac{q}{2} - \right.$$

$$\left. (2+p) \sin^{(3-p)} \frac{q}{2} \cos^{(p+1)} \frac{q}{2} \right] = 0$$

$$(2-p) \sin^{(1-p)} \frac{q^*}{2} \cos^{(p+3)} \frac{q^*}{2} = (2+p) \sin^{(3-p)} \frac{q^*}{2} \cos^{(p+1)} \frac{q^*}{2}$$

整理后得 $(2-p) \cos^2 \frac{q^*}{2} = (2+p) \sin^2 \frac{q^*}{2}$

又可以写成

$$2 \left(\cos^2 \frac{q^*}{2} - \sin^2 \frac{q^*}{2} \right) = p \left(\sin^2 \frac{q^*}{2} + \cos^2 \frac{q^*}{2} \right)$$

于是

$$\cos q^* = \frac{p}{2}$$

由上式可知, 追踪曲线上法向过载最大值处的目标线角 q^* 仅取决于速度比 p 的大小。

因 E 点在 n_p 的等过载圆上, 且所对应的 r^* 值满足式(4-16), 于是

$$r^* = \frac{V V_T}{g n_p} |\sin q^*|$$

因为

$$\sin q^* = \sqrt{1 - \frac{p^2}{4}}$$

所以

$$r^* = \frac{V V_T}{g n_p} \left(1 - \frac{p^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4-17)$$

E 点在追踪曲线 2 上, r^* 也同时满足弹道方程式(4-6), 即

$$r^* = r_0 \frac{\tan^p \frac{q}{2} \sin q_0^*}{\tan^p \frac{q_0^*}{2} \sin q^*} = \frac{r_0 \sin q_0^* 2(2-p)^{\frac{p-1}{2}}}{\tan^p \frac{q_0^*}{2} (2+p)^{\frac{p+1}{2}}} \quad (4-18)$$

r^* 同时满足式(4-17)和(4-18), 于是有

$$\frac{V V_T}{g n_p} \left(1 - \frac{p}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{p}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{r_0 \sin q_0^* 2(2-p)^{\frac{p-1}{2}}}{\tan^p \frac{q_0^*}{2} (2+p)^{\frac{p+1}{2}}} \quad (4-19)$$

显然, 当 V 、 V_T 、 n_p 和 r_0 给定时, 由式(4-19)解出 q_0^* 值, 那么, 允许攻击区也就相应确定了。

如果导弹发射时刻就开始实现追踪法导引, 那么 $|q_0| \leq |q_0^*|$ 所确定的范围也就是允许发射区。

追踪法是最早提出的一种导引方法, 技术上实现追踪法导引是比较简单的。例如, 只要在弹内装一个“风标”装置, 再将目标位标器安装在风标上, 使其轴线与风标指向平行, 由于风标的指向始终沿着导弹速度矢量的方向, 只要目标影像偏离了位标器轴线, 这时, 导弹速度矢量没有指向目标, 制导系统就会形成控制指令, 以消除偏差, 实现追踪法导引。由于追踪法导引在技术实施方面比较简单, 部分空-地导弹、激光制导炸弹采用了这种导引方法。但是, 这种导引方法弹道特性存在着严重缺点。因为导弹的绝对速度始终指向目标, 相对速度总是落后于目标线, 不管从哪个方向发射, 导弹总是要绕到目标的后方去命中目标, 这样导致导弹弹道较弯曲(特别在命中点附近), 需用法向过载较大, 要求导弹要有很高的机动性, 由于可用法向过载的限制, 不能实现全向攻击。同时, 追踪法导引考虑到命中点的法向过载, 速度比受到严格的限制, $1 < p \leq 2$ 。因此, 追踪法目前应用很少。

§ 4-4 平行接近法

平行接近法是指在整个导引过程中, 目标瞄准线在空间保持平行移动的一种导引方法, 其导引关系方程为

$$\epsilon_1 = \frac{dq}{dt} = 0$$

或

$$\epsilon_1 = q - q_0 = 0$$

式中 q_0 为开始平行接近法导引瞬间的目标线角。

按平行接近法导引时, 导弹与目标之间的相对运动方程组为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= V_T \cos \eta_T - V \cos \eta \\ r \frac{dq}{dt} &= V \sin \eta - V_T \sin \eta_T \\ q &= \sigma + \eta \end{aligned} \right\} \quad (4-20)$$

$$\left. \begin{aligned} q &= \sigma_T + \eta_T \\ \epsilon_1 &= \frac{dq}{dt} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{续(4-20)}$$

由方程组(4-20)第二式可以导出实现平行接近法的运动关系式为

$$V \sin \eta = V_T \sin \eta_T \quad (4-21)$$

上式表明,按平行接近法导引时,不管目标作何种机动飞行,导弹速度矢量 V 和目标速度矢量 V_T 在垂直于目标线上的分量相等。由图 4-9 可见,导弹的相对速度 V_r 正好落在目标线上,即导弹相对速度始终指向目标。因此,在整个导引过程中相对弹道是直线弹道。

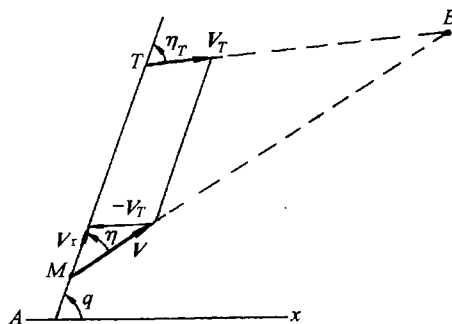


图 4-9 平行接近法导引导弹与目标的相对运动关系

显然,按平行接近法导引时,导弹的速度矢量 V 超前了目标线,导弹速度矢量的前置角 η 应满足

$$\eta = \arcsin \left(\frac{V_T}{V} \sin \eta_T \right) \quad (4-22)$$

一、直线弹道的条件

按平行接近法导引时,在整个导引过程中目标线角 q 保持不变。如果导弹速度矢量的前置角 η 保持常值,则导弹弹道角 σ 为常值,导弹飞行的绝对弹道是一条直线弹道。显然,由式(4-22)可见:在攻击平面内,目标作直线飞行(即 η_T 为常值)时,只要速度比 p 保持为常值(且 $p > 1$),则 η 为常值,即导弹不论从什么方向攻击目标,它的飞行弹道(绝对弹道)都是直线弹道。

二、导弹的法向过载

为逃脱导弹的攻击,目标往往作机动飞行,并且导弹的飞行速度通常也是变化的。下面研究这种情况下导弹的需用法向过载。

由式(4-21)求得

$$\frac{dV}{dt} \sin \eta + V \cos \eta \frac{d\eta}{dt} = \frac{dV_T}{dt} \sin \eta_T + V_T \cos \eta_T \frac{d\eta_T}{dt} \quad (4-23)$$

由于

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{d\sigma}{dt}, \quad \frac{d\eta_T}{dt} = -\frac{d\sigma_T}{dt}$$

代入式(4-23)中可得

$$\frac{dV}{dt} \sin \eta - V \cos \eta \frac{d\sigma}{dt} = \frac{dV_T}{dt} \sin \eta_T - V_T \cos \eta_T \frac{d\sigma_T}{dt}$$

令 $a_n = V \frac{d\sigma}{dt}$ 为导弹的法向加速度; $a_{nT} = V_T \frac{d\sigma_T}{dt} = n_T g$ 为目标的法向加速度。于是导弹的需用法向过载为

$$n = \frac{a_n}{g} = n_T \frac{\cos \eta_T}{\cos \eta} + \frac{1}{g} \left(\frac{dV}{dt} \frac{\sin \eta}{\cos \eta} - \frac{dV_T}{dt} \frac{\sin \eta_T}{\cos \eta_T} \right) \quad (4-24)$$

由式(4-24)看出,导弹的需用法向过载不仅与目标的机动性有关外,还与导弹和目标的

切向加速度 dV/dt 、 dV_T/dt 有关。

目标作机动飞行，导弹作变速飞行时，若速度比 p 保持常值，则采用平行接近法导引，导弹的需用法向过载总比目标机动时的法向过载要小。证明如下

式(4-21)对时间 t 求一阶导数

$$p\dot{\eta}\cos\eta = \dot{\eta}_T\cos\eta_T$$

由于 $\dot{\eta} = -\dot{\sigma}$ ， $\dot{\eta}_T = -\dot{\sigma}_T$

代入上式得

$$\frac{V\dot{\sigma}}{V_T\dot{\sigma}_T} = \frac{\cos\eta_T}{\cos\eta}$$

因恒有 $V > V_T$ ，由式(4-21)得

$$\eta_T > \eta$$

因此

$$\frac{V\dot{\sigma}}{V_T\dot{\sigma}_T} = \frac{a_n}{a_{nT}} < 1$$

或

$$n < n_T$$

由此可以得出结论：目标无论作何种机动飞行，采用平行接近法导引时，导弹的需用法向过载总是小于目标机动时的法向过载，即导弹弹道的弯曲程度比目标航迹的弯曲程度小(见图4-10)。因此，导弹机动性就可以小于目标的机动性。

与其他导引方法相比，平行接近法导引弹道最为平直，因而需用法向过载比较小，这样所需的弹翼面积可以缩小，且对弹体结构的受力和控制系统工作均为有利，此时，它可以实现全向攻击。因此，从这个意义上说，平行接近法是最好的一种导引方法。可是，到目前为止，平行接近法并未得到广泛应用，其主要原因是实施这种导引方法对制导系统提出了严格的要求，使得制导系统复杂化。它要求制导系统在每一瞬间都要精确地测量

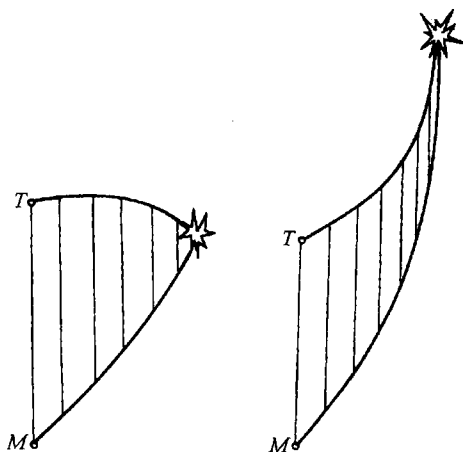


图4-10 平行接近法导引的导弹弹道

目标、导弹速度及其前置角，并严格保持平行接近法的运动关系(即 $V\sin\eta = V_T\sin\eta_T$)。实际上，由于发射瞬时的偏差或飞行过程中的干扰存在，不可能绝对保证导弹的相对速度 V_r 始终指向目标，因此平行接近法很难实现。

§ 4-5 比例导引法

比例导引法是指导弹在攻击目标的导引过程中，导弹速度矢量的旋转角速度与目标线的旋转角速度成比例的一种导引方法，其导引关系方程为

$$\epsilon_1 = \frac{d\sigma}{dt} - K \frac{dq}{dt} = 0 \quad (4-25)$$

式中 K ——比例系数。

假定比例系数 K 是一常数, 对式(4-25)进行积分, 就可以得到比例导引关系方程的另一种表达形式:

$$\varepsilon_1 = (\sigma - \sigma_0) - K(q - q_0) = 0 \quad (4-26)$$

将几何关系式 $q = \sigma + \eta$ 对时间 t 求导数, 可得

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\eta}{dt}$$

将此式代入式(4-25)中, 可得到比例导引关系方程的另外两种表达形式

$$\frac{d\eta}{dt} = (1 - K) \frac{dq}{dt} \quad (4-27)$$

和

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1 - K}{K} \frac{d\sigma}{dt} \quad (4-28)$$

由式(4-27)可见: 如果 $K=1$, 则 $\frac{d\eta}{dt}=0$, 即 $\eta=\eta_0=\text{常数}$, 这就是常值前置角导引方法,

而追踪法 $\eta=0$ 是常值前置角法的一个特例; 如果 $K \rightarrow \infty$, 则 $\frac{dq}{dt} \rightarrow 0$, 即 $q=q_0=\text{常数}$, 这就是平行接近法。

因此, 追踪法和平行接近法是比例导引法的特殊情况。换句话说, 比例导引法是介于追踪法和平行接近法之间的一种导引方法。比例导引法的比例系数 K 应选择在 $1 < K < \infty$ 的范围内, 通常可取 $2 \sim 6$ 。比例导引法的弹道特性也介于追踪法和平行接近法两者之间(如图 4-11 所示)。随着比例系数 K 的增大, 导引弹道越加平直, 需用法向过载也就越小。

比例导引法既可用于自动瞄准制导的导弹, 也可用于遥控制导的导弹。

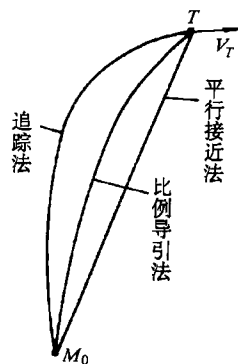


图 4-11 三种导引方法的弹道比较

一、比例导引法的相对运动方程组

按比例导引时, 导弹与目标之间的相对运动方程组为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= V_T \cos \eta_T - V \cos \eta \\ r \frac{dq}{dt} &= V \sin \eta - V_T \sin \eta_T \\ q &= \sigma + \eta \\ q &= \sigma_T + \eta_T \\ \frac{d\sigma}{dt} &= K \frac{dq}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (4-29)$$

若给出 V 、 V_T 、 σ_T 的变化规律和初始条件(r_0 、 q_0 、 σ_0 或 η_0), 则方程组(4-29)可用数值积分法或图解法解算。仅在特殊条件下(如比例系数 $K=2$, 目标作等速直线飞行, 导弹作等速飞行时), 方程组(4-29)才可能得到解析解。

例 4-1 设坦克目标作水平等速直线运动, $V_T=12\text{m/s}$, 反坦克导弹采用自动瞄准制导, 按比例导引侧面拦击目标, 导弹是等速飞行, $V=120\text{m/s}$, 比例系数 $K=4$, 攻击平面为一水平面(如图 4-12)。设初始条件: $r_0=3000\text{m}$, $q_0=70^\circ$, $\eta_0=-2^\circ$ 。试用欧拉数值积分法解算运动学弹道。

[解] 选取基准线 $\overline{Ax}$ 平行于目标的运动方向, 根据上述已知条件, 列出导弹与目标的相对运动方程组为

$$\frac{dr}{dt} = -V_T \cos q - V \cos \eta$$

$$r \frac{dq}{dt} = V_T \sin q + V \sin \eta$$

$$\phi_v = q - \eta$$

$$\dot{\phi}_v = K \dot{q}$$

将上述方程组改写成便于进行数值积分的形式。由上述方程组第四式和第三式得

$$\phi_v = \phi_{v0} + K(q - q_0)$$

$$\eta = q - \phi_v = Kq_0 - \phi_{v0} - (K - 1)q$$

将其代入上述方程组的第一式和第二式中得

$$\frac{dr}{dt} = -V_T \cos q - V \cos [Kq_0 - \phi_{v0} - (K - 1)q]$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{r} \{V_T \sin q + V \sin [Kq_0 - \phi_{v0} - (K - 1)q]\}$$

确定绝对弹道, 所选地面坐标系 Oxz 的原点与导弹初始位置重合, 弹道的参数为 (x, z) , 其表达式

$$x = x_T - r \sin q$$

$$z = z_T - r \cos q$$

式中

$$x_T = x_{T0} = r_0 \sin q_0$$

$$z_T = z_{T0} - V_T t = r_0 \cos q_0 - V_T t$$

本例选取等积分步长 $\Delta t = 2s$, 列表计算结果见表 4-1。根据命中条件 $x = x_T, z = z_T$, 还可以确定导弹命中目标所需飞行时间 t_k 。本例 $t_k \approx 24.28s$ 。

二、弹道特性

1. 直线弹道

直线弹道的条件为 $\dot{\sigma} = 0$, 因而 $\dot{q} = 0, \dot{\eta} = 0$, 即 $\eta = \eta_0 = \text{常数}$ 。

考虑方程组 (4-29) 的第二式, 比例导引时沿直线弹道飞行的条件可改写为

$$V \sin \eta - V_T \sin \eta_T = 0 \quad (4-30)$$

此式表示导弹和目标的相对速度矢量在垂直于目标线方向上的分量相等, 即导弹的相对速度始终指向目标。所以, 要获得直线弹道, 开始导引瞬时, 导弹速度矢量的前置角 η_0 要严格满足

$$\eta_0 = \arcsin \left(\frac{V_T}{V} \sin \eta_T \right) \Big|_{t=t_0} \quad (4-31)$$

图 4-13 所示为目标作等速直线运动, 导弹等速运动, $K=5, \eta_0=0^\circ, \sigma_T=0^\circ, p=2$ 时, 从不同方向发射的导弹相对弹道示意图。当 $q_0=0^\circ$ 及 $q_0=180^\circ$ 时, 满足式 (4-31), 对应的是两条直线弹道。而从其它方向发射时, 不满足式 (4-31), $\dot{q} \neq 0$, 即目标线在整个导引过程中不断转动, 所以 $\dot{\sigma} \neq 0$, 导弹的相对弹道和绝对弹道都不是直线弹道。但导弹在整个导引过程

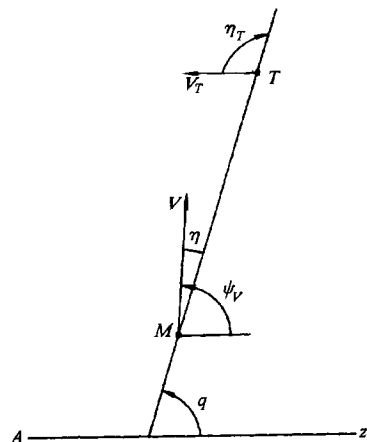


图 4-12 比例导引法导弹与目标的相对运动关系

表 4-1 例 4-1 计算结果

t/s	$Vr\cos q$ $/(m \cdot s^{-1})$	$V \cos[Kq_0 - \psi_{v_0} - (K-1)q]$ $/(m \cdot s^{-1})$	$\frac{dr}{dt}/(m \cdot s^{-1})$	r/m	$Vr\sin q$ $/(m \cdot s^{-1})$	$V \sin[Kq_0 - \psi_{v_0} - (K-1)q]$ $/(m \cdot s^{-1})$	$\frac{dq}{dt}/s^{-1}$	$q/(^{\circ})$	z/m	x/m
0	4.104 2	119.927	-124.031	3000	11.276 3	-4.187 9	0.002 363	70	0	0
2	4.051 0	119.855	-123.906	2 751.937	11.295 6	-5.887 9	0.001 965	70.270 8	73.061	228.672
4	4.006 4	119.778	-123.784	2 504.124	11.311 4	-7.300 7	0.001 602	70.496 0	142.008	458.633
6	3.970 2	119.702	-123.672	2 256.556	11.324 2	-8.451 2	0.001 273	70.679 5	207.478	689.603
8	3.941 4	119.634	-123.575	2 009.212	11.334 3	-9.365 4	0.000 980	70.825 4	270.134	921.329
10	3.919 2	119.577	-123.496	1 762.061	11.342 0	-10.068 7	0.000 723	70.937 7	330.571	1 153.640
12	3.902 7	119.532	-123.435	1 515.069	11.347 7	-10.587 0	0.000 502	71.020 5	389.305	1 386.360
14	3.891 4	119.500	-123.391	1 268.199	11.351 5	-10.946 8	0.000 319 1	71.078 0	446.808	1 619.40
16	3.884 1	119.478	-123.363	1 021.417	11.354 0	-11.175 8	0.000 174 5	71.114 6	503.448	1 852.636
18	3.880 2	119.467	-123.347	774.692	11.355 4	-11.300 9	0.000 070 3	71.134 6	559.563	2 085.994
20	3.878 6	119.462	-123.340	527.998	11.355 9	-11.351 6	0.000 008 2	71.142 7	615.406	2 319.410
22	3.878 4	119.461	-123.340	281.317	11.356 0	-11.357 2	-0.000 004 3	71.143 6	671.138	2 552.851
24	3.878 5	119.462	-123.340	34.638	11.355 9	-11.354 1	0.000 052 3	71.143 1	726.865	2 786.29
24.28				0				71.143 9	734.690	2 819.07

中 q 值变化很小, 并且对于同一发射方向(即 q_0 值相同), 虽然开始导引时的相对距离 r_0 不同, 但导弹命中目标时的目标线角 q_k 值却是相同的, 即 q_k 值与 r_0 无关。以上结论可证明如下

命中目标时 $r_k=0$, 由方程组(4-29)第二式得

$$\eta_k = \arcsin \left[\frac{1}{p} \sin(q_k - \sigma_{Tk}) \right] \quad (4-32)$$

积分式(4-27)得

$$\eta_k = \eta_0 + (1-K)(q_k - q_0)$$

将此式代入式(4-32)中, 并将 $\eta_0=0^\circ$ (相当于直接瞄准发射的情况)和 $\sigma_T=0^\circ$ 代入, 则

$$q_k = q_0 - \frac{1}{K-1} \arcsin \left(\frac{\sin q_k}{p} \right)$$

由此式可见, q_k 值与初始相对距离 r_0 无关。

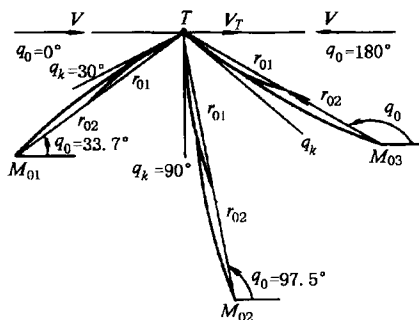


图 4-13 从不同方向发射的相对弹道示意图
($K=5$, $p=2$, $\eta_0=0^\circ$, $\sigma_T=0^\circ$)

由于

$$\sin q_k \leq 1$$

故

$$|q_k - q_0| \leq \frac{1}{K-1} \arcsin \left(\frac{1}{p} \right) \quad (4-33)$$

对于从不同方向发射的弹道中, 如把目标线转动角度的最大值 $|q_k - q_0|_{\max}$ 记作 $\Delta q_{\max}$, 并设 $K=5$, $p=2$, 则代入式(4-33)中可得 $\Delta q_{\max}=7.5^\circ$, 它对应于 $q_0=97.5^\circ$, $q_k=90^\circ$ 的情况。目标线实际上转过的角度不超过 $\Delta q_{\max}$ 。当 $q_0=33.7^\circ$ 时, $q_k=30^\circ$, 目标线只转过 3.7° 。

$\Delta q_{\max}$ 值取决于速度比 p 和比例系数 K , 变化趋势如图 4-14 所示。由图可见, 目标线最大转动角将随着速度比 p 和比例系数 K 的增大而减小。

2. 导弹的需用法向过载

比例导引法要求导弹的转弯速度 $\dot{\sigma}$ 与目标线旋转角速度 $\dot{q}$ 成正比, 因而导弹的需用法向过载也与 $\dot{q}$ 成正比。要了解导弹弹道上各点需用法向过载的变化规律, 只需讨论 $\dot{q}$ 的变化规律。

对方程组(4-29)的第二式两边同时对时间求导, 得

$$\dot{r}\dot{q} + r\ddot{q} = \dot{V}\sin\eta + V\dot{\eta}\cos\eta - \dot{V}_T\sin\eta_T - V_T\dot{\eta}_T\cos\eta_T$$

由于

$$\dot{\eta} = (1-K)\dot{q}$$

$$\dot{\eta}_T = \dot{q} - \dot{\sigma}_T$$

$$\dot{r} = -V\cos\eta + V_T\cos\eta_T$$

代入上式, 整理后得

$$r\ddot{q} = -(KV\cos\eta + 2\dot{r})(\dot{q} - \dot{q}^*) \quad (4-34)$$

式中

$$\dot{q}^* = \frac{\dot{V}\sin\eta - \dot{V}_T\sin\eta_T + V_T\dot{\sigma}_T\cos\eta_T}{KV\cos\eta + 2\dot{r}} \quad (4-35)$$

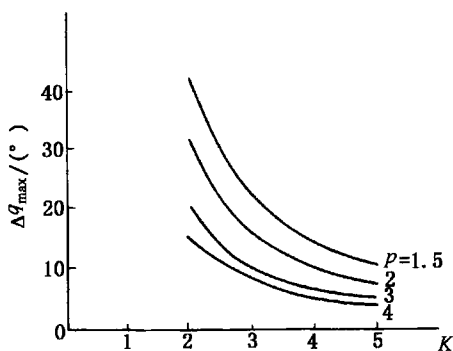


图 4-14 目标线最大转动角 ($\eta_0=0^\circ$)

以下分两种情况讨论：

(1) 目标作等速直线飞行，导弹作等速飞行的情况

在此特殊情况下，由式(4-35)可知

$$\dot{q}^* = 0$$

于是式(4-34)可改写为

$$\ddot{q} = -\frac{1}{r}(KV\cos\eta + 2\dot{r})\dot{q} \quad (4-36)$$

由式(4-36)可知：如果 $(KV\cos\eta + 2\dot{r}) > 0$ ，则 $\ddot{q}$ 与 $\dot{q}$ 的符号相反。当 $\dot{q} > 0$ 时， $\ddot{q} < 0$ ，即 $\dot{q}$ 值将减小；当 $\dot{q} < 0$ 时， $\ddot{q} > 0$ ， $\dot{q}$ 值将增大。总之， $|\dot{q}|$ 将不断减小。如图4-15所示， $\dot{q}$ 随时间的变化规律是向横坐标接近，弹道的需用法向过载将随 $|\dot{q}|$ 的减小而减小，弹道变得平直。这种情况称为 $\dot{q}$ “收敛”。

若 $(KV\cos\eta + 2\dot{r}) < 0$ ，则 $\ddot{q}$ 与 $\dot{q}$ 同号， $|\dot{q}|$ 将不断增大， $\dot{q}$ 随时间的变化规律如图4-16所示。这种情况称为 $\dot{q}$ “发散”。弹道的需用法向过载将随 $|\dot{q}|$ 的增大而增大，弹道变得弯曲。

因此，要使导弹平缓转弯，就必须使 $\dot{q}$ “收敛”。为此，应满足条件

$$K > \frac{2|\dot{r}|}{V\cos\eta} \quad (4-37)$$

由此得出结论：只要比例系数 K 选择得足够大，使其满足式(4-37)的条件，则 $|\dot{q}|$ 值就可逐渐减小而趋于零；相反，如果不满足式(4-37)的条件，则 $|\dot{q}|$ 将逐渐增大，在接近目标时，导弹要以无穷大的速率转弯，这实际上是无法实现的，最终将导致脱靶。

(2) 目标作机动飞行，导弹作变速飞行的情况

由式(4-35)可见： $\dot{q}^*$ 是随时间变化的函数，它与目标的切向加速度 $\dot{V}_T$ 、法向加速度 $V_T\dot{\sigma}_T$ 和导弹的切向加速度 $\dot{V}$ 有关。因此， $\dot{q}^*$ 不再为零。当 $(KV\cos\eta + 2\dot{r}) \neq 0$ 时， $\dot{q}^*$ 是有限值。

由式(4-34)可见，如果 $(KV\cos\eta + 2\dot{r}) > 0$ ，且 $\dot{q} < \dot{q}^*$ ，则 $\ddot{q} > 0$ ，这时 $\dot{q}$ 将不断增大；而当 $\dot{q} > \dot{q}^*$ 时，则 $\ddot{q} < 0$ ，这时 $\dot{q}$ 将不断减小。总之， $(KV\cos\eta + 2\dot{r}) > 0$ 时， $\dot{q}$ 有逐渐接近 $\dot{q}^*$ 的趋势。反之，如果 $(KV\cos\eta + 2\dot{r}) < 0$ ，则 $\dot{q}$ 有逐渐离开 $\dot{q}^*$ 的趋势，弹道变得弯曲，在接近目标时，导弹要以极大的速率转弯。

下面讨论命中目标时的 $\dot{q}_k$ 值。

如果 $(KV\cos\eta + 2\dot{r}) > 0$ ，则 $\dot{q}$ 是有限值。由式(4-34)看出，在命中点 $r_k = 0$ ，则此式左端是零，这就要求在命中点处 $\dot{q}$ 与 $\dot{q}^*$ 应相等，即

$$\dot{q}_k = \dot{q}_k^* = \frac{\dot{V} \sin\eta - \dot{V}_T \sin\eta_T + V_T \dot{\sigma}_T \cos\eta_T}{KV\cos\eta + 2\dot{r}} \Big|_{t=t_k} \quad (4-38)$$

命中目标时，导弹的需用法向过载为

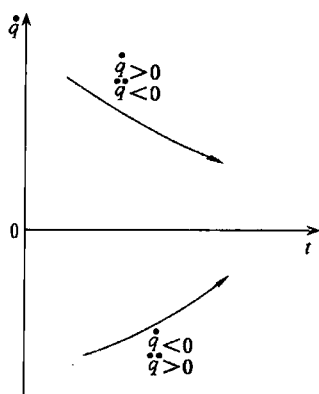


图4-15 $(KV\cos\eta + 2\dot{r}) > 0$ 时 $\dot{q}$ 的变化规律

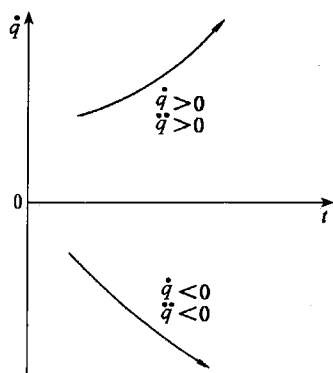


图4-16 $(KV\cos\eta + 2\dot{r}) < 0$ 时 $\dot{q}$ 的变化规律

$$n_k = \frac{V_k \dot{\sigma}_k}{g} = \frac{KV_k \dot{q}_k}{g} = \frac{1}{g} \frac{(\dot{V} \sin \eta - \dot{V}_T \sin \eta_T + V_T \dot{\sigma}_T \cos \eta_T)}{\cos \eta - \frac{2|\dot{r}|}{KV}} \Big|_{t=t_k} \quad (4-39)$$

从式(4-39)可见,导弹命中目标时的需用法向过载与命中点的导弹速度和导弹向目标的接近速度 $\dot{r}$ (或导弹攻击方向)有直接关系。如果命中点导弹的速度小,需用法向过载将增大。特别是对于空-空导弹来说,通常是在被动段命中目标的,由于被动段速度的下降,命中点附近的需用法向过载将增大。导弹从不同方向攻击目标, $|\dot{r}|$ 值是不同的,例如迎面攻击 $|\dot{r}| = V + V_T$, 尾追攻击 $|\dot{r}| = V - V_T$ 。由于前半球攻击的 $|\dot{r}|$ 值比后半球攻击的 $|\dot{r}|$ 值大,显然,前半球攻击的需用法向过载就比后半球攻击的大,因此,后半球攻击比较有利。由式(4-39)还可看出:命中时刻导弹的速度变化和目标的机动性对需用法向过载也有影响。

当 $(KV \cos \eta + 2\dot{r}) < 0$ 时, $\dot{q}$ 是发散的, $|\dot{q}|$ 不断增大而趋于无穷大,因此

$$\dot{q}_k \rightarrow \infty$$

这意味着 K 较小时,在接近目标的瞬间,导弹要以无穷大的速率转弯,命中点的需用法向过载也趋于无穷大,这实际上是不可能实现的。所以, $K < (2|\dot{r}|/V \cos \eta)$ 时,就不能直接命中目标。

三、比例系数 K 的选择

从前面讨论可知,比例系数 K 的大小直接影响弹道特性,影响导弹能否直接命中目标。选择合适的 K 值除考虑这两个因素外,还需要考虑结构强度所允许的承受过载的能力,以及制导系统能否稳定地工作等因素。

1. K 值的下限应满足 $\dot{q}$ 收敛的条件

$\dot{q}$ 收敛使导弹在接近目标的过程中目标线的旋转角速度 $|\dot{q}|$ 不断减小,相应的需用法向过载也不断减小。 $\dot{q}$ 收敛的条件为

$$K > \frac{2|\dot{r}|}{V \cos \eta} \quad (4-40)$$

这就限制了 K 的下限值。由式(4-40)可知,导弹从不同方向攻击目标, $|\dot{r}|$ 值是不同的, K 的下限值也不相同,这就要依据具体情况选择适当的 K 值,使导弹从各个方向攻击的性能都能适当照顾,不至于优劣悬殊;或者只考虑充分发挥导弹在主攻方向上的性能。

2. K 值受可用法向过载的限制

式(4-40)限制了比例系数的 K 的下限值。但其上限值如果取得过大,由 $n = (KV\dot{q}/g)$ 可知,即使 $\dot{q}$ 值不太大,也可能使需用法向过载很大。导弹在飞行中的可用法向过载受到最大舵偏转角的限制。若需用法向过载超过可用法向过载,则导弹将不能沿比例导引弹道飞行。因此,可用法向过载限制了 K 的上限值。

3. K 值应满足制导系统稳定工作的要求

如果 K 值选得过大,外界干扰对导弹飞行的影响明显增大。 $\dot{q}$ 的微小变化将引起 $\dot{\sigma}$ 的很大变化。从制导系统能稳定地工作出发, K 值的上限要受到限制。

综合考虑上述因素,才能选择出一个合适的 K 值。它可以是个常数,也可以是个变数。

四、比例导引法的优缺点

比例导引法的优点是:在满足 $K > (2|\dot{r}|/V \cos \eta)$ 的条件下, $|\dot{q}|$ 逐渐减小,弹道前段较

弯曲,能充分利用导弹的机动能力;弹道后段较为平直,使导弹具有较充裕的机动能力。只要 K 、 η_0 、 q_0 、 p 等参数组合适当,就可以使全弹道上需用法向过载均小于可用法向过载,因而能实现全向攻击。另外,与平行接近法相比,对瞄准发射时的初始条件要求不严。在技术实施上只需测量 $\dot{q}$ 、 $\dot{\sigma}$,实现比例导引比较容易。比例导引法的弹道也较平直。因此,空-空、地-空等自动瞄准制导的导弹都广泛采用比例导引法。

比例导引法的缺点是:命中目标时的需用法向过载与命中点的导弹速度和导弹的攻击方向有直接关系。

五、其它形式的比例导引规律

为了消除上述比例导引法的缺点,改善比例导引特性,多年来人们致力于比例导引法的改进,并对于不同的应用条件提出了许多不同的改进比例导引形式。以下仅举几例说明。

1. 广义比例导引法

其导引关系为需用法向过载与目标线旋转角速度成比例,即

$$n = K_1 \dot{q} \quad (4-41)$$

或

$$n = K_2 |\dot{r}| \dot{q} \quad (4-42)$$

式中 K_1 、 K_2 ——比例系数。

下面讨论这两种广义比例导引法在命中点处的需用法向过载。

关系式 $n = K_1 \dot{q}$ 与上述比例导引法 $n = (KV/g)\dot{q}$ (即 $\dot{\sigma} = K\dot{q}$) 比较,得

$$K = \frac{K_1 g}{V}$$

代入式(4-39)中,此时,命中目标时导弹的需用法向过载为

$$n_k = \frac{1}{g} \frac{(\dot{V} \sin \eta - \dot{V}_T \sin \eta_T + V_T \dot{\sigma}_T \cos \eta_T)}{\cos \eta - \frac{2|\dot{r}|}{K_1 g}} \bigg|_{t=t_k} \quad (4-43)$$

由式(4-43)可见:按 $n = K_1 \dot{q}$ 形式的比例导引规律导引,命中点处的需用法向过载与导弹的速度没有直接关系。

按 $n = K_2 |\dot{r}| \dot{q}$ 形式导引时,其在命中点处的需用法向过载可仿照前面推导方法,此时

$$K = \frac{K_2 g |\dot{r}|}{V}$$

代入式(4-39)中,就可以得到按 $n = K_2 |\dot{r}| \dot{q}$ 形式的比例导引规律导引时在命中点处的需用法向过载为

$$n_k = \frac{1}{g} \frac{(\dot{V} \sin \eta - \dot{V}_T \sin \eta_T + V_T \dot{\sigma}_T \cos \eta_T)}{\cos \eta - \frac{2}{K_2 g}} \bigg|_{t=t_k} \quad (4-44)$$

由式(4-44)可见:按 $n = K_2 |\dot{r}| \dot{q}$ 导引规律导引,命中点处的需用法向过载不仅与导弹速度无关,而且与导弹攻击方向也无关,这有利于实现全向攻击。

2. 改进比例导引法

根据式(4-29),相对运动方程可以写为

$$\begin{cases} \dot{r} = -V \cos(\sigma - q) + V_T \cos(\sigma_T - q) \\ r\dot{q} = -V \sin(\sigma - q) + V_T \sin(\sigma_T - q) \end{cases} \quad (4-45)$$

对方程(4-45)第二式求导,并将第一式代入,经整理后得到

$$r\ddot{q} + 2\dot{r}\dot{q} = -\dot{V}\sin(\sigma - q) + \dot{V}_T\sin(\sigma_T - q) + V_T\dot{\sigma}_T\cos(\sigma_T - q) - V\dot{\sigma}\cos(\sigma - q) \quad (4-46)$$

控制系统实现比例导引时,一般是使弹道需用法向过载与目标线的旋转角速度成比例,即

$$n = A\dot{q} \quad (4-47)$$

又知

$$n = \frac{V}{g}\dot{\sigma} + \cos\sigma \quad (4-48)$$

式中过载 n 定义为控制力(不含重力)产生过载(即第二章中第一种定义)。

将式(4-48)代入式(4-47)中,可得

$$\dot{\sigma} = \frac{g}{V}(A\dot{q} - \cos\sigma) \quad (4-49)$$

将式(4-49)代入式(4-46)中,经整理得

$$\ddot{q} + \frac{|\dot{r}|}{r} \left(\frac{Ag\cos(\sigma - q)}{|\dot{r}|} - 2 \right) \dot{q} = \frac{1}{r} [-\dot{V}\sin(\sigma - q) + \dot{V}_T\sin(\sigma_T - q) + V_T\dot{\sigma}_T\cos(\sigma_T - q) + g\cos\sigma\cos(\sigma - q)] \quad (4-50)$$

令 $N = Ag\cos(\sigma - q)/|\dot{r}|$, 称为有效导航比。于是,式(4-50)可改写为

$$\ddot{q} + \frac{|\dot{r}|}{r} (N - 2) \dot{q} = \frac{1}{r} [-\dot{V}\sin(\sigma - q) + \dot{V}_T\sin(\sigma_T - q) + V_T\dot{\sigma}_T\cos(\sigma_T - q) + g\cos\sigma\cos(\sigma - q)] \quad (4-51)$$

由上式可见,导弹按比例导引法导引,目标线转动角速度(弹道需用法向过载)还受到导弹切向加速度、目标切向加速度、目标机动和重力作用的影响。

目前许多自动瞄准制导的导弹,采用改进比例导引法。改进比例导引法就是对引起目标线转动的几个因素进行补偿,使得由它们产生的弹道需用法向过载在命中点附近尽量小。目前采用较多的是对导弹切向加速度和重力作用进行补偿。目标切向加速度和目标机动由于是随机的,用一般方法进行补偿比较困难。

改进比例导引的形式根据设计思想的不同可有多种形式。这里根据使导弹切向加速度和重力作用引起的弹道需用法向过载在命中点处的影响为零来设计。假设改进比例导引的形式为

$$n = A\dot{q} + y \quad (4-52)$$

式中 y ——待定的修正项。

于是

$$\dot{\sigma} = \frac{g}{V}(A\dot{q} + y - \cos\sigma) \quad (4-53)$$

将式(4-53)代入式(4-46)中,并设 $\dot{V}_T=0$, $\dot{\sigma}_T=0$, 则得到

或

$$r\ddot{q} + 2\dot{r}\dot{q} + Ag\cos(\sigma - q)\dot{q} = -\dot{V}\sin(\sigma - q) + g\cos\sigma\cos(\sigma - q) - g\cos(\sigma - q)y \quad (4-54)$$

若假设

$$r = r_0 - |\dot{r}|t, \quad T = \frac{r_0}{|\dot{r}|}$$

式中 t ——导弹飞行时间；

T ——导引段飞行总时间。

则方程式(4-54)就成为

$$\ddot{q} + \frac{1}{T-t}(N-2)\dot{q} = \frac{1}{r}[-\dot{V}\sin(\sigma-q) + g\cos\sigma\cos(\sigma-q) - g\cos(\sigma-q)y] \quad (4-55)$$

对式(4-55)进行积分, 可得

$$\dot{q} = \dot{q}_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{N-2} + \frac{1}{(N-2)|r|}[-\dot{V}\sin(\sigma-q) - g\cos(\sigma-q)y + g\cos\sigma\cos(\sigma-q)] \left[1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{N-2}\right] \quad (4-56)$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad n = A\dot{q} + y &= A\dot{q}_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{N-2} + \frac{A}{(N-2)|r|}[-\dot{V}\sin(\sigma-q) \\ &\quad - g\cos(\sigma-q)y + g\cos\sigma\cos(\sigma-q)] \left[1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{N-2}\right] + y \end{aligned} \quad (4-57)$$

命中点处: $t=T$, 欲使 n 为零, 必须有

$$\frac{A}{(N-2)|r|}[-\dot{V}\sin(\sigma-q) - g\cos(\sigma-q)y + g\cos\sigma\cos(\sigma-q)] + y = 0$$

$$\text{则} \quad y = -\frac{N}{2g}\dot{V}\tan(\sigma-q) + \frac{N}{2}\cos\sigma \quad (4-58)$$

于是, 改进比例导引法的导引关系式为

$$n = A\dot{q} - \frac{N}{2g}\dot{V}\tan(\sigma-q) + \frac{N}{2}\cos\sigma \quad (4-59)$$

上式中右端第二项为导弹切向加速度补偿项, 第三项为重力补偿项。

六、实现比例导引方法举例

实现比例导引, 制导系统容易实现, 其制导控制回路如图 4-17 所示。它基本上由导引头回路、导弹控制指令形成装置、导弹自动驾驶回路三部分组成, 加上导弹及目标的运动学环节使回路得到闭合。导引头连续跟踪目标, 使天线瞄准目标, 产生与目标线旋转角速度 $\dot{q}$ 成正比的控制信号。图 4-18 为导引头的方块图。目标位标器是用来测量目标线角 q 与目标位标器光轴视线角 q_1 之间的差值 Δq , 力矩马达是为陀螺提供进动力矩 M 的装置。下面以导弹在纵向平面内的导引为例, 假定目标位标器、放大器、力矩马达、进动陀螺等环节均是理想比例

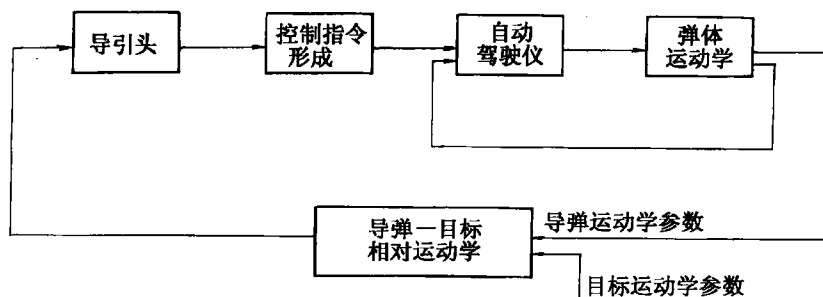


图 4-17 比例导引制导规律回路示意图

环节，忽略其惯性。各个环节的输入量和输出量之间的关系式为

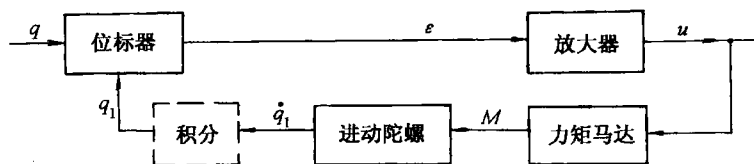


图 4-18 导引头方块图

$$u = K_{\epsilon}(q - q_1) = K_{\epsilon}\Delta q \quad (4-60)$$

$$M = K_M u \quad (4-61)$$

$$\frac{dq_1}{dt} = K_H M \quad (4-62)$$

式中 K_{ϵ} ——放大器的放大系数；

K_M ——力矩马达的比例系数；

K_H ——进动陀螺的比例系数。

式(4-60)对时间求一次导数得

$$\frac{du}{dt} = K_{\epsilon} \frac{d\Delta q}{dt} = K_{\epsilon} \left(\frac{dq}{dt} - \frac{dq_1}{dt} \right)$$

将式(4-62)和(4-61)代入上式后可得

$$\frac{du}{dt} = K_{\epsilon} \left(\frac{dq}{dt} - K_H K_M u \right)$$

或写成

$$\frac{du}{dt} + K_{\epsilon} K_H K_M u = K_{\epsilon} \frac{dq}{dt}$$

当 u 达到稳态值(即 $\frac{du}{dt} = 0$)时，上式可改写为

$$u = \frac{1}{K_H K_M} \frac{dq}{dt}$$

由上式可见：导引头的输出信号 u 是与目标线的旋转角速度 $\dot{q}$ 成正比。

导引头输出的信号 u 用来驱动舵机，使舵面偏转。假定舵面的偏转角 δ_z 与 u 之间成线性关系，即

$$\delta_z = K_P u$$

式中 K_P 为比例系数。

由于舵面偏转改变了导弹的攻角 α ，最终使导弹产生一个法向加速度 $V(d\theta/dt)$ 。如果忽略重力的影响，在平衡条件下可得

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{K_H K_M} \frac{dq}{dt} \\ \delta_z &= K_P u \\ \alpha &= -\frac{m_z^{\delta_z}}{m_z^c} \delta_z \\ V \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{m} \left(\frac{P}{57.3} + Y^a \right) \alpha \end{aligned} \right\} \quad (4-63)$$

由此可以求得导弹速度矢量的转动角速度的表达式为

$$\frac{d\theta}{dt} = -K_P \frac{1}{K_H K_M} \frac{\left(\frac{P}{57.3} + Y^a\right)}{mV} \frac{m_z^{\delta z}}{m_z^a} \frac{dq}{dt}$$

当比例导引法是采用 $\dot{\theta} = K\dot{q}$ 形式时, 比例系数 K 由上式可以得到

$$K = -\frac{K_P}{K_H K_M} \frac{\left(\frac{P}{57.3} + Y^a\right)}{mV} \frac{m_z^{\delta z}}{m_z^a} \quad (4-64)$$

由上式看出: 比例系数 K 与导弹控制系统的参数(如 K_P 、 K_H 和 K_M 等)、导弹的气动特性(如 Y^a 、 $m_z^{\delta z}$ 和 m_z^a 等)、导弹的飞行性能(如 V 等)、导弹的结构参数和推力特性(如 m 、 P 等)有关。由于这些参数在导弹的飞行过程中是不断变化的, 故比例系数 K 也在不断变化, 这就使得导弹在飞行过程中的弹道特性也将随之变化。

当比例导引法是采用 $n = K_1 \dot{q}$ 形式时, 其比例系数 K_1 为

$$K_1 = -\frac{K_P}{K_H K_M} \frac{\left(\frac{P}{57.3} + Y^a\right)}{mg} \frac{m_z^{\delta z}}{m_z^a} \quad (4-65)$$

§ 4-6 三点法

下面研究遥控制导导弹的导引方法。遥控导引时, 导弹和目标的运动参数均由制导站来测量。研究遥控导引弹道时, 既要考虑目标的运动特性, 还要考虑制导站的运动状态对导弹运动的影响。在讨论遥控导引弹道特性时, 把导弹、目标和制导站看成质点, 并设目标和制导站的运动特性 V_T 、 V_C 、 σ_T 、 σ_C 的变化规律和导弹速度 V 的变化规律为已知。

遥控制导习惯上采用雷达坐标系 $Ox_R y_R z_R$, 如图 4-19 所示, 并定义如下

原点 O ——与制导站位置 C 重合;

Ox_R 轴——指向跟踪物, 包括目标和导弹;

Oy_R 轴——位于包含 Ox_R 轴的铅垂面内垂直于 Ox_R 轴, 并指向上方;

Oz_R 轴——与 Ox_R 和 Oy_R 轴组成右手直角坐标系。

根据雷达坐标系 $Ox_R y_R z_R$ 和地面坐标系 $Oxyz$ 的定义, 它们之间的关系由两个角度来确定(如图 4-19 所示)。

高低角 ϵ —— Ox_R 轴与地平面 Oxz 之间的夹角, $0^\circ \leq \epsilon \leq 90^\circ$ 。若跟踪物为目标, 则称之为目标高低角, 用 ϵ_T 表示; 若跟踪物为导弹, 则称之为导弹高低角, 用 ϵ_M 表示。

方位角 β —— Ox_R 轴在地平面上的投影 Ox'_R 与地面坐标系 Ox 轴之间的夹角。若从 Ox 轴以逆时针转到 Ox'_R 上, 则 β 为正。跟踪物为目标, 则称之为目标方位角, 以 β_T 表示; 跟踪物为导弹, 则称之为导弹方位角, 以 β_M 表示。

跟踪物的坐标可以用 (x_R, y_R, z_R) 表示; 也可以用 (R, ϵ, β) 表示, 其中 R 表示坐标原点到跟踪物的距离, 称为矢径。

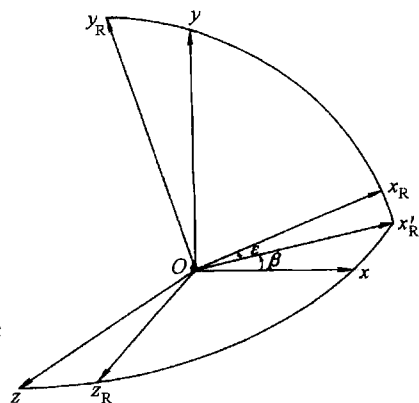


图 4-19 雷达坐标系

一、三点法导引关系方程

三点法导引是指导弹在攻击目标的导引过程中,导弹始终处于制导站与目标的连线上。如果观察者从制导站上看目标,则目标的影像正好被导弹的影像所覆盖。因此,三点法又称目标覆盖法或重合法(图 4-20)。

按三点法导引,由于制导站与导弹的连线 $\overline{CM}$ 和制导站与目标的连线 $\overline{CT}$ 重合在一起,所以三点法的导引关系方程为

$$\epsilon_M = \epsilon_T, \quad \beta_M = \beta_T \quad (4-66)$$

技术上实施三点法导引很容易。例如,反坦克导弹是射手借助光学瞄准具进行目视跟踪目标,并控制导弹时刻处在制导站与目标的连线上;地-空导弹是用一根雷达波束既跟踪目标,同时又制导导弹,使导弹始终处在波束中心线上运动。如果导弹偏离了波束中心线,则制导系统就会发出指令,控制导弹回到波束中心线上来(如图 4-21 所示)。

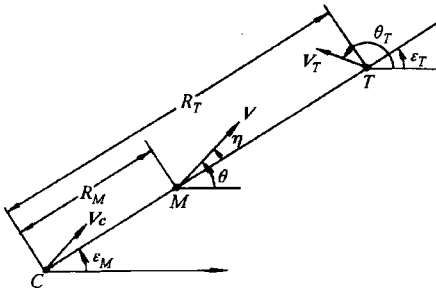


图 4-20 三点法

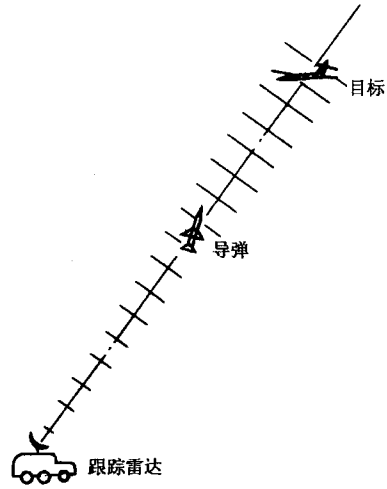


图 4-21 三点法波束制导

二、三点法导引的运动学方程组

以下研究在铅垂平面内的三点法导引。设制导站是静止的,攻击平面为铅垂平面,即目标和导弹始终处在通过制导站的铅垂平面内运动。参考图 4-20,三点法导引的相对运动方程组为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dR_M}{dt} &= V \cos \eta \\ R_M \frac{d\epsilon_M}{dt} &= -V \sin \eta \\ \frac{dR_T}{dt} &= V_T \cos \eta_T \\ R_T \frac{d\epsilon_T}{dt} &= -V_T \sin \eta_T \end{aligned} \right\} \quad (4-67)$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_M &= \theta + \eta \\ \epsilon_T &= \theta_T + \eta_T \\ \epsilon_M &= \epsilon_T \end{aligned} \right\} \quad (4-67) \text{ 续}$$

方程组(4-67)中, 目标运动参数 $V_T(t)$ 、 $\theta_T(t)$ 和导弹速度 $V(t)$ 的变化规律是已知的。方程组的求解可用数值积分法和解析法, 当然也可以利用图解法求出三点法导引的绝对弹道和相对弹道。

利用数值积分法解算方程组(4-67)时, 在给定初始条件(R_{M0} 、 ϵ_{M0} 、 R_{T0} 、 ϵ_{T0} 、 θ_0 、 η_0 、 η_{T0})下, 可首先积分方程组中第三、第四和第六式, 求出目标运动参数 $R_T(t)$ 、 $\epsilon_T(t)$ 、 $\eta_T(t)$, 然后积分其余方程, 解出导弹运动参数 $R_M(t)$ 、 $\epsilon_M(t)$ 、 $\theta(t)$ 、 $\eta(t)$ 。由 $R_M(t)$ 和 $\epsilon_M(t)$ 可以绘出三点法导引的运动学弹道。

例 4-2 设坦克作水平等速直线运动, $V_T = 12\text{m/s}$, 反坦克导弹按三点法导引拦截目标, 并作等速飞行, $V = 120\text{m/s}$ 。攻击平面为一水平面, 制导站静止。导弹开始导引瞬间的条件为 $R_{T0} = 3000\text{m}$, $R_{M0} = 50\text{m}$, $q_{M0} = q_{T0} = 70^\circ$ (如图 4-22 所示)。用欧拉数值积分法解出三点法导引时的导弹运动参数, 并绘制弹道曲线。

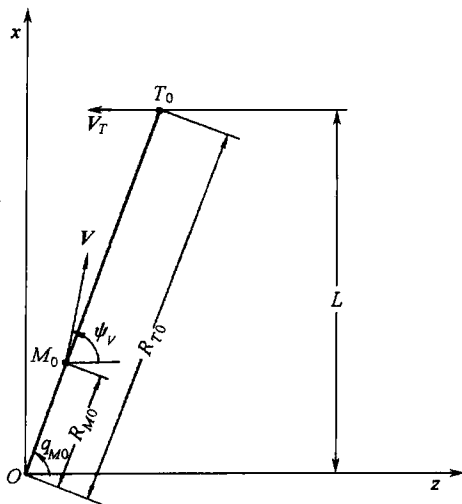


图 4-22 反坦克导弹三点法导引

[解] 选取地面坐标系 Oxz , 原点 O 与制导站重合, Oz 轴平行于目标的运动方向 (如图 4-22 所示)。根据已知条件, 三点法导引的相对运动方程组为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dR_M}{dt} &= V \cos(q_M - \psi_v) \\ R_M \frac{dq_M}{dt} &= -V \sin(q_M - \psi_v) \\ \frac{dR_T}{dt} &= -V_T \cos q_T \\ R_T \frac{dq_T}{dt} &= V_T \sin q_T \\ q_M &= q_T \end{aligned} \right\} \quad (4-68)$$

将此方程组改写成便于进行数值积分的形式, 即

$$\left. \begin{aligned} \psi_v &= q_M + \arcsin\left(\frac{V_T}{V} \frac{R_M}{R_T} \sin q_M\right) \\ \frac{dR_M}{dt} &= V \cos(q_M - \psi_v) \\ \frac{dR_T}{dt} &= -V_T \cos q_M \\ \frac{dq_M}{dt} &= -\frac{V}{R_M} \sin(q_M - \psi_v) \end{aligned} \right\} \quad (4-69)$$

为便于绘制弹道曲线，列出以下两个方程：

$$x = R_M \sin q_M, \quad z = R_M \cos q_M \quad (4-70)$$

根据上述方程组列表计算，计算结果见表 4-2。本例选取等积分步长 $\Delta t = 2\text{s}$ 。

表 4-2 例 4-2 的计算结果

t/s	$\psi_V/(\circ)$	$\frac{dR_M}{dt}$ $/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	R_M/m	$\frac{dR_T}{dt}$ $/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	R_T/m	$\frac{dq_M}{dt}/\text{s}^{-1}$	$q_M/(\circ)$	x/m	z/m
0	70.089 7	120	50	-4.104	3 000	0.003 75	70	46.985	17.1
2	70.953 0	119.995	290	-4.02	2 991.79	0.003 78	70.429 8	273.238	97.15
4	71.824 4	119.983	529.990	-3.933 6	2 983.75	0.003 799	70.862 9	500.682	173.73
6	72.702 6	119.964	769.956	-3.847 2	2 975.88	0.003 82	71.298 3	729.30	246.85
8	73.587 5	119.937	1 009.884	-3.760 8	2 968.18	0.003 839	71.736 0	958.99	316.50
10	74.479 1	119.903	1 249.759	-3.673 2	2 960.66	0.003 859	72.176 0	1 189.77	382.55
12	75.377 0	119.861	1 489.565	-3.584 4	2 953.31	0.003 877	72.618 2	1 421.49	444.93
14	76.281 4	119.811	1 729.287	-3.495 6	2 946.14	0.003 896	73.062 6	1 654.24	503.74
16	77.192 1	119.752	1 968.948	-3.406 8	2 939.15	0.003 915	73.509 1	1 887.99	558.97
18	78.108 6	119.685	2 208.412	-3.315 6	2 932.34	0.003 933	73.957 8	2 122.50	610.18
20	79.030 7	119.610	2 447.782	-3.225 6	2 925.71	0.003 951	74.408 5	2 357.70	657.84
22	79.958 7	119.525	2 687.001	-3.134 4	2 919.26	0.003 968	74.861 2	2 593.76	701.84
24	80.891 8		2 926.052		2 912.99		75.315 9	2 830.37	741.75

按照计算结果作图，可以得到三点法导引的运动学弹道曲线(如图 4-23)。根据命中时 $R_M = R_T$ ，利用线性内插可确定由开始三点法导引至命中目标所需的时间 $t_k = 23.9\text{s}$ 。

命中点位置一定是在目标运动轨迹上，则导弹在命中点所对应的 x_k 值为

$$x_k = L = R_{T0} \sin q_{T0} = 3000 \times 0.9397 = 2819.1\text{m}$$

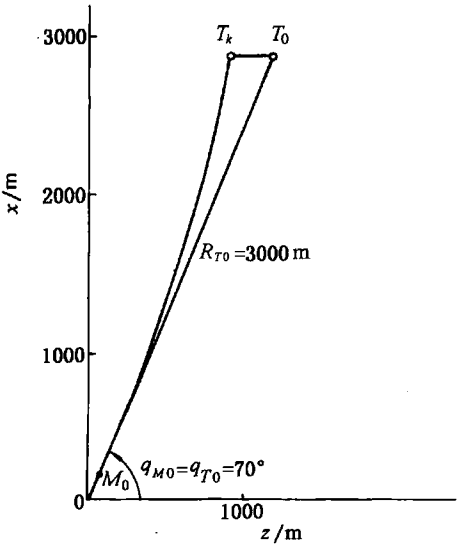


图 4-23

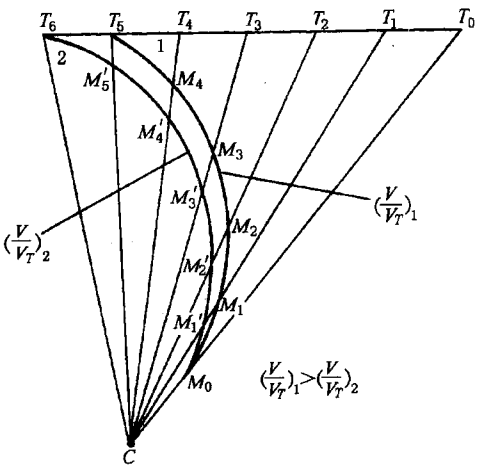


图 4-24 三点法导引弹道图解法

三、运动学弹道的图解法

这里只讨论制导站静止, 攻击平面为铅垂面的情况。假定目标的运动规律 $V_T(t)$ 、 $\theta_T(t)$ 和导弹速度 $V(t)$ 为已知。

在三点法导引的起始时刻 t_0 , 导弹和目标分别处于点 M_0 和 T_0 位置 (见图 4-24)。选取适当小的时间间隔 Δt , 目标在时刻 t_1 、 t_2 、 t_3 、……的位置分别以点 T_1 、 T_2 、 T_3 、……表示。将制导站的位置 C 点分别与 T_1 、 T_2 、 T_3 、……点相连。按三点法导引的定义, 在每一时刻导弹的位置应位于 C 点与对应时刻目标位置的连线上。导弹在时刻 t_1 的位置 M_1 点, 即是以 M_0 点为圆心, 以 $[(V(t_0) + V(t_1))/2](t_1 - t_0)$ 为半径作圆弧与线段 $\overline{CT_1}$ 的交点。 t_2 时刻导弹的位置 M_2 点, 同样是以 M_1 点为圆心, 以 $[(V(t_1) + V(t_2))/2](t_2 - t_1)$ 为半径作圆弧, 与线段 $\overline{CT_2}$ 的交点。依此类推。用光滑曲线连结 M_0 、 M_1 、 M_2 、……各点, 就得到三点法导引的运动学弹道曲线。为使计算的导弹平均速度 $(V(t_i) + V(t_{i+1}))/2$ 逼近对应瞬间的导弹速度, 时间间隔 Δt 应尽可能取得小些, 特别是在命中点附近。由图 4-24 可以看出, 导弹速度对目标速度的比值愈小, 则运动学弹道的曲率愈大。

四、运动学弹道的解析解

为了说明三点法导引的一般特性, 必须采用解析法求解。为此需作如下假设: 制导站为静止状态, 攻击平面与通过制导站的铅垂平面重合, 目标作水平等速直线飞行, 导弹的速度为常值。

取地面参考轴 Ox 平行于目标飞行航迹。参考图 4-25, 相对运动方程组 (4-67) 可改写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dR_M}{dt} &= V \cos \eta \\ R_M \frac{d\epsilon_M}{dt} &= -V \sin \eta \\ \frac{dR_T}{dt} &= -V_T \cos \epsilon_T \\ R_T \frac{d\epsilon_T}{dt} &= V_T \sin \epsilon_T \\ \theta &= \epsilon_M - \eta \\ \epsilon_M &= \epsilon_T \end{aligned} \right\} \quad (4-71)$$

只要解出弹道方程 $y = f(\epsilon_M)$, 就可以绘出弹道曲线。

由图 4-25 可得

$$\left. \begin{aligned} y &= R_M \sin \epsilon_M \\ H &= R_T \sin \epsilon_T \end{aligned} \right\} \quad (4-72)$$

方程组 (4-72) 中第一式对 ϵ_M 求导, 则有

$$\frac{dy}{d\epsilon_M} = \frac{dR_M}{d\epsilon_M} \sin \epsilon_M + R_M \cos \epsilon_M \quad (4-73)$$

将方程组 (4-71) 中的第二式去除第一式得

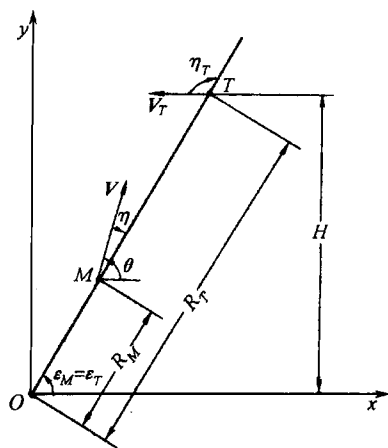


图 4-25 铅垂面内三点法导引

$$\frac{dR_M}{d\epsilon_M} = -\frac{R_M \cos \eta}{\sin \eta}$$

将此式代入式(4-73)中, 并利用(4-72)中第一式关系, 将 R_M 换成 y , 经整理后可得

$$\frac{dy}{d\epsilon_M} = -\frac{y \sin(\epsilon_M - \eta)}{\sin \eta \sin \epsilon_M} \quad (4-74)$$

为了求出弹道方程 $y=f(\epsilon_M)$, 必须对式(4-74)进行积分。但是直接积分该式是比较困难的, 通过引入弹道倾角 θ , 分别求出 y 与 θ 和 ϵ_M 与 θ 的关系

$$\left. \begin{aligned} y &= f_1(\theta) \\ \epsilon_M &= f_2(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (4-75)$$

即可求出 y 和 ϵ_M 的关系。下面求参量方程(4-75)。

利用几何关系式得

$$\theta = \epsilon_M - \eta \quad (4-76)$$

此式对 ϵ_M 求导得

$$\frac{d\theta}{d\epsilon_M} = 1 - \frac{d\eta}{d\epsilon_M} \quad (4-77)$$

根据三点法导引关系: $\epsilon_M = \epsilon_T$, $\dot{\epsilon}_M = \dot{\epsilon}_T$, 由方程组(4-71)可得

$$\sin \eta = -\frac{V_T}{V} \frac{R_M}{R_T} \sin \epsilon_M \quad (4-78)$$

将式(4-72)代入上式得

$$\sin \eta = -\frac{y}{pH} \sin \epsilon_M \quad (4-79)$$

式中, $p=V/V_T$ 。

上式对 ϵ_M 求导, 并把式(4-74)代入, 将其结果代入式(4-77)中, 经整理得

$$\frac{d\theta}{d\epsilon_M} = \frac{2 \sin(\epsilon_M - \eta)}{\sin \epsilon_M \cos \eta} \quad (4-80)$$

用上式去除式(4-74), 并将式(4-76)和式(4-79)代入得

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{y}{2} \cot \theta + \frac{pH}{2 \sin \theta} \quad (4-81)$$

式(4-81)为一阶线性微分方程, 其通解为

$$y = e^{\int \frac{1}{2} \cot \theta d\theta} \left[c + \int \frac{pH}{2 \sin \theta} e^{-\int \frac{1}{2} \cot \theta d\theta} d\theta \right] \quad (4-82)$$

因为

$$\int \cot \theta d\theta = \ln \sin \theta$$

$$e^{\int \frac{1}{2} \cot \theta d\theta} = \sqrt{\sin \theta}$$

$\theta = \theta_0$ 时, $y = y_0$

则

$$c = \frac{y_0}{\sqrt{\sin \theta_0}}$$

代入式(4-82)中, 则可得

$$y = \sqrt{\sin \theta} \left[\frac{y_0}{\sqrt{\sin \theta_0}} + \frac{pH}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin^{3/2} \theta} \right] \quad (4-83)$$

式中 y_0 、 θ_0 分别为导弹按三点法导引的起始瞬间的飞行高度和弹道倾角。

$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin^{3/2}\theta}$ 可用椭圆函数 $F(\theta_0) = \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin^{3/2}\theta}$ 和 $F(\theta) = \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin^{3/2}\theta}$ 表示, 则式(4-83)可改写成

$$y = \sqrt{\sin\theta} \left\{ \frac{y_0}{\sqrt{\sin\theta_0}} + \frac{pH}{2} [F(\theta_0) - F(\theta)] \right\} \quad (4-84)$$

此式表示出 y 和 θ 的关系。式中 $F(\theta)$ 和 $F(\theta_0)$ 可查椭圆函数表 4-3。

下面求 ϵ_M 和 θ 的关系式。将式(4-76)代入式(4-79)中得

$$\cot\epsilon_M = \cot\theta + \frac{y}{Hp\sin\theta} \quad (4-85)$$

表 4-3 椭圆函数 $F(\theta)$ 表

$\theta/(^\circ)$	$F(\theta)$	尾 差	$\theta/(^\circ)$	$F(\theta)$	尾 差
6	5.438 9	-1.230 4	51	0.774 9	-0.074 1
9	4.208 5	-0.664 6	54	0.700 8	-0.069 9
12	3.543 9	-0.664 6	57	0.630 9	-0.066 5
15	2.879 3	-0.462 8	60	0.564 4	-0.063 7
18	2.416 5	-0.346 4	63	0.500 7	-0.061 5
21	2.070 1	-0.221 4	66	0.439 2	-0.058 8
24	1.848 7	-0.185 5	69	0.380 4	-0.057 2
27	1.663 2	-0.158 6	72	0.323 2	-0.055 7
30	1.504 6	-0.138 7	75	0.267 5	-0.054 6
33	1.365 9	-0.123 9	78	0.212 9	-0.053 9
36	1.242 0	-0.112 0	81	0.159 0	-0.053 8
39	1.130 0	-0.099 8	84	0.105 2	-0.052 9
42	1.030 2	-0.091 7	87	0.052 3	-0.052 3
45	0.938 5	-0.084 7	90	0	
48	0.853 8	-0.078 9			

将给定的一系列 θ 值代入式(4-84)中, 求出对应的一系列 y 值, 再代入式(4-85)中, 可求出相应的 ϵ_M 值。这样, 利用下列方程组即可求得弹道参数, 并可绘出目标作等速水平直线飞行和导弹作等速飞行时按三点法导引的运动学弹道。

$$\left. \begin{aligned} y &= \sqrt{\sin\theta} \left\{ \frac{y_0}{\sqrt{\sin\theta_0}} + \frac{pH}{2} [F(\theta_0) - F(\theta)] \right\} \\ \cot\epsilon_M &= \cot\theta + \frac{y}{Hp\sin\theta} \\ R_M &= \frac{y}{\sin\epsilon_M} \end{aligned} \right\} \quad (4-86)$$

例 4-3 对例 4-2 采用解析解确定三点法导引的弹道参量, 将其结果与采用数值积分法的结果进行比较。

[解] 已知 $L=R_{T0}\sin q_{T0}=2819.1\text{m}$, $x_0=46.985\text{m}$, $\phi_{v_0}=70.0897^\circ$, $p=V/V_T=10$ 。

计算弹道的参量方程为

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{\sin\psi_v} \left\{ \frac{x_0}{\sqrt{\sin\psi_{v_0}}} + \frac{pL}{2} [F(\psi_{v_0}) - F(\psi_v)] \right\} \\ \cot q_M &= \cot\psi_v + \frac{x}{Lp\sin\psi_v} \\ R_M &= \frac{x}{\sin q_M} \\ z &= R_M \cos q_M \end{aligned} \right\} \quad (4-87)$$

根据方程组(4-87)列表计算,首先需给出一系列 ψ_v 值。为便于将其结果与数值积分法的计算结果进行比较,可参照表4-2给出的 ψ_v 值。

计算结果列于表4-4中。结果表明:用解析解确定三点法导引的弹道参量与数值积分法结果十分接近。

表 4-4 例 4-3 的计算结果

$\psi_v/(^{\circ})$	$F(\psi_v)$	$F(\psi_{v_0})$	x/m	$q_M/(^{\circ})$	R_M/m	z/m
70.0897	0.35962	0.35962	46.985	70.0000	50.000	17.101
70.9530	0.34316	0.35962	272.682	70.4306	289.398	96.934
71.8244	0.32655	0.35962	501.590	70.8613	530.935	174.072
72.7026	0.31016	0.35962	728.567	71.2997	769.172	246.612
73.5875	0.29373	0.35962	957.087	71.7400	1007.842	315.787
74.4791	0.27717	0.35962	1188.354	72.1790	1248.245	382.013
75.3770	0.26064	0.35962	1420.054	72.6210	1487.980	444.445
76.2814	0.24418	0.35962	1651.561	73.0684	1726.400	502.780
77.1921	0.22760	0.35962	1885.439	73.5151	1966.272	557.949
78.1086	0.21095	0.35962	2120.899	73.9622	2206.787	609.669
79.0307	0.19438	0.35962	2355.770	74.4141	2445.698	657.110
79.9587	0.17771	0.35962	2592.477	74.8658	2685.614	701.160
80.8917	0.16094	0.35962	2830.944	75.3173	2926.524	741.786

五、导弹的转弯速率

设导弹在铅垂面内飞行。如果知道了转弯速率 $\dot{\theta}(t)$,就可得到需用法向过载沿弹道上各点的变化规律。因此,转弯速率是一个很重要的弹道特性参量。

1. 目标作机动飞行,导弹作变速飞行时的情况

参考图4-20,将方程组(4-67)的第二式和第四式改写为

$$\dot{\epsilon}_M = \frac{V}{R_M} \sin(\theta - \epsilon_M)$$

$$\dot{\epsilon}_T = \frac{V_T}{R_T} \sin(\theta_T - \epsilon_T)$$

对于三点法导引,有 $\epsilon_M = \epsilon_T$, $\dot{\epsilon}_M = \dot{\epsilon}_T$, 于是

$$VR_T \sin(\theta - \epsilon_T) = V_T R_M \sin(\theta_T - \epsilon_T)$$

对上式两边求导得

$$\begin{aligned}
& (\dot{\theta} - \dot{\epsilon}_T)VR_T\cos(\theta - \epsilon_T) + \dot{V}R_T\sin(\theta - \epsilon_T) + V\dot{R}_T\sin(\theta - \epsilon_T) \\
& = (\dot{\theta}_T - \dot{\epsilon}_T)V_T R_M\cos(\theta_T - \epsilon_T) + \dot{V}_T R_M\sin(\theta_T - \epsilon_T) + V_T\dot{R}_M\sin(\theta_T - \epsilon_T)
\end{aligned}$$

再将下面运动学关系式

$$\begin{aligned}
\cos(\theta - \epsilon_T) &= \frac{\dot{R}_M}{V}, \quad \cos(\theta_T - \epsilon_T) = \frac{\dot{R}_T}{V_T} \\
\sin(\theta - \epsilon_T) &= \frac{R_M\dot{\epsilon}_T}{V}, \quad \sin(\theta_T - \epsilon_T) = \frac{R_T\dot{\epsilon}_T}{V_T}, \quad \tan(\theta - \epsilon_T) = \frac{R_M\dot{\epsilon}_T}{\dot{R}_M}
\end{aligned}$$

代入, 经整理后得

$$\dot{\theta} = \frac{R_M\dot{R}_T}{R_T\dot{R}_M}\dot{\theta}_T + \left[2 - \frac{2R_M\dot{R}_T}{R_T\dot{R}_M} - \frac{R_M\dot{V}}{\dot{R}_M V} \right] \dot{\epsilon}_T + \frac{\dot{V}_T}{V_T} \tan(\theta - \epsilon_T) \quad (4-88)$$

当命中目标时, $R_M = R_T$, 则命中点处导弹的转弯速率为

$$\dot{\theta}_k = \left[\frac{\dot{R}_T}{\dot{R}_M}\dot{\theta}_T + \left[2 - \frac{2\dot{R}_T}{\dot{R}_M} - \frac{R_M\dot{V}}{\dot{R}_M V} \right] \dot{\epsilon}_T + \frac{\dot{V}_T}{V_T} \tan(\theta - \epsilon_T) \right]_{t=t_k} \quad (4-89)$$

式(4-89)表明: 导弹按三点法导引时, 在命中点处导弹过载受目标机动的影响很大, 以致在命中点附近可能造成相当大的导引误差。

2. 目标作水平等速直线飞行, 导弹作等速飞行的情况

设目标飞行高度为 H , 导弹在铅垂平面内拦截目标, 如图 4-25 所示。

此时, $\dot{V}_T = 0$, $\dot{\theta}_T = 0$, $\dot{V} = 0$, 将这些条件代入式(4-88), 则得

$$\dot{\theta} = \left[2 - \frac{2R_M\dot{R}_T}{R_T\dot{R}_M} \right] \dot{\epsilon}_T \quad (4-90)$$

考虑以下关系式

$$\begin{aligned}
\epsilon_T &= \epsilon_M, \quad \dot{\epsilon}_T = \dot{\epsilon}_M \\
R_T &= H/\sin\epsilon_T \\
\dot{\epsilon}_T &= \frac{V_T}{R_T}\sin\epsilon_T = \frac{V_T}{H}\sin^2\epsilon_T
\end{aligned}$$

$$\dot{R}_M = V\cos\eta = V\sqrt{1 - \sin^2\eta} = V\sqrt{1 - \left(\frac{R_M\dot{\epsilon}_T}{V} \right)^2}$$

$$\dot{R}_T = -V_T\cos\epsilon_T$$

代入式(4-90)中, 整理后得

$$\dot{\theta} = \frac{V_T}{H}\sin^2\epsilon_T \left[2 + \frac{R_M\sin 2\epsilon_T}{\sqrt{p^2 H^2 - R_M^2 \sin^4 \epsilon_T}} \right] \quad (4-91)$$

命中目标时, $H = R_{Mk}\sin\epsilon_{Tk}$, 代入式(4-91)中, 就可以得到命中点处导弹的转弯速率

$$\dot{\theta}_k = \frac{2V_T}{H}\sin^2\epsilon_{Tk} \left[1 + \frac{\cos\epsilon_{Tk}}{\sqrt{p^2 - \sin^2\epsilon_{Tk}}} \right] \quad (4-92)$$

式(4-91)表明: 在 V_T 、 V (或 $p = \frac{V}{V_T}$) 和 H 已知时, 按三点法导引, 导弹的转弯速率完全取决于导弹所处的位置(R_M, ϵ_M), 即 $\dot{\theta}$ 是导弹矢径 R_M 与高低角 ϵ_M 的函数。

六、等法向加速度曲线

若给定 $\dot{\theta}$ 为某一常值, 则式(4-91)得到一个只包含变量 ϵ_M 与 R_M 的关系式, 即

$$f(R_M, \epsilon_M) = 0$$

上式在极坐标系中表示一条曲线, 在这条曲线上, 各点的 $\dot{\theta}$ 值均相等。显然, 在速度 V 为常值的情况下, 该曲线上各点的法向加速度 a_n 也是一常值。因此, 称这条曲线为等法向加速度曲线或等 $\dot{\theta}$ 曲线。如果给出一系列 $\dot{\theta}$ 值, 从式(4-91)就可以得到相应的一族等法向加速度曲线, 画在极坐标系中, 如图 4-26 中实线所示。

图中 $\dot{\theta}_4$ 曲线的铅垂线对应 $\epsilon_M = 90^\circ$ 的情况, 这时 $\dot{\theta}_4 = (2V_T/H)$ 。 $\dot{\theta}_1$ 、 $\dot{\theta}_2$ 、 $\dot{\theta}_3$ 曲线均通过 O 点, 它们的值, $\dot{\theta} < (2V_T/H)$ 。 $\dot{\theta}_5$ 曲线不通过 O 点, 对应 $\dot{\theta}_5 > (2V_T/H)$ 的情况, 也就是图中 $\dot{\theta}_1 < \dot{\theta}_2 < \dot{\theta}_3 < \dot{\theta}_4 < \dot{\theta}_5 \dots$ 。

图中虚线是各等法向加速度曲线中极小值点的连线, 它表示法向加速度的变化趋势, 沿这条虚线向上, 法向加速度值越来越大。称这条连线为主梯度线。

图中点划线为导弹在不同初始条件 (R_{M0}, ϵ_{M0}) 下所对应的三点法导引弹道。

应当指出, 等法向加速度曲线族是在某一给定的 V_T 、 V 、 H 值下画出来的。如果给出另一组值, 将得到另一族形状相似的等法向加速度曲线。

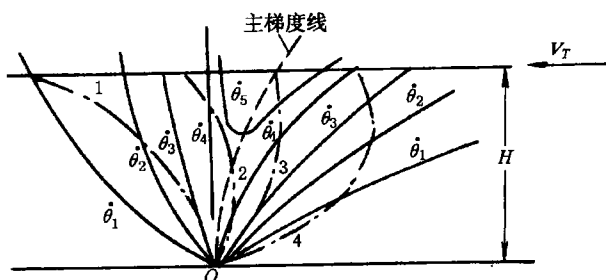


图 4-26 三点法导引弹道与等法向加速度曲线

等法向加速度曲线族对于研究弹道上各点的法向加速度(或需用法向过载)十分方便。从图中可见, 所有的弹道按其相对于主梯度线的位置可以分为三组, 一组在其右边, 一组在其左边, 另一组则与主梯度线相交。

(1) 主梯度线左边的弹道, 如图 4-26 中的弹道曲线 1, 相当于尾追攻击的情况, 初始发射的高低角 $\epsilon_{M0} \geq (\pi/2)$ 。弹道曲线首先与 $\dot{\theta}$ 较大值的等 $\dot{\theta}$ 曲线相交, 之后才与 $\dot{\theta}$ 较小值的等 $\dot{\theta}$ 曲线相交。可见, 随矢径 R_M 的增大, 弹道上对应点的法向加速度不断减小, 命中点处的法向加速度最小, 法向加速度的最大值出现在导引弹道的起点。由式(4-91)可以求得

导引弹道起始点 $R_M = R_{M0} = 0$

$$(a_n)_{\max} = V \dot{\theta}_{\max} = \frac{2VV_T}{H} \sin^2 \epsilon_{M0}$$

由于

$$\dot{\epsilon}_{M0} = \dot{\epsilon}_{T0} = \frac{V_T}{H} \sin^2 \epsilon_{M0}$$

所以

$$(a_n)_{\max} = 2V \dot{\epsilon}_{M0}$$

式中 $\dot{\epsilon}_{M0}$ 表示按三点法导引初始瞬间矢径 R_{M0} 的转动角速度。当 V_T 、 H 为常值时, $\dot{\epsilon}_{M0}$ 取决于初始瞬间矢径 R_{M0} 的高低角 ϵ_{M0} , ϵ_{M0} 越接近 $\pi/2$, $\dot{\epsilon}_{M0}$ 值越大。因此, 在主梯度线左边这一组弹道中, 最大的法向加速度出现在 $\epsilon_{M0} = (\pi/2)$ 时, 即

$$(a_{n\max})_{\max} = \frac{2VV_T}{H}$$

这种情况相当于目标飞临发射阵地上空时才发射导弹。

(2) 主梯度线右边的弹道, 如图 4-26 中的弹道曲线 4, 相当于迎击目标的情况, 初始发射的高低角 $\epsilon_{M0} < (\pi/2)$ 。弹道曲线首先与 $\dot{\theta}$ 较小值的等 $\dot{\theta}$ 曲线相交, 然后才与 $\dot{\theta}$ 较大值的等 $\dot{\theta}$ 曲线相交。可见, 弹道上各点的法向加速度值随矢径 R_M 的增大而增大, 而在命中点处法向加速度为最大。由式(4-92)求得命中点的法向加速度为

$$(a_n)_{\max} = V\dot{\theta}_k = \frac{2VV_T \sin^2 \epsilon_{Tk}}{H} \left[1 + \frac{\cos \epsilon_{Tk}}{\sqrt{p^2 - \sin^2 \epsilon_{Tk}}} \right]$$

主梯度线右边的这组弹道相当于迎击的情况, 即目标尚未飞到发射阵地上空时便被击落。在这组弹道中, 末段都比较弯曲。其中, 弹道曲线 3 在命中点处的法向加速度为最大, 该弹道曲线与主梯度线正好相交在命中点。地-空导弹主要采用迎击方式, 所以在采用三点法导引时, 导弹弹道末段比较弯曲。

(3) 与主梯度线相交的弹道, 如图 4-26 中的弹道曲线 2, 它介于上述两者之间, 最大法向加速度发生在弹道中段的某一点上。

七、攻击禁区

所谓攻击禁区是指在此区域内导弹的需用法向过载将超过可用法向过载, 因此导弹不能沿理想弹道飞行, 导致导弹不能直接命中目标。

下面以地-空导弹为例, 介绍按三点法导引时由可用法向过载所决定的攻击禁区。

当导弹以等速攻击在铅垂平面内作水平等速直线飞行的目标时, 若已知导弹的可用法向过载 n_p , 就可以算出相应的可用法向加速度 a_{np} 或转弯速率 $\dot{\theta}_p$, 在 V_T 、 V 、 H 一定时, 根据式(4-91)可以求出一族 (R_M, ϵ_M) 值, 这样可在极坐标中作出由导弹可用法向过载所决定的等法向加速度曲线 2, 如图 4-27 所示。曲线 2 与目标航迹相交于 E 、 F 两点。显然, 图中阴影区的需用法向过载超过了可用法向过载, 故存在由可用法向过载所决定的攻击禁区。在不同初始条件 (R_{M0}, ϵ_{M0}) 所对应的弹道中, 其中弹道曲线②的命中点恰好在 F 点, 弹道曲线①与曲线 2 相切于 E 点, 即弹道曲线①和②所对应的命中点处的需用法向过载正好等于可用法向过载。于是, 攻击平面被这两条弹道曲线分割成 I、II、III 三个区域。由图可见: 位于 I、III 区域内的任何一条弹道曲线都不会与曲线 2 相交, 即需用法向过载都小于可用法向过载。位于 II 区域内的所有弹道曲线, 在命中目标之前, 必然要与曲线 2 相交, 即需用法向过载将超过可用法向过载。因此, 应禁止导弹进入阴影区。我们把弹道曲线①、②称为极限弹道。如果用 ϵ_{M01} 、 ϵ_{M02} 分别表示①、②两条弹道的初始高低角, 则在掌握发射时机时, 发射高低角 ϵ_{M0} 应当选择

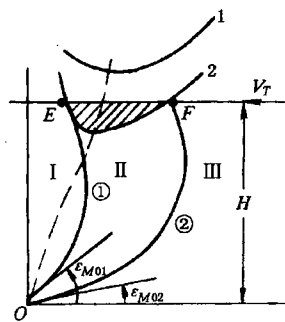


图 4-27 由可用法向过载决定的攻击禁区

$$\epsilon_{M0} \geq \epsilon_{M01}$$

或
$$\epsilon_{M0} \leq \epsilon_{M02}$$

但是, 对于地-空导弹来说, 为了阻止目标进入保卫区, 总是尽可能采用迎击方式, 所以, 选择的发射高低角应为

$$\epsilon_{M0} \leq \epsilon_{M02}$$

以上讨论的是由可用法向过载所决定的等法向加速度曲线与目标航迹相交的情况。如果可用法向过载相当大,对应的等法向加速度曲线(如图 4-27 中曲线 1)与目标航迹不相交。这时,不管以多大高低角发射,弹道上每一点的需用法向过载均小于可用法向过载。从法向过载的角度来看,这种情况不存在攻击禁区。

八、三点法导引的优缺点

综上所述,三点法导引最显著的优点是技术实施简单,抗干扰性能好。对射击低速目标;射击从高空向低空滑行或俯冲的目标;被射击的目标释放干扰,导弹制导站不能测量到目标距离信息时;制导雷达波束宽度或扫描范围很窄时,在这些范围内应用三点法不仅简单易行,而且其性能往往优于其他一些制导规律。它是地-空导弹使用较多的导引方法之一。

但是,三点法导引也存在明显的缺点。弹道较弯曲,迎击目标时,越是接近目标,弹道就越弯曲,需用法向过载就越大,命中点的需用法向过载达到最大。这对攻击高空和高速目标很不利。因为随着高度增加,空气密度迅速减小,由空气动力所提供的法向力也大大下降,使导弹的可用法向过载减小。又由于目标速度大,导弹的需用法向过载也相应增大。这样,在接近目标时,可能出现导弹的可用法向过载小于需用法向过载,导致导弹脱靶。

其次,动态误差难以补偿。动态误差是指制导系统过渡过程中复现输入时的误差。由于目标机动、导弹运动干扰等影响,制导回路实际上没有稳定状态,因此总会有动态误差。理想弹道越弯曲,引起的动态误差就越大。为了消除误差,需要在指令信号中加入补偿信号,这时,必须测量目标机动时的坐标及其一阶、二阶导数。由于来自目标的反射信号有起伏现象,以及接收机有干扰等原因,致使制导站测量的坐标不准确;如果再引入坐标的一阶和二阶导数,就会出现更大的误差,结果使形成的补偿信号不准确,甚至不易形成。因此,在三点法导引中,由于目标机动所引起的动态误差难于补偿,往往会形成偏离波束中心线十几米的动态误差。

还有,导弹按三点法导引迎击低空目标时,其发射角很小。导弹离轨时的飞行速度也很小,这时的操纵效率也比较低,空气动力所能提供的法向力也比较小,所以导弹离轨后可能有下沉现象。在初始段弹道比较低伸的情况下,若又存在较大下沉,则会引起导弹碰地。为了克服这一缺点,有的地-空导弹在攻击低空目标时,采用了小高度三点法,目的是提高初始段弹道高度(如图 4-28 所示)。小高度三点法是在三点法上,加入一项前置偏差量。小高度三点法制导规律的表达式为

$$\varepsilon_M = \varepsilon_T + \Delta\varepsilon$$

$$\beta_M = \beta_T$$

式中前置偏差量 $\Delta\varepsilon$ 随时间而衰减,当导弹接近目标时,趋于零值。 $\Delta\varepsilon$ 表达形式可采用

$$\Delta\varepsilon = \frac{h_\varepsilon}{R_M} e^{-\frac{t-t_f}{\tau}}$$

或

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_0 e^{-k\left(1 - \frac{R_M}{R_T}\right)}$$

式中, h_ε 和 τ 在给定弹道上取为常值, $\Delta\varepsilon_0$ 为初始前置偏差量, k 值为正的常值, t_f 一般为导弹进入波束的时间, t 为导弹飞行时间。

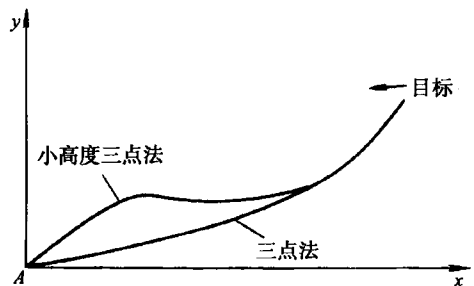


图 4-28 小高度三点法示意图

由于小高度三点法中加入一项前置偏差量 $\Delta\epsilon$ ，在导弹飞行中， $\Delta\epsilon$ 是正的，而其变化率却为负值，因此，小高度三点法的初始段飞行弹道比三点法的弹道要高(如图 4-28 所示)。

§ 4-7 前置量法

由三点法导引弹道特性可以看出：三点法导引弹道比较弯曲，需用法向过载较大。为了改善遥控制导导弹的导引弹道特性，就需要寻找能使弹道比较平直，特别是能使弹道末段比较平直的其他导引方法。

由追踪法和平行接近法的分析比较中可以看出：平行接近法中导弹速度矢量不指向目标，而是沿着目标飞行方向超前目标瞄准线一个角度，就可以使得平行接近法比追踪法的弹道平直。同理，遥控制导导弹也可以采用某一个前置量，使得弹道平直些。这里所指的前置量就是导弹与制导站连线 $\overline{CM}$ 超前目标与制导站连线 $\overline{CT}$ 一个角度。这类导引方法称为前置量法，也称为角度法或矫正法。

实现前置量法导引是用双波束制导，其中一根波束用于跟踪目标，测量目标位置；另一根波束用于跟踪和控制导弹，测量导弹的位置。

一、前置量法

所谓前置量法就是指导弹在整个导引过程中，导弹-制导站连线始终超前于目标-制导站连线，而这两条连线之间的夹角是按某种规律变化的。

1. 导引关系方程

采用雷达坐标系建立导引关系方程。按前置量法导引，导弹的高低角 ϵ_M 和方位角 β_M 应分别超前目标的高低角 ϵ_T 和方位角 β_T 一个角度，如图 4-29 所示。

下面研究攻击平面为铅垂面的情况。根据前置量法导引的定义有

$$\epsilon_M = \epsilon_T + \Delta\epsilon \quad (4-93)$$

式中 $\Delta\epsilon$ 为前置角。

导弹直接命中目标时，目标和导弹分别相对于制导站的距离之差 $\Delta R = R_T - R_M$ 应为零， $\Delta\epsilon$ 也应为零。为满足这两个条件， $\Delta\epsilon$ 与 ΔR 之间应有如下关系

$$\Delta\epsilon = C_e \Delta R$$

这样，式(4-93)可表示为

$$\epsilon_M = \epsilon_T + C_e \Delta R \quad (4-94)$$

前置量法中，函数 C_e 的选择应尽量使得弹道平直。若导弹高低角随时间的变化率 $\dot{\epsilon}_M$ 为零，则导弹的绝对弹道为直线弹道。要求全弹道上 $\dot{\epsilon}_M = 0$ 是不现实的，一般只能要求导弹在接近目标时 $\dot{\epsilon}_M$ 趋于零，这样就可以使弹道末段平直些。所以，这种导引方法又称为矫正法。

下面根据这一要求来确定 C_e 的表达式。式(4-94)对时间求一阶导数得

$$\dot{\epsilon}_M = \dot{\epsilon}_T + \dot{C}_e \Delta R + C_e \dot{\Delta R}$$

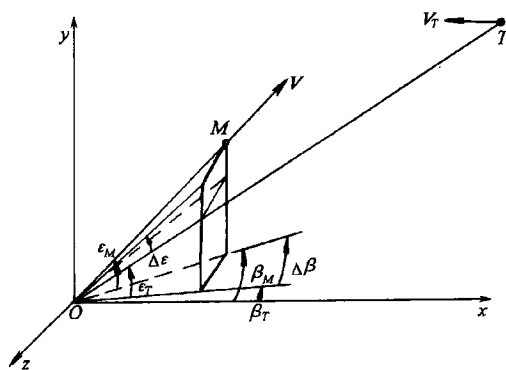


图 4-29 前置量法

式中 $\dot{C}_\epsilon = \frac{dC_\epsilon}{dt}$, $\Delta\dot{R} = \frac{d\Delta R}{dt}$

命中点处, $\Delta R = 0$, 并要求 $\dot{\epsilon}_M = 0$, 代入上式后得到

$$C_\epsilon = - \frac{\dot{\epsilon}_T}{\Delta\dot{R}}$$

因此, 前置量法的导引关系方程可表示为

$$\epsilon_M = \epsilon_T - \frac{\dot{\epsilon}_T}{\Delta\dot{R}} \Delta R \quad (4-95)$$

2. 相对运动方程组

设制导站静止, 攻击平面为通过制导站的铅垂平面, 在此平面内目标作机动飞行, 导弹作变速飞行。参考图 4-30, 前置量法导引的相对运动方程组为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dR_M}{dt} &= V \cos \eta \\ R_M \frac{d\epsilon_M}{dt} &= -V \sin \eta \\ \frac{dR_T}{dt} &= V_T \cos \eta_T \\ R_T \frac{d\epsilon_T}{dt} &= -V_T \sin \eta_T \\ \epsilon_M &= \theta + \eta \\ \epsilon_T &= \theta_T + \eta_T \\ \epsilon_M &= \epsilon_T - \frac{\dot{\epsilon}_T}{\Delta\dot{R}} \Delta R \\ \Delta R &= R_T - R_M \\ \Delta\dot{R} &= \dot{R}_T - \dot{R}_M \end{aligned} \right\} \quad (4-96)$$

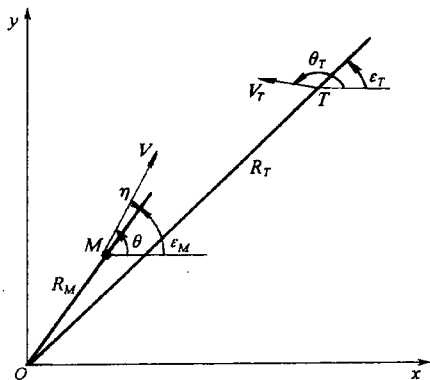


图 4-30 铅垂平面内的前置量法导引

当目标的运动规律 $V_T(t)$ 、 $\theta_T(t)$ 和导弹速度的变化规律 $V(t)$ 为已知时, 上述方程组包含 9 个未知参数: R_M 、 R_T 、 ϵ_M 、 ϵ_T 、 η 、 η_T 、 θ 、 ΔR 、 $\Delta\dot{R}$ 。方程组(4-96)有 9 个方程, 因此是封闭的。

3. 导弹的转弯速率

方程组(4-96)中第二式可改写为

$$R_M \frac{d\epsilon_M}{dt} = -V \sin \eta = V \sin(\theta - \epsilon_M)$$

对上式求一阶导数得

$$\dot{R}_M \dot{\epsilon}_M + R_M \ddot{\epsilon}_M = \dot{V} \sin(\theta - \epsilon_M) + V(\dot{\theta} - \dot{\epsilon}_M) \cos(\theta - \epsilon_M)$$

方程组(4-96)中第一、二式可改写为

$$\begin{aligned} \cos(\theta - \epsilon_M) &= \frac{\dot{R}_M}{V} \\ \sin(\theta - \epsilon_M) &= \frac{R_M \dot{\epsilon}_M}{V} \end{aligned}$$

代入上式整理后得

$$\dot{\theta} = \left[2 - \frac{\dot{V}R_M}{V\dot{R}_M} \right] \dot{\epsilon}_M + \frac{R_M}{\dot{R}_M} \ddot{\epsilon}_M \quad (4-97)$$

由式(4-97)可见, 转弯速率 $\dot{\theta}$ 不仅与 $\dot{\epsilon}_M$ 有关, 而且还与 $\ddot{\epsilon}_M$ 有关。命中点处, 由于 $\dot{\epsilon}_M = 0$, 由式(4-97)可得到

$$\dot{\theta}_k = \left[\frac{R_M}{\dot{R}_M} \ddot{\epsilon}_M \right]_{t=t_k} \quad (4-98)$$

上式表明: $\dot{\theta}_k$ 不为零, 即导弹在命中点附近的弹道并非直线。但是 $\dot{\theta}_k$ 值很小, 即命中点附近的弹道接近于直线弹道。所以“矫直”的意思并不就是直线弹道, 只是在接近命中点时, 弹道较为平直而已。

为了比较前置量法和三点法在命中点处的转弯速率 $\dot{\theta}_k$ (或需用法向过载), 将导引关系方程(4-95)求二阶导数, 并考虑到命中点的条件 $\Delta R = 0$, $\epsilon_M = \epsilon_T$, $\dot{\epsilon}_M = 0$, 得到

$$\ddot{\epsilon}_M = \left(-\ddot{\epsilon}_T + \frac{\dot{\epsilon}_T \Delta \ddot{R}}{\Delta \dot{R}} \right)_{t=t_k} \quad (4-99)$$

再对方程组(4-96)中第四式

$$R_T \frac{d\epsilon_T}{dt} = V_T \sin(\theta_T - \epsilon_T)$$

求一阶导数, 同时考虑命中点条件, 可得

$$\ddot{\epsilon}_{T_k} = \left[\frac{1}{R_T} \left(\frac{R_T \dot{V}_T \dot{\epsilon}_T}{V_T} + \dot{R}_T \dot{\theta}_T - 2\dot{R}_T \dot{\epsilon}_T \right) \right]_{t=t_k} \quad (4-100)$$

将式(4-100)代入式(4-99)中, 并将其结果再代入式(4-98)中, 则命中点处导弹的转弯速率为

$$\dot{\theta}_k = \left[\frac{\dot{\epsilon}_T}{\dot{R}_M} \left(2\dot{R}_T + \frac{\Delta \ddot{R} R_T}{\Delta \dot{R}} \right) - \frac{\dot{V}_T}{\dot{R}_M} \sin(\theta_T - \epsilon_T) - \frac{\dot{R}_T \dot{\theta}_T}{\dot{R}_M} \right]_{t=t_k} \quad (4-101)$$

由式(4-101)可见: 导弹在命中点处的转弯速率 $\dot{\theta}_k$ 仍受目标机动的影响, 这是不利的。因为目标机动, 使得 $\dot{V}_T$ 和 $\dot{\theta}_T$ 的值都不易测量, 难以形成补偿信号来修正弹道, 势必引起动态误差。特别是 $\dot{\theta}_T$ 的影响更大, 通常, 目标机动飞行的 $\dot{\theta}_T$ 可达 $0.03 \sim 0.1$ (rad/s), 这样的数值是比较大的。

将式(4-101)和三点法导引时命中点处的转弯速率的表达式(4-89)进行比较, 可以看出: 同样的目标机动动作, 即同样的 $\dot{V}_T$ 、 $\dot{\theta}_T$ 值, 在三点法导引中对导弹命中点处转弯速率的影响与前置量法导引中所造成的影响正好相反, 即若在三点法导引中为正, 则在前置量法导引中为负。因此, 就可能存在介于三点法导引和前置量法导引之间的某种导引规律, 按这种导引规律, 目标机动对命中点处转弯速率的影响为零, 这种导引规律就是半前置量法。

二、半前置量法(半矫直法)

假设制导站静止, 攻击平面为通过制导站的铅垂平面。三点法和前置量法的导引关系方

程可以写成通式

$$\epsilon_M = \epsilon_T + \Delta\epsilon = \epsilon_T - A_\epsilon \frac{\dot{\epsilon}_T}{\Delta\dot{R}} \Delta R \quad (4-102)$$

显然, 上式中: $A_\epsilon=0$ 时, 是三点法; $A_\epsilon=1$ 时, 就是前置量法。半前置量法是介于三点法与前置量法之间的导引方法, 其系数 A_ϵ 也应介于 0 和 1 之间。那么, A_ϵ 为何值才能使命中点处导弹的转弯速率与目标的机动无关呢?

式(4-102)对时间求一阶和二阶导数, 并代入命中点的条件, 即 $\Delta R=0$ 和 $\epsilon_M=\epsilon_T$, 则可得

$$\dot{\epsilon}_{Mk} = \dot{\epsilon}_{Tk} (1 - A_\epsilon) \quad (4-103)$$

$$\ddot{\epsilon}_{Mk} = \left[\ddot{\epsilon}_T (1 - 2A_\epsilon) + A_\epsilon \frac{\dot{\epsilon}_T \Delta \ddot{R}}{\Delta \dot{R}} \right]_{t=t_k} \quad (4-104)$$

将式(4-100)代入式(4-104)中, 并将其结果同式(4-103)一起代入式(4-97)(在命中点处取值)中, 则得到

$$\dot{\theta}_k = \left\{ \left[2 - \frac{\dot{V} R_M}{V \dot{R}_M} \right] \dot{\epsilon}_T (1 - A_\epsilon) + \frac{R_M}{\dot{R}_M} \left[\frac{1}{R_T} (-2 \dot{R}_T \dot{\epsilon}_T + \frac{\dot{V}_T R_T \dot{\epsilon}_T}{V_T} + \dot{\theta}_T \dot{R}_T) (1 - 2A_\epsilon) + A_\epsilon \frac{\dot{\epsilon}_T \Delta \ddot{R}}{\Delta \dot{R}} \right] \right\}_{t=t_k}$$

由上式可以看出: 若选取 $A_\epsilon=1/2$, 则可消除由目标机动对 $\dot{\theta}_k$ 的影响。这时

$$\dot{\theta}_k = \left\{ \frac{\dot{\epsilon}_T}{2} \left[\left[2 - \frac{\dot{V} R_M}{V \dot{R}_M} \right] + \frac{R_M \Delta \ddot{R}}{\dot{R}_M \Delta \dot{R}} \right] \right\}_{t=t_k} \quad (4-105)$$

将 $A_\epsilon=\frac{1}{2}$ 代入式(4-102)中, 则得到半前置量法导引关系方程

$$\epsilon_M = \epsilon_T - \frac{1}{2} \frac{\dot{\epsilon}_T}{\Delta \dot{R}} \Delta R \quad (4-106)$$

在半前置量法导引中, 由于目标机动($\dot{V}_T, \dot{\theta}_T$)对命中点处导弹的转弯速率(或需用法向过载)没有影响, 从而减小了动态误差, 提高了导引准确度。所以, 从理论上说, 半前置量法导引是遥控制导中比较好的一种导引方法。

综上所述, 命中点处过载不受目标机动的影 响, 这是半前置量法导引最显著的优点。但是, 要实现半前置量法导引, 就需要不断地测量导弹和目标的矢径 R_M 、 R_T , 高低角 ϵ_M 、 ϵ_T 及其导数 $\dot{R}_M$ 、 $\dot{R}_T$ 、 $\dot{\epsilon}_T$ 等参数, 以便不断形成指令信号。这样, 就使得制导系统的结构比较复杂, 技术实施也比较困难。在目标施放积极干扰, 造成假像的情况下, 导弹的抗干扰性能较差, 甚至可能造成很大的起伏误差。

三、一种实现半前置量导引的方法

采用无线电波束制导, 实现前置量法或半前置量法导引, 若用两部雷达, 分别跟踪目标和制导导弹, 则制导站设备庞大, 不利于提高武器系统的机动性。因此, 一般只用一部雷达, 既跟踪目标, 又制导导弹。由于雷达波束的扫描角有一定范围, 导弹必须处在扫描角范围内才能受控。要实现此种方案, 前置量 $\Delta\epsilon(\Delta\beta)$ 就要受波束扫描角的限制。若雷达波束中心线(即等强度线)正好对准目标, 则 $\Delta\epsilon(\Delta\beta)$ 不能大于扫描角的一半(见图 4-31); 否则, 导弹就

要失控。

此外,限制前置量 $\Delta\epsilon(\Delta\beta)$ 的初始值对减小初始段导引偏差也是有利的。如果初始段前置量大,势必引起需用法向加速度的变化率较大,动态误差也较大。

在敌机施放干扰时,半前置量法导引无法实现时,要转换采用三点法导引。为了实现转换,希望半前置量法导引采用的发射规律尽可能与三点法导引的发射规律相近,由此对前置量加以限制也是必要的。

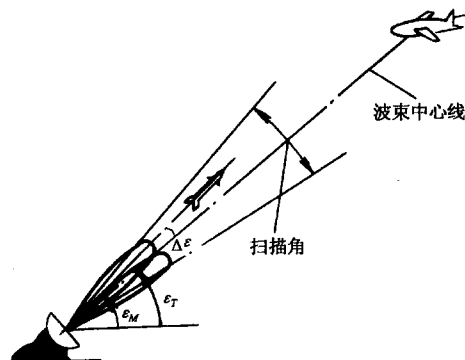


图 4-31 $\Delta\epsilon$ 受波束扫描角限制的示意图

前置量 $\Delta\epsilon = -(1/2)(\dot{\epsilon}_T/\dot{\Delta R})\Delta R$ 中,比值 $\dot{\epsilon}_T/\dot{\Delta R}$ 在导引过程中变化较小,因此, $\Delta\epsilon$ 主要是按 ΔR 的变化规律变化的。而 ΔR 值是先大后小,即弹道末段的 ΔR 较小,这时 $\Delta\epsilon$ 小于扫描角的一半容易得到满足;但在导弹开始受控时, ΔR 值很大,因而有可能使 $\Delta\epsilon$ 超出波束扫描角一半的限制范围。所以,在导引关系方程(4-106)中,需对 ΔR 的上限值加以限制;但是, $|\dot{\Delta R}|$ 值也不能太小,否则, $\Delta\epsilon(\Delta\beta)$ 仍可能超过扫描角一半的限制范围。因此,又要对 $|\dot{\Delta R}|$ 的下限值加以限制(即对 $\dot{\Delta R}$ 限定上限值)。限制以后的半前置量法导引的关系方程可改写为

$$\epsilon_M = \epsilon_T - \frac{1}{2} \frac{\dot{\epsilon}_T}{\overline{\dot{\Delta R}}} \overline{\Delta R} \quad (4-107)$$

式中 $\overline{\Delta R}$ 表示对 ΔR 的上限值加以限制后的量; $\overline{\dot{\Delta R}}$ 表示对 $\dot{\Delta R}$ 的上限值(即 $|\dot{\Delta R}|$ 的下限值)加以限制后的量。

1. 对 ΔR 值的限制

ΔR 值的上限限制可以用下式表示

$$\overline{\Delta R} = S \cdot \Delta R$$

式中 S 为限制函数。

限制函数 S 应满足下列要求;

(1) 对弹道初始段 $\Delta\epsilon$ 起限制作用,而对后段 $\Delta\epsilon$ 的限制作用应愈来愈小,才能保证导弹接近目标时体现出半前置量法导引的特点。因此,接近目标时,取 $S \rightarrow 1$ 。同时,为避免 $\Delta\epsilon$ 为负值而出现“后置”(“后置”会使弹道性能变坏),又要求 $S \geq 0$ 。因而, S 的取值范围为

$$0 \leq S \leq 1$$

(2) 限制函数 S 的形式应尽可能简单。不要因限制函数的引入而使制导站的解算装置需作复杂的运算,以精简设备,减小误差。

(3) 引进限制函数后,对整个弹道上需用法向加速度的影响应尽量使之合理,即在弹道上需用法向加速度变化应比较均匀。

从上述要求出发,选择限制函数 S 为

$$S = 1 - \frac{\Delta R}{R_q}$$

式中 R_q 为常数。 R_q 值选取的大小直接关系到前置量 $\Delta\epsilon$ 的大小,首先,要求 $R_q \geq (\Delta R)_{\max}$,否则, $S < 0$ 时,将出现“后置”。但 R_q 值也不能选取过大,否则, S 接近于 1 时,对 $\Delta\epsilon$ 的限制

作用就不明显,甚至可能出现 $\Delta\epsilon$ 超过扫描角一半的危险。所以,在确定 R_q 时,首先应根据对前置量 $\Delta\epsilon$ 限制的要求和法向加速度较均匀变化的条件,找出 R_q 的某一范围,然后考虑解算装置中实现的难易程度等因素,从中确定某一值。于是

$$\overline{\Delta R} = \Delta R \left(1 - \frac{\Delta R}{R_q} \right) \quad (4-108)$$

此式是抛物线方程。 $\overline{\Delta R}=f(\Delta R)$ 的关系如图4-32所示。

由式(4-108)可见: $\Delta R=R_q/2$ 时, $\overline{\Delta R}=R_q/4$ 为最大值。显然,导弹受控时,目标和导弹分别与制导站距离之差(ΔR)。为 ΔR 最大值。若选取 $R_q=(\Delta R)_0$,则

$$(\overline{\Delta R})_{\max} = \frac{(\Delta R)_0}{4}$$

2. 对 $\Delta\dot{R}$ 的限制

对 $\Delta\dot{R}$ 上限值的限制可以用下式表示

$$\overline{\Delta\dot{R}} = \begin{cases} (\Delta\dot{R})_{\max} & \Delta\dot{R} \geq (\Delta\dot{R})_{\max} \\ \Delta\dot{R} & \Delta\dot{R} < (\Delta\dot{R})_{\max} \end{cases}$$

式中 $(\Delta\dot{R})_{\max}$ 是根据设计要求选择的某一数值。上述限制关系 $\overline{\Delta\dot{R}}=f(\Delta\dot{R})$ 表示在图4-33中。

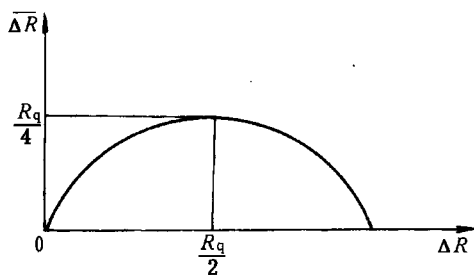


图4-32 对 ΔR 的限制

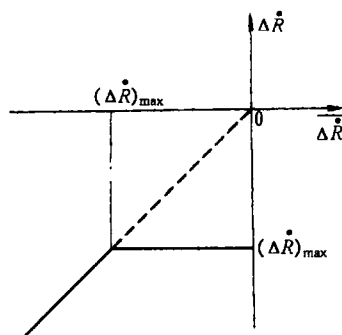


图4-33 对 $\Delta\dot{R}$ 的限制

经过限制之后,半前置量法的导引关系方程可改写为

$$\epsilon_M = \epsilon_T - \frac{1}{2} \frac{\dot{\epsilon}_T}{\Delta\dot{R}} \Delta R \left(1 - \frac{\Delta R}{R_q} \right)$$

假设发射瞬时导弹就开始受控,则 $\Delta R=(\Delta R)_0$,并取 $R_q=(\Delta R)_0$ 。由上式可得 $\epsilon_M=\epsilon_T$,此即弹道前段为三点法导引,弹道弯曲些。但在接近目标时,即 $(1-\Delta R/R_q) \rightarrow 1$,则又实现了半前置量法导引,此时目标机动对弹道末段的需用法向过载的影响已逐渐减小,命中点处已无直接影响。

§ 4-8 最优制导规律

前面讨论的各种导引方法都是经典的制导规律。一般来说,经典的制导规律需要的信息

量少,结构简单,易于实现,因此,现役的战术导弹大多数使用经典的制导规律或其改进形式。但是对于高性能的大机动目标,尤其在目标采用各种干扰措施的情况下,经典的制导规律就很不适用了。随着计算机技术的迅速发展,基于现代控制理论的最优制导规律、自适应制导规律及微分对策制导规律(统称为现代制导规律)得到迅速发展。与经典制导规律相比,现代制导规律有许多优点,如脱靶量小,导弹命中目标时姿态角满足需要,抗目标机动或其他随机干扰能力强,弹道平直,弹道需用法向过载分布合理,可扩大作战空域等等。因此,用现代制导规律制导导弹截击未来战场上出现的高速度、大机动、带有施放干扰能力的目标是有效的。但是,现代制导规律结构复杂,需要测量的参数较多,致使制导规律的实现带来了困难,随着微型计算机的出现和发展,现代制导规律的应用是可以实现的。

最优制导规律的优点是它可以考虑导弹-目标的动力学问题,并可考虑起点或终点的约束条件或其他约束条件,根据给出的性能指标(泛函)寻求最优制导规律。根据具体要求性能指标可以有不同的形式,战术导弹考虑的性能指标主要是导弹在飞行中付出的总的法向过载最小、终端脱靶量最小、最小控制能量、最短时间、导弹和目标的交会角具有特定的要求等。但是因为导弹的制导规律是一个变参数并受到随机干扰的非线性问题,其求解非常困难。所以,通常只好把导弹拦截目标的过程作线性化处理,这样可以获得系统的近似最优解,在工程上也易于实现,并且在性能上接近于最优制导规律。下面介绍二次型线性最优制导问题。

一、导弹运动状态方程

如图 4-34 所示。设把导弹、目标看成质点,它们在同一固定平面内运动。在此平面内任选固定坐标系 Oxy , 导弹速度矢量 V 与 Oy 轴的夹角为 σ , 目标速度矢量 V_T 与 Oy 轴的夹角为 σ_T , 导弹与目标的连线 $\overline{MT}$ 与 Oy 轴的夹角为 q 。设 σ 、 σ_T 和 q 都比较小, 并且假定导弹和目标都作等速飞行, 即 V 、 V_T 都是常值。

设导弹与目标分别在 Ox 轴方向和 Oy 轴方向上的距离偏差为

$$\left. \begin{aligned} x &= x_T - x_M \\ y &= y_T - y_M \end{aligned} \right\} \quad (4-109)$$

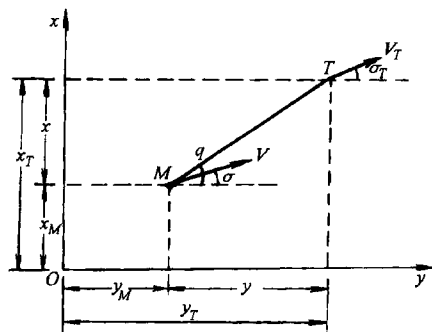


图 4-34 导弹与目标运动关系图

式(4-109)对时间 t 求导, 并根据导弹相对目标运动关系得

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}_T - \dot{x}_M = V_T \sin \sigma_T - V \sin \sigma \\ \dot{y} &= \dot{y}_T - \dot{y}_M = V_T \cos \sigma_T - V \cos \sigma \end{aligned} \right\} \quad (4-110)$$

由于 σ 、 σ_T 很小, 因此 $\sin \sigma \approx \sigma$, $\sin \sigma_T \approx \sigma_T$, $\cos \sigma \approx 1$, $\cos \sigma_T \approx 1$, 于是

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= V_T \sigma_T - V \sigma \\ \dot{y} &= V_T - V \end{aligned} \right\} \quad (4-111)$$

以 x_1 表示 x , x_2 表示 $\dot{x}$ (即 $\dot{x}_1$), 则

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{x} = V_T \dot{\sigma}_T - V \dot{\sigma} \end{aligned} \right\} \quad (4-112)$$

式中 $V_T \dot{\sigma}_T$ 、 $V \dot{\sigma}$ 分别为目标、导弹的法向加速度，以 a_T 、 a 表示，则

$$\dot{x}_2 = a_T - a \quad (4-113)$$

导弹的法向加速度 a 为一控制量，一般作为控制信号加给舵机，舵面偏转后弹体产生攻角 α ，而后产生法向过载。如果忽略舵机的惯性及弹体的惯性，设控制量的量纲与加速度的量纲相同，则可用控制量 u 来表示 $-a$ ，即令

$$u = -a$$

于是式(4-113)变成

$$\dot{x}_2 = a_T + u \quad (4-114)$$

这样可得导弹运动的状态方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u + a_T \end{aligned} \right\} \quad (4-115)$$

设目标不机动，则 $a_T=0$ ，导弹运动状态方程可简化为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned} \right\} \quad (4-116)$$

用矩阵简明地表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (4-117)$$

令

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = (0, 1)^T$$

则以 x_1 、 x_2 为状态变量， u 为控制变量的导弹运动状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (4-118)$$

二、基于二次型的最优制导规律

对于自导引系统(自动瞄准制导系统)通常选用二次型性能指标，所以，最优自导引系统通常是基于二次型性能指标的最优控制系统。

导弹的纵向运动由式(4-110)的第二式可表示为

$$\dot{y} = -(V - V_T) = -V_C$$

式中 V_C 为导弹对目标的接近速度， $V_C = V - V_T$ 。

设 t_k 为导弹与目标的遭遇时刻(在此时刻导弹与目标相碰撞或两者间距离为最小)，则在某一瞬时 t ，导弹与目标在 Oy 轴方向上的距离偏差为

$$y = V_C(t_k - t) = (V - V_T)(t_k - t)$$

二次型性能指标的一般形式写成

$$J = \int_0^T G(\mathbf{c}, \mathbf{u}, \mathbf{r}, t) dt$$

其中， $\mathbf{c}$ 为系统的输出， $\mathbf{u}$ 为控制量， $\mathbf{r}$ 为系统的输入。被积函数 $G(\mathbf{c}, \mathbf{u}, \mathbf{r}, t)$ 称为损失函数，它表示了系统实际性能对理想性能随时间变化的变量。最优控制问题，就是确定控制输入 $\mathbf{u}$ ，使在 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{x}$ 受约束时，性能指标 J 最小。

如果损失函数为二次型，它应首先含有制导误差的平方项，还要含有控制所需的能量项。

对任何制导系统,最重要的是希望导弹与目标遭遇时刻 t_k 的脱靶量(即制导误差的终值)极小。由于选择指标为二次型,故应以脱靶量的平方表示,即

$$[x_T(t_k) - x_M(t_k)]^2 + [y_T(t_k) - y_M(t_k)]^2$$

为简化分析,通常选用 $y=0$ 时的 x 值作为脱靶量。于是,要求 t_k 时 x 值越小越好。由于舵偏角受限制,导弹的可用过载有限,导弹结构能承受的最大载荷也受到限制,所以控制量 u 也应受约束。因此,选择下列形式的二次型性能指标函数

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_k) \mathbf{c} \mathbf{x}(t_k) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} (\mathbf{x}^T \boldsymbol{\varphi} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (4-119)$$

式中, $\mathbf{c}$, $\boldsymbol{\varphi}$, $\mathbf{R}$ 为正数对角线矩阵,它保证了指标为正数,在多维情况还保证了性能指标为二次型。比如,对讨论的二维情况,则

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

这样,对于二维情况,由式(4-116)可得,性能指标函数中首先含有 $c_1 x_1^2(t_k)$ 和 $c_2 x_2^2(t_k)$ 。如果不考虑导弹相对运动速度项 $x_2(t_k)$,则令 $c_2=0$, $c_1 x_1^2(t_k)$ 便表示了脱靶量。积分项中 $\mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}$ 为控制能量项,对控制矢量为二维的情况,则可表示为 $R u^2$ 。 $\mathbf{R}$ 由对过载限制的大小来选择, $\mathbf{R}$ 小时,对导弹过载的限制小,过载就可能较大,但计算出来的最大过载不能超过导弹的可用过载; $\mathbf{R}$ 大时,对导弹过载的限制大,过载就可能较小,为充分发挥导弹的机动性能,过载也不能太小。因此,应按导弹的最大过载恰好与可用过载相等这个条件来选择 $\mathbf{R}$ 。积分项中的 $\mathbf{x}^T \boldsymbol{\varphi} \mathbf{x}$ 为误差项。由于主要是考虑脱靶量 $x(t_k)$ 和控制量 u 。因此,该误差项不予考虑。这样,用于自导引系统的二次型性能指标函数可简化为

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_k) \mathbf{c} \mathbf{x}(t_k) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} R u^2 dt \quad (4-120)$$

当给定导弹运动的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u$$

时,应用最优控制理论,可得最优制导规律为

$$u = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (4-121)$$

其中, $\mathbf{P}$ 由卡提(Riccati)微分方程

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{P}$$

解得(这里, $\boldsymbol{\varphi}=0$)。 $\mathbf{P}$ 的终端条件

$$\mathbf{P}(t_k) = \mathbf{c}$$

当求得 $\mathbf{P}$ 后,仍不考虑速度项 x_2 ,即 $c_2=0$,则可得最优制导规律为

$$u = - \frac{(t_k - t)x_1 + (t_k - t)^2 x_2}{\frac{R}{c_1} + \frac{(t_k - t)^3}{3}} \quad (4-122)$$

为了使脱靶量最小,应选取 $c_1 \rightarrow \infty$,则

$$u = -3 \left[\frac{x_1}{(t_k - t)^2} + \frac{x_2}{t_k - t} \right] \quad (4-123)$$

根据图 4-34 可得

$$\tan \varphi = \frac{x}{y} = \frac{x_1}{V_c(t_k - t)}$$

当 q 比较小时, $\tan q \approx q$, 则

$$q = \frac{x_1}{V_c(t_k - t)} \quad (4-124)$$

$$\dot{q} = \frac{x_1 + (t_k - t)\dot{x}_1}{V_c(t_k - t)^2} = \frac{1}{V_c} \left[\frac{x_1}{(t_k - t)^2} + \frac{x_2}{t_k - t} \right] \quad (4-125)$$

将式(4-125)代入式(4-123)中, 可得

$$u = -3V_c \dot{q} \quad (4-126)$$

在上式中, u 的量纲是加速度的量纲(m/s^2), 把 u 与导弹速度矢量 V 的旋转角速度 $\dot{\sigma}$ 联系起来, 则

$$\begin{aligned} u &= -a = -V\dot{\sigma} \\ \dot{\sigma} &= -\frac{u}{V} \\ \dot{\sigma} &= \frac{3V_c}{V}\dot{q} \end{aligned} \quad (4-127)$$

从式(4-126)和(4-127)可看出, 不考虑弹体惯性时, 自动瞄准制导的最优导引规律是比例导引, 其比例系数为 $3V_c/V$, 这也证明比例导引是一种很好的导引方法。

§ 4-9 选择导引方法的基本要求

本章介绍了包括自动瞄准制导、遥控制导在内的几种常见的导引方法及其弹道特性。显然, 导弹的弹道特性与所采用的导引方法有很大关系。如果导引方法选择得合适, 就能改善导弹的飞行特性, 充分发挥导弹武器系统的作战性能。因此, 选择合适的导引方法或改善现有导引方法存在的某些弊端并寻找新的导引方法是导弹设计的重要课题之一。在选择导引方法时, 需要从导弹的飞行性能、作战空域、技术实施、制导精度、制导设备、战术使用等方面的要求进行综合考虑。

(1) 弹道需用法向过载要小, 变化应均匀, 特别是在与目标相遇区, 需用法向过载应趋于零。需用法向过载小, 一方面可以提高制导精度、缩短导弹命中目标所需的航程和时间, 进而扩大导弹作战空域; 另一方面, 可用法向过载可以相应减小, 这对于用空气动力进行操纵的导弹来说, 升力面面积可以缩小, 相应地导弹的结构重量也可以减轻。所选择的导引方法至少应该考虑需用法向过载要小于可用法向过载, 可用法向过载与需用法向过载之差应具有足够的富余量, 且应满足以下条件

$$n_p \geq n_R + \Delta n_1 + \Delta n_2 + \Delta n_3$$

式中, n_p 为导弹的可用法向过载; n_R 为导弹的弹道需用法向过载; Δn_1 是导弹为消除随机干扰所需的过载; Δn_2 为消除系统误差所需的过载; Δn_3 为补偿导弹纵向加速度所需的过载(对自动瞄准制导而言)。

(2) 适合于尽可能大的作战空域杀伤目标的要求。空中活动目标的高度和速度可在相当大的范围内变化。在选择导引方法时, 应考虑目标运动参数的可能变化范围, 尽量使导弹能在较大的作战空域内攻击目标。对于空-空导弹来说, 所选择的导引方法应使导弹具有全向攻击的能力。对于地-空导弹来说, 不仅能迎击, 而且还能尾追或侧击目标。

(3) 当目标机动时, 对导弹弹道, 特别是弹道末段的影响为最小, 即导弹需要付出相应

的机动过载要少。这将有利于提高导弹导向目标的精度。

(4) 抗干扰能力强。空中目标为逃避导弹的攻击，常施放干扰来破坏导弹对目标的跟踪。因此，所选择的导引方法应在目标施放干扰的情况下具有对目标进行顺利攻击的可能性。

(5) 在技术实施上应简易可行。导引方法所需要的参数能够用测量方法得到，需要测量的参数数目应尽量少，并且测量起来简单、可靠，以便保证技术上容易实现，系统结构简单、可靠。

本章介绍遥控制导、自动瞄准制导的各种导引方法都存在着自己的缺点。为了弥补单一导引方法的不足，提高导弹的命中精度，在攻击较远距离的活动目标时，常常把几种导引规律组合起来使用，这就是复合制导。复合制导分为串联复合制导和并联复合制导。

串联复合制导是指在一段弹道上采用一种导引方法，而在另一段弹道上采用另一种导引方法。一般来说，可将制导过程分为四段：发射起飞段、巡航段(中制导段)、交接段和攻击段(末制导段)。例如，串联复合制导可以是中制导段采用遥控实现三点法导引，末制导段采用自动瞄准实现比例导引法。

并联复合制导是在同一段弹道上同时采用不同的两种导引方法。可能有：纵平面采用自主控制，侧平面采用遥控制导；或者纵平面为遥控制导，侧平面为自动瞄准制导等等。

当前应用最多的是串联复合制导。例如，前苏联的“萨姆-4”导弹用无线电指令+雷达半主动自动瞄准；法国的“飞鱼”导弹采用惯性导航+雷达主动式自动瞄准；美国的“潘兴Ⅱ”采用惯性导航+末制导图像匹配等等。由于复合制导是由单一制导叠加而成的，当利用某一种导引方法进行制导时，其弹道特性与单一导引方法制导时完全相同。所以，对于复合制导导弹运动特性的研究，主要是研究过渡段，即研究由一种导引方法所确定的弹道向另一种导引方法所确定的弹道过渡时的过渡特性，即交接点的弹道平滑问题、交接段的控制误差与补偿等等。

第五章 初始段弹道

本章所讨论的初始段弹道是指导弹从脱离发射装置开始直至接受控制指令进行导引飞行之前的一段无控弹道。在多数情况下,战术导弹并不是发射后立即就能进行导引飞行的。因为主要依靠空气动力作机动飞行的战术导弹,需要一定时间来获得机动飞行所需的速度。即使有些导弹由于采用管式发射或装有起飞助推器,一旦脱离发射装置,就已具有相当大的飞行速度。但是,由于受导引系统的某些限制,如受雷达波束或红外测角仪视场角的限制等。导弹只能在飞离发射点一定远的距离上才能进入雷达波束或测角仪视场角范围之内,接受控制信号,开始导引飞行。也就是说,导弹从发射到开始导引飞行这段时间之内,是处于无控飞行状态。通常,把制导系统开始对导弹施加控制作用的弹道点称之为“启控点”。

有的导弹为了减少初始段偏差,在这段时间内进行姿态控制;还有的导弹在离轨后就进行制导飞行。它们就没有本章所指的初始段弹道。

在理论上,对于给定的初始条件,其初始段弹道是被惟一确定的,相应的启控点被称为“理论启控点”。然而,实际上由于存在着各种随机干扰作用,导弹实际启控点的位置和速度方向都是随机分布的,从而形成了相对于理论启控点的散布,一般称之为“启控点散布”。对于任何一种导弹,进行多发实弹射击,在启控点处的散布应该是各弹道偏差状态的集合。为了便于研究,假设在理论启控点的位置上设立一个平面靶,这时射程 X 一定,弹道偏差在该靶平面上为一个点集,该点集就是多发导弹在启控点处 Δy 、 Δz 方向上的散布。分析启控点处散布的统计特性,对于制导系统设计、启控点选择以及导弹的战术运用等都有着重要意义。

研究导弹在启控点处统计特性的最直接的方法,就是进行多发实弹打靶,以获得多种随机扰动作用下的弹道参数偏差的数据,从而求出导弹弹道参数偏差的标准差等的统计参数。但是,这种方法需要投入大量的人力、物力和财力,对于造价昂贵的导弹来说,不可能像常规武器那样,进行大量的飞行试验。

随着计算机的广泛应用,人们开始采用另一种方法,即计算机模拟打靶。它的直观意义就是利用数学仿真试验与计算技术来代替实弹打靶。这种方法节省资金、省时、方便,目前利用计算机对武器系统进行仿真试验已得到广泛的应用。普遍采用的方法是统计试验法或称蒙特卡洛法。

蒙特卡洛法以直接模拟为基础,根据系统对有限个随机输入和随机初始条件的响应来确定统计特性。其初始条件和输入的随机量是根据它们特定的统计值产生的,所以利用蒙特卡洛法进行统计分析所需要的信息只包括系统模型、初始扰动的统计值和随机输入的统计值。

§ 5-1 几种主要扰动因素的分析

导弹在初始段飞行过程中,不可避免地会受到各种因素的干扰,使导弹的弹道参数偏离预定的弹道而产生误差。这些干扰一般都是随机的,主要有导弹离开发射装置瞬时的初始扰动、发动机推力偏心、风、导弹质量分布的不对称性和弹体气动外形的不对称性等。

一、初始扰动

1. 初始扰动的形成

导弹在发射装置上，通常是依靠前后两个定向滑块来支持并提供准确的定位。然而，定向滑块及定向器滑道之间总是要有配合间隙，因此，导弹在沿定向器运动过程中会发生晃动。在前定向滑块已离开定向器，而后一个定向滑块尚未离开的时候，导弹是处于一种“半约束”的运动状态之中，在各种扰动因素作用下，导弹将围绕其后定向滑块支点作空间的摆动运动。在这些扰动因素中，有发射定向器的振动、发动机推力偏心、火箭喷气从障碍物反射又作用在弹体上的扰动、弹体质量分布不对称的作用以及横风的扰动作用等。

这样，在导弹完全离开定向器并且开始在空中飞行时，它的运动初始条件将具有随机分布的特性。这些随机的运动初始条件包括弹道倾角 θ_0 和弹道偏角 ψ_{V0} ，导弹绕弹体坐标系 Oy_1 轴及 Oz_1 轴的旋转角速度 ω_{y0} 和 ω_{z0} 等。这些随机的初始条件总称为初始扰动。

2. 初始扰动对启控点的影响

初始扰动的存在，使实际的初始条件偏离其规定值。一般实际的初始条件可写成

$$\begin{aligned}\theta_0 &= \theta'_0 + \Delta\theta_0, & \psi_{V0} &= \psi'_{V0} + \Delta\psi_{V0} \\ &\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots \\ \omega_{y0} &= \omega'_{y0} + \Delta\omega_{y0}, & \omega_{z0} &= \omega'_{z0} + \Delta\omega_{z0} \\ &\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\end{aligned}$$

式中 $\theta'_0, \psi'_{V0}, \omega'_{y0}, \omega'_{z0}$ ：——理论初始参数；

$\Delta\theta_0, \Delta\psi_{V0}, \Delta\omega_{y0}, \Delta\omega_{z0}$ ——初始扰动引起的具有随机分布特性的初始参数偏差；

$\theta_0, \psi_{V0}, \omega_{y0}, \omega_{z0}$ ——实际初始参数。

现以某滚转反坦克导弹为例，计算其俯仰、偏航初始扰动角速度 $\Delta\omega_{y_0}$ 和 $\Delta\omega_{z_0}$ 对启控点散布的影响，其结果见图 5-1。由图中可见，扰动角速度 $\Delta\omega_{y_0}$ 和 $\Delta\omega_{z_0}$ 与相应启控点处的弹道参数偏差值是线性关系。当 $\Delta\omega_{y_0} > 0$ 时，导弹相对于理论弹道左偏，即图 5-1(a) 中 $\Delta z_k < 0$ 、

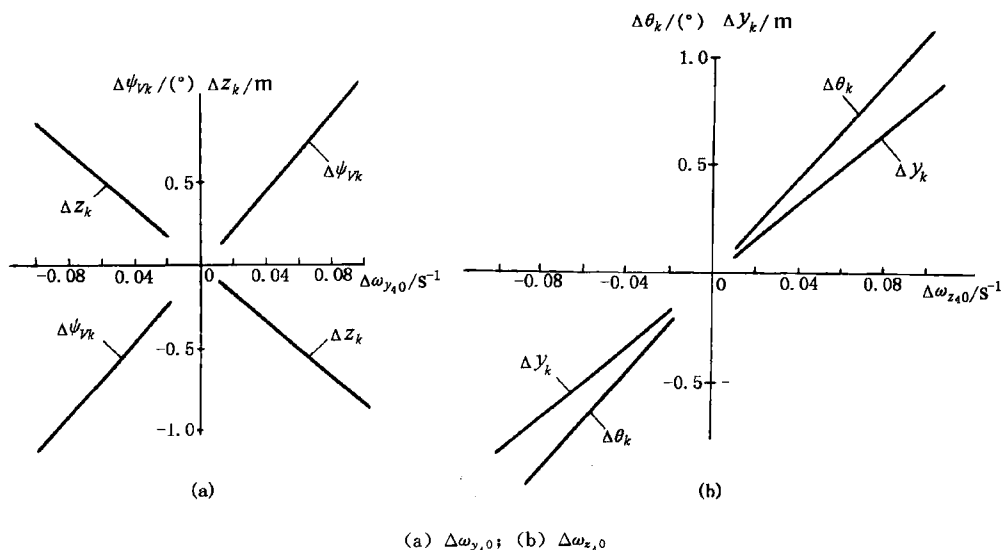


图 5-1 初始扰动角速度 $\Delta\omega_{y_0}$ 、 $\Delta\omega_{z_0}$ 对启控点的影响

$\Delta\psi_k > 0$, 角标 k 表示是启控点参数。由于滚转弹存在陀螺效应与马格努斯效应, 其理论弹道, 在启控前俯仰方向的陀螺力矩和马格努斯力矩的作用方向相反, 前者是抬头力矩, 后者是低头力矩, 而总的来说, 前者大于后者。当出现初始扰动 $\Delta\omega_{y_0}$ 时, 由 $\Delta\omega_{y_0}$ 引起的前者增量的绝对值仍然大于后者增量的绝对值, 所以, $\Delta\omega_{y_0} > 0$ 时, 相对于理论弹道来说, 导弹的运动不仅左偏, 而且略有爬高; 反之, $\Delta\omega_{y_0} < 0$ 时, 弹道右偏, 同时略有下降。当 $\Delta\omega_{z_0} > 0$ 时, 实际弹道相对于理论弹道有爬高的趋势, 即图 5-1(b) 中的 $\Delta y_k > 0, \Delta\theta_k > 0$ 。与前述相反, 在启控前, 偏航方向的陀螺力矩和马格努斯力矩的作用方向是相同的 (都是正向偏航力矩), 当存在 $\Delta\omega_{z_0} > 0$ 时, 与理论情况相比, 前一力矩略有减小, 后者略有增加, 由于减小量大于增加量, 所以, 弹道不仅上升, 而且略有右偏; 反之, $\Delta\omega_{z_0} < 0$ 时, 弹道下降, 同时略有左偏。

二、发动机推力偏心

1. 发动机推力偏心的形成

推力偏心是造成初始段散布重要原因之一。确切地说, 导弹的推力偏心是指全弹的质心到发动机推力矢量之间的距离, 此距离是一个空间矢量, 其大小和方向随时间随机变化。凡是影响推力矢量和质心位置的任何因素, 都将引起推力偏心的变化。

发动机的推力偏心是由于从喷管排出的燃气流产生的推力矢量与发动机的理论轴线不重合造成的。推力偏心一般由几何推力偏心和燃气流推力偏心两部分组成, 前者是由于发动机壳体、喷管等部件的几何尺寸偏差诸因素引起的, 后者主要是由于发动机装药燃烧异常导致排出的燃气流不均匀造成的。

由于制造和装配工艺等原因, 推力作用线同弹体的几何轴线可能不同轴, 这样就造成线偏差 d_g , 称为推力的几何偏心, 见图 5-2。

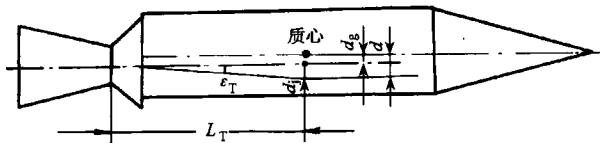


图 5-2 发动机的推力偏心

另外, 由于发动机喷气流的不对称性, 形成喷气流总的动量矢量同弹体的几何轴线之间有夹角 ϵ_T 。这样, 推力矢量同质心之间就又产生线偏差 d_j , 称为燃气流的动态偏心或气动偏心。见图 5-2。

$$d_j = L_T \epsilon_T$$

式中 L_T 为质心到喷喉断面的距离。

d_j 量的大小和方向在发动机整个工作过程中是随时间变化的, 很难通过工艺措施进行消除。

几何偏心 d_g 和气动偏心 d_j 的矢量和就是推力偏心 d

$$d = d_g + d_j \quad (5-1)$$

2. 推力偏心对启控点散布的影响

一般情况下, 推力偏心 d 引起的扰动力要比它对导弹质心形成的力矩对飞行弹道影响小得多, 通常不予考虑。由图 5-3 可见, 推力偏心矩可写成

$$\Delta M_P = d \times P \quad (5-2)$$

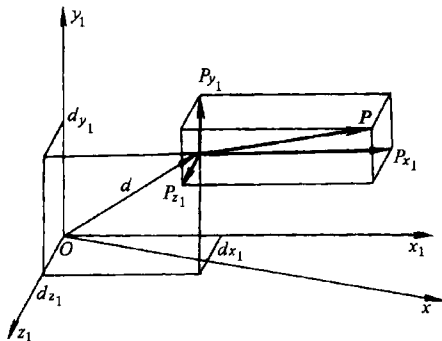


图 5-3 推力偏心产生的力矩

(5-2)式的标量形式为

$$\begin{bmatrix} \Delta M_{Px_1} \\ \Delta M_{Py_1} \\ \Delta M_{Pz_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -d_{z_1} & d_{y_1} \\ d_{z_1} & 0 & -d_{x_1} \\ -d_{y_1} & d_{x_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{x_1} \\ P_{y_1} \\ P_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_{y_1}d_{z_1} + P_{z_1}d_{y_1} \\ P_{x_1}d_{z_1} - P_{z_1}d_{x_1} \\ -P_{x_1}d_{y_1} + P_{y_1}d_{x_1} \end{bmatrix} \quad (5-3)$$

式中 ΔM_{Px_1} 、 ΔM_{Py_1} 、 ΔM_{Pz_1} ——推力偏心矩 ΔM_P 在弹体坐标系 $Ox_1y_1z_1$ 各轴上的分量；

P_{x_1} 、 P_{y_1} 、 P_{z_1} ——推力 P 在弹体坐标系 $Ox_1y_1z_1$ 各轴上的分量；

d_{x_1} 、 d_{y_1} 、 d_{z_1} ——推力偏心 d 在弹体坐标 $Ox_1y_1z_1$ 各轴上的分量。

倘若推力矢量 P 平行于弹体纵轴 Ox_1 ，则有 $P_{x_1}=P$ ， $P_{y_1}=P_{z_1}=0$ ，

(5-3)式可简化为

$$\begin{bmatrix} \Delta M_{Px_1} \\ \Delta M_{Py_1} \\ \Delta M_{Pz_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Pd_{z_1} \\ -Pd_{y_1} \end{bmatrix} \quad (5-4)$$

通过弹的质心垂直于弹体纵轴作横截面。见图 5-4，推力平行于弹体纵轴的作用线投影到该横截面上为 A 点， A 与质心 O 之间距离为推力偏心距 d ， OA 连线与 Oy_1 之间的夹角为 δ ，称为推力偏心距的初始方位角 δ ，若顺飞行方向观察，由 Oy_1 轴的正向算起，顺时针方向偏转的 δ 角为正，这样

$$d_{y_1} = d \cos \delta$$

$$d_{z_1} = d \sin \delta$$

代入(5-4)式，得

$$\begin{bmatrix} \Delta M_{x_1} \\ \Delta M_{y_1} \\ \Delta M_{z_1} \end{bmatrix} = Pd \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \delta \\ -\cos \delta \end{bmatrix} \quad (5-5)$$

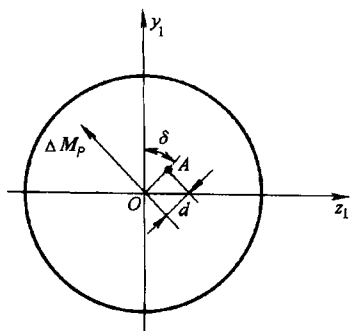


图 5-4 推力偏心简化示意图

对于滚转导弹，需要将 ΔM 投影到准弹体坐标系 $Ox_4y_4z_4$ 上，

$$\begin{bmatrix} \Delta M_{Px_4} \\ \Delta M_{Py_4} \\ \Delta M_{Pz_4} \end{bmatrix} = L^T(\gamma) \begin{bmatrix} \Delta M_{Px_1} \\ \Delta M_{Py_1} \\ \Delta M_{Pz_1} \end{bmatrix} = Pd \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(\gamma + \delta) \\ -\cos(\gamma + \delta) \end{bmatrix} \quad (5-6)$$

式中 γ ——导弹滚转角；

δ ——推力偏心距 d 的初始方位角，从 Oy_1 轴的正向算起。

推力偏心距 d 一般是服从于正态分布的随机变量，其分布特征用标准差 σ_d 表示。而初始方位角 δ 则认为是在 $0 \sim 2\pi$ 内服从均匀分布的随机变量。

以某滚转反坦克导弹为例，由于发射装置的约束，只能在飞离发射装置的瞬间开始具有绕纵轴的滚转角速度。这样，推力偏心距 d 和它相应的初始方位角 δ 对启控点纵向运动参数的影响，如图 5-5 所示。

图 5-5 中给出了推力偏心距 d 与方位角 δ 对启控点运动参数偏差值 Δy_k 、 $\Delta \theta_k$ 的影响。由图可见，在同一 δ 条件下， Δy_k 和 $\Delta \theta_k$ 与 d 成线性关系；而在同一 d 条件下，不同的初始方位

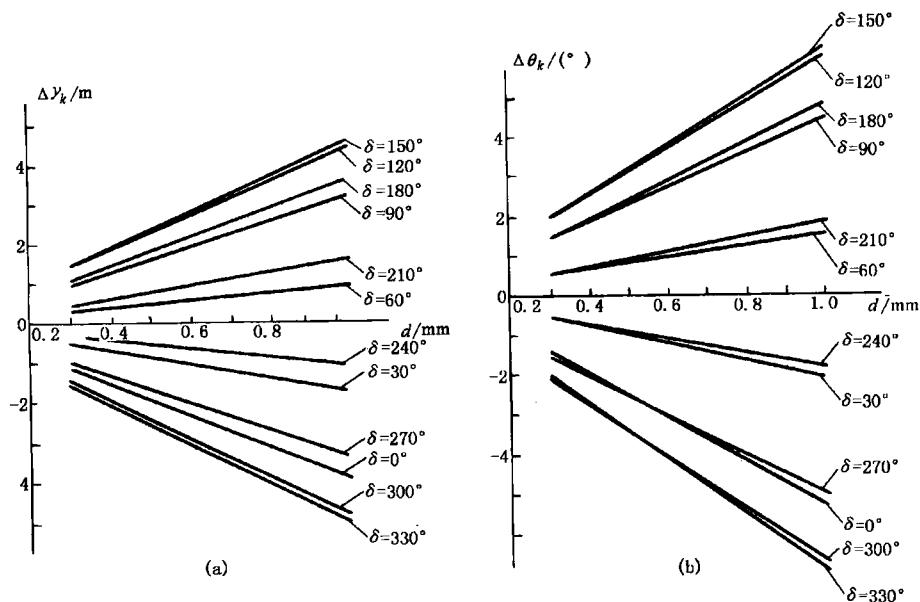


图 5-5 推力偏心对启控点的影响

角 δ 使启控点的位置分布于理论启控点的上方 ($\Delta y_k > 0, \Delta \theta_k > 0$) 或下方。 d 和 δ 对于侧向参数偏差值 Δz_k 和 $\Delta \psi_{vk}$ 的影响类同。只是当 d 相同, δ 不同时, 启控点的位置相应地分布于理论启控点的左方或右方。

导弹飞离发射装置瞬间, 推力偏心矩 ΔM_p 的方向完全由推力偏心距 d 的初始方位角 δ 决定。其后, ΔM_p 随弹体滚转, 这样可以有效地减小弹道参数的偏差值, 并且在一定滚转速度范围内, 滚转速度越大, 效果越好。然而, 导弹在脱离发射装置后。由于弹体滚转角速度逐渐增大, 转过同样角度所需时间逐渐减小。因此, 弹体在一个滚转周期内, 尤其是第一个周期, 推力偏心矩 ΔM_p 的作用效果不能完全被抵消, 即在一个周期内, 力矩 ΔM_p 的周期平均值不等于零。所以, 启控点偏差完全由力矩 ΔM_p 的周期平均值的大小和方向确定。如图 5-5 所示, 当 d 一定时, δ 在 150° 左右时, Δy_k 、 $\Delta \theta_k$ 的值最大, 而 δ 在 330° 左右, Δy_k 、 $\Delta \theta_k$ 出现最大的下偏差。计算表明, δ 在 240° 左右出现最大的右偏差, δ 在 60° 左右出现最大的左偏差。

总之, 在初始段弹道上, 推力偏心是造成弹道参数偏差的重要因素。要想减小推力偏心引起的散布, 一定要严格控制制造及安装工艺误差, 并尽可能地提高导弹的初始滚转角速度。

三、导弹质量分布不对称的影响

导弹质量分布不对称可能导致两种情况, 一是导弹质心偏离弹体几何纵轴距离 h , 即质量偏心, 或称为静不平衡; 另一是导弹质量分布不均匀引起的动不平衡, 动不平衡只有在导弹作滚转运动时才表现出来。

1. 静不平衡

前面的所有讨论中, 假设质量分布是均匀的, 这时, 质心位于导弹的对称轴上。实际上, 导弹的质量分布总会有一定的不均匀, 使得质心偏离几何对称轴一个微小距离 h_0 , 称为质量偏心, 见图 5-6。

选一新的轴线为“弹轴”, 此轴线过质心而平行于几何对称轴。对于新“弹轴”而言, 显然已

经没有质量偏心,但相应出现了两种情况:

(1) 由于此时推力沿几何轴线,对质心 O 而言,出现推力偏心 h_0 ,产生扰动力矩 Ph_0 ,可作为推力偏心力矩的一部分处理,即推力偏心距 d 又增加了线偏差 h_0 。

(2) 当导弹在脱离发射装置处就已经具有一定滚转速度时,质量偏心还会引起一个附加的初始扰动速度 $\omega_{x_1 0} \times h_0$,质心的实际初速为

$$V_0 = V'_0 + \omega_{x_1 0} \times h_0 \quad (5-7)$$

式中 V'_0 ——质心未扰动初速;

$\omega_{x_1 0}$ ——飞离发射装置瞬间,导弹绕 Ox_1 轴的滚动角速度。

当导弹飞离发射装置时,扰动速度垂直于未扰动初速 V'_0 ,两者的向量和才是导弹的实际初速。实际初速 V_0 与未扰动初速 V'_0 之间的夹角 $\omega_{x_1 0} h_0 / V_0$ 为速度矢量的初始扰动角的一部分。

一般情况下,质心偏离几何轴线的线偏差 h_0 是服从正态分布的随机变量,其分布特性可用 σ_h 来表征。而质心偏离的方位是在 $[0 \sim 2\pi]$ 区间之内,服从均匀分布的随机变量。

2. 动不平衡

导弹质量分布不均衡将引起动不平衡。动不平衡只有在导弹滚转的情况下才能表现出来。

动不平衡现象可以这样理解。设有一个原来的质量分布完全均匀的导弹,其质心位于 O 点,见图 5-7。然后,在导弹 x_1Oy_1 平面的某一点 A 上增加了一个小的质量 Δm , A 点的坐标为 (x_A, y_A) 。于是导弹将产生质量偏心 $h_0 = (\Delta m y_A) / m$,这是静不平衡。如果导弹以角速度 ω_x 绕 Ox_1 轴滚转,在点 A 的小质量 Δm 将产生一个离心力为 $\Delta m y_A \omega_x^2$,此力对于 Oz_1 轴将产生力矩 $\Delta m x_A y_A \omega_x^2$,这就是动不平衡现象。然而,如果导弹绕某一新的轴旋转,动不平衡现象将能消除,也就是没有惯性离心力矩产生,这个新轴称为动平衡轴,它同原来的几何对称轴 Ox_1 之间将存在一个夹角 β_D ,称为动不平衡角。

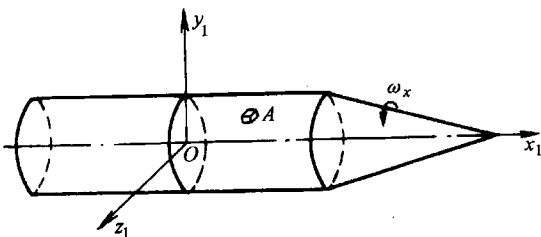


图 5-7 动不平衡示意图

为了研究由于动不平衡角 β_D 引起的扰动力矩,定义一个动平衡坐标系 $Ox_D y_D z_D$,其坐标原点位于弹体质心上; Ox_D 轴与导弹的惯性中心主轴一致,指向前方为正; Oy_D 轴位于弹体纵向对称平面 x_1Oy_1 内,指向上为正; Oz_D 轴的方向按右手定则确定。

由于动不平衡角 β_D 的存在,惯性中心主轴 Ox_D 与弹体的 Ox_1 轴不重合。所以,坐标系 $Ox_D y_D z_D$ 与坐标系 $Ox_1 y_1 z_1$ 之间的空间方位是由 β_D 确定的。若将 β_D 分解为 λ 、 μ 两个角,则它们应定义为:

λ ——惯性中心主轴 Ox_D 在纵向对称面 x_1Oy_1 内的投影与弹体纵轴 Ox_1 的夹角, Ox_1 轴在投影线之上为正;

μ ——惯性中心主轴 Ox_D 与弹体纵向对称平面 x_1Oy_1 之间的夹角, Ox_D 轴逆时针旋转到平面 x_1Oy_1 为正。

由 λ 、 μ 角定义可知, 由坐标系 $Ox_Dy_Dz_D$ 到坐标系 $Ox_1y_1z_1$ 的变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = L(\lambda, \mu) \begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{bmatrix}$$

$$L(\lambda, \mu) = \begin{bmatrix} \cos\lambda\cos\mu & \sin\lambda & -\cos\lambda\sin\mu \\ -\sin\lambda\cos\mu & \cos\lambda & \sin\lambda\sin\mu \\ \sin\mu & 0 & \cos\mu \end{bmatrix}$$

考虑到 λ 、 μ 皆为小量, 并略去二阶小量, 则变换矩阵 $L(\lambda, \mu)$ 可简化为

$$L(\lambda, \mu) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -\mu \\ -\lambda & 1 & 0 \\ \mu & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-8)$$

为了求得动不平衡引起的扰动力矩在准弹体坐标系 $Ox_4y_4z_4$ 各轴上的投影, 现在作如下变换: 由于存在动不平衡角 β_D , 准弹体坐标系 $Ox_4y_4z_4$ 已经不再是惯性中心坐标系, 这时, 该坐标系内的转动惯量张量应该为

$$J = \begin{bmatrix} J_{x_4} & -J_{x_4y_4} & -J_{x_4z_4} \\ -J_{y_4x_4} & J_{y_4} & -J_{y_4z_4} \\ -J_{z_4x_4} & -J_{z_4y_4} & J_{z_4} \end{bmatrix} \quad (5-9)$$

显然, 导弹在惯性中心主轴组成的动平衡系 $Ox_Dy_Dz_D$ 内的转动惯量张量为

$$J_D = \begin{bmatrix} J_{x_4} & 0 & 0 \\ 0 & J_{y_4} & 0 \\ 0 & 0 & J_{z_4} \end{bmatrix} \quad (5-10)$$

若用 ω' 表示准弹体系 $Ox_4y_4z_4$ 的旋转角速度矢量, 而以 ω_D 表示动平衡系 $Ox_Dy_Dz_D$ 的旋转角速度度矢量。考虑到 $Ox_4y_4z_4$ 、 $Ox_1y_1z_1$ 及 $Ox_Dy_Dz_D$ 三个坐标系之间的变换矩阵(2-96)和(5-8)式, 则准弹体系和动平衡系之间存在如下关系:

$$\omega_D = L^T(\lambda, \mu)L(\gamma)\omega' \quad (5-11)$$

$$J\omega' = L^T(\gamma)L(\lambda, \mu)J_D\omega_D \quad (5-12)$$

将(5-11)式代入(5-12)式, 得到

$$J = L^T(\gamma)L(\lambda, \mu)J_DL^T(\lambda, \mu)L(\gamma) \quad (5-13)$$

(5-13)式是一个很重要的公式。它给出了不同坐标系内的惯量张量之间的转换关系。

展开(5-13)式, 并假设 $J_{y_4} = J_{x_4}$ (即轴对称型导弹), 略去二阶以上的小量, 经整理得到

$$J = \begin{bmatrix} J_{x_4} & (J_{y_4} - J_{x_4})A & (J_{z_4} - J_{x_4})B \\ (J_{y_4} - J_{x_4})A & J_{y_4} & 0 \\ (J_{z_4} - J_{x_4})B & 0 & J_{z_4} \end{bmatrix} \quad (5-14)$$

式中

$$\begin{cases} A = \lambda \cos\gamma + \mu \sin\gamma \\ B = \lambda \sin\gamma - \mu \cos\gamma \end{cases} \quad (5-15)$$

同时注意到 $Ox_4y_4z_4$ 坐标系的旋转角速度 ω' 在 $Ox_4y_4z_4$ 坐标系各轴上的投影分量有如下关系,

$$\begin{bmatrix} \omega'_{x_4} \\ \omega'_{y_4} \\ \omega'_{z_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{x_4} - \dot{\gamma} \\ \omega_{y_4} \\ \omega_{z_4} \end{bmatrix} \quad (5-16)$$

将(5-14)式代入(2-110)式,并考虑(2-111)和(2-114)式展开并略去高阶小量,再计及(5-16)式,得到

$$\left. \begin{aligned} J_{x_4} \frac{d\omega_{x_4}}{dt} &= M_{x_4} + M_{cx_4} - (J_{y_4} - J_{x_4})A \frac{d\omega_{y_4}}{dt} - (J_{z_4} - J_{x_4})B \frac{d\omega_{z_4}}{dt} \\ J_{y_4} \frac{d\omega_{y_4}}{dt} &= M_{y_4} + M_{cy_4} - (J_{y_4} - J_{x_4})A \frac{d\omega_{x_4}}{dt} - (J_{x_4} - J_{z_4})\omega_{x_4}\omega_{z_4} - J_{z_4}\omega_{z_4}\dot{\gamma} \\ J_{z_4} \frac{d\omega_{z_4}}{dt} &= M_{z_4} + M_{cz_4} - (J_{z_4} - J_{x_4})B \frac{d\omega_{x_4}}{dt} - (J_{y_4} - J_{x_4})\omega_{y_4}\omega_{x_4} + J_{y_4}\omega_{y_4}\dot{\gamma} \end{aligned} \right\} (5-17)$$

将(5-17)式与(2-115)式进行比较,就可得到动不平衡引起的扰动力矩表达式

$$\begin{bmatrix} \Delta M_{Dx_4} \\ \Delta M_{Dy_4} \\ \Delta M_{Dz_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - (J_{y_4} - J_{x_4})A \frac{d\omega_{y_4}}{dt} - (J_{z_4} - J_{x_4})B \frac{d\omega_{z_4}}{dt} \\ - (J_{y_4} - J_{x_4})A \frac{d\omega_{x_4}}{dt} \\ - (J_{z_4} - J_{x_4})B \frac{d\omega_{x_4}}{dt} \end{bmatrix} \quad (5-18)$$

(5-18)式中的 A 、 B 由(5-15)式给出。 A 和 B 的表达式中含有两个角参数 λ 、 μ 。它们通常是服从正态分布的随机变量,其分布特性可分别用标准偏差 σ_A 、 σ_μ 来表征。

四、风的影响

大气压力分布的不均匀性是产生风的根源。理论研究和导弹的发射试验都表明,大气参数与其标准值的偏差对导弹的运动有较大的影响,尤其是风速矢量 $\mathbf{W}$ 的变化,是引起弹道散布的重要因素之一。

风速 $\mathbf{W}$ 不仅随地理位置变化,即使是在同一地理位置也随时间和空间高度的变化而变化。通常气象预报的风速是指当地的平均风速而言。实际上,风速沿时间和空间高度的变化过程都是随机的。在工程实践中,通常把风速矢量 $\mathbf{W}$ 视为常值风速 $\mathbf{W}_c$ 和随机风速 $\Delta\mathbf{W}$ 的矢量和

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_c + \Delta\mathbf{W}$$

根据统计数据,随机风速 $\Delta\mathbf{W}$ 的标准差 $\delta_{\Delta\mathbf{W}}$ 可用如下关系式估算

$$\delta_{\Delta\mathbf{W}} = \frac{0.1\mathbf{W}_c - 0.1}{0.6744}$$

常值风速 $\mathbf{W}_c$ 引起的弹道偏差是确定型的,一般可以进行修正,而随机风速引起的弹道偏差则是随机分布的。

研究风速对导弹飞行的影响,通常总是把风速 $\mathbf{W}$ 沿地面坐标系各轴分解成 W_x 、 W_y 、 W_z ,即

$$\mathbf{W} = [W_x, W_y, W_z]^T$$

并假定各个分量与对应轴的方向一致时为正,反之为负。一般研究风速对弹道的影响,可采

用两种方法。

1. 相对速度及相应的攻角、侧滑角

有风速存在时, 计算作用于导弹上的空气动力和力矩时, 直接应用导弹的相对速度 V_w 和相应的攻角 α_w 、侧滑角 β_w 进行计算。这时, 导弹的相对速度为

$$V_w = V - W$$

它的大小和相对地面系的方位可由下式确定

$$\left. \begin{aligned} V_w &= \sqrt{(V_x - W_x)^2 + (V_y - W_y)^2 + (V_z - W_z)^2} \\ \theta_w &= \arctan \left(\frac{V_y - W_y}{\sqrt{(V_x - W_x)^2 + (V_z - W_z)^2}} \right) \\ \psi_{vw} &= \arctan \left(\frac{-V_z + W_z}{V_x - W_x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5-19)$$

式中 V_x 、 V_y 、 V_z ——导弹速度 V 在 $Axyz$ 坐标系各轴上的投影分量, 它们可由导弹质心运动学方程给出, 即

$$V_x = V \cos \theta \cos \psi_v, \quad V_y = V \sin \theta, \quad V_z = -V \cos \theta \sin \psi_v$$

利用(5-19)式求出的 θ_w 和 ψ_{vw} 及导弹运动方程组中的几何关系方程, 即可确定与相对速度 V_w 对应的攻角和侧滑角。

对于滚转导弹, 可由运动方程组(2-120)中的几何关系方程求出

$$\left. \begin{aligned} \beta_w^* &= \arcsin[\cos \theta_w \sin(\psi - \psi_{vw})] \\ \alpha_w^* &= \vartheta - \arcsin(\sin \theta_w / \cos \beta_w^*) \\ \gamma_{vw}^* &= \arcsin(\tan \beta_w^* \tan \theta_w) \end{aligned} \right\} \quad (5-20)$$

对于非滚转导弹, 则由导弹运动方程组(2-65)式中的几何关系方程得到

$$\left. \begin{aligned} \sin \beta_w &= \cos \theta_w [\cos \gamma \sin(\psi - \psi_{vw}) + \sin \vartheta \sin \gamma \cos(\psi - \psi_{vw})] - \sin \theta_w \cos \vartheta \sin r \\ \sin \alpha_w &= \{\cos \theta_w [\sin \vartheta \cos \gamma \cos(\psi - \psi_{vw}) - \sin \gamma \sin(\psi - \psi_{vw})] - \sin \theta_w \cos \vartheta \cos r\} / \cos \beta_w \\ \sin \gamma_{vw} &= (\cos \alpha_w \sin \beta_w \sin \vartheta - \sin \alpha_w \sin \beta_w \cos \gamma \cos \vartheta + \cos \beta_w \sin \gamma \cos \vartheta) / \cos \theta_w \end{aligned} \right\} \quad (5-21)$$

将(5-19)式和(5-20)式与运动方程组(2-120)式或者(5-19)式和(5-21)式与运动方程组(2-65)式联立求解, 即可得到不同风速下的弹道参数值。方程中参数 α_w^* 、 β_w^* (或 α_w 、 β_w) 和 V_w 仅用于计算空气动力和空气动力矩; 而参数 γ_{vw}^* 或 γ_w 则只用来计算升力 Y 和侧向力 Z 的投影项, 如 $Y \cos \gamma_{vw}^*$ 、 $Z \sin \gamma_{vw}^*$, 等等。

2. 附加攻角 $\Delta \alpha$ 和侧滑角 $\Delta \beta$

有风速存在时, 在很多情况下, 常将风速的影响归结为速度的变化, 以及由风引起的附加攻角 $\Delta \alpha$ 和侧滑角 $\Delta \beta$ 。由它们所决定的空气动力和力矩的改变量, 则常作为扰动力和扰动力矩处理。

经估值分析, 可将风分为垂直风和水平风, 当导弹贴近地面飞行, 可以不考虑垂直风, 认为风是平行于地面的, 通常将风分解成垂直于射击平面的横风 W_x 和平行于射击平面的纵风 W_z 。由图 5-8 所示, 纵风 W_x 使导弹相对气流的方向变为 V_1 , 横风 W_z 使导弹相对气流的方向变成 V_2 , 分别产生附加攻角 $\Delta \alpha_w$ 和附加侧滑角 $\Delta \beta_w$, 其中

$$\tan \Delta \alpha_w = \frac{W_z \sin \theta}{V + W_x \cos \theta}$$

如果风速分量 W_z 在侧滑角平面内垂直于飞行速度 V ，则

$$\tan \Delta \beta_w = \frac{W_z}{V}$$

由附加攻角 $\Delta \alpha_w$ 引起的干扰力和干扰力矩分别为

$$\left. \begin{aligned} F_{yw} &= c_y^a \Delta \alpha_w q S \\ M_{zw} &= -F_{yw} (x_{py} - x_G) \end{aligned} \right\} \quad (5-22)$$

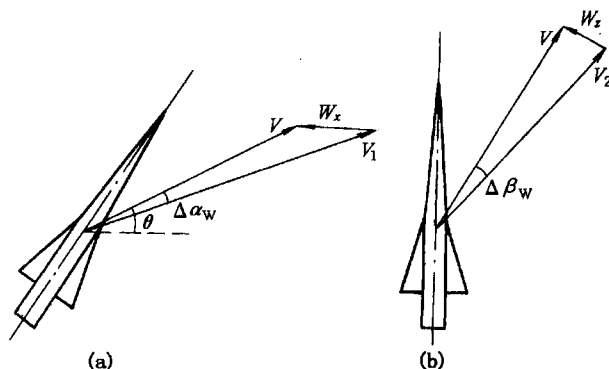


图 5-8 附加攻角、附加侧滑角的形成

式中 x_{py} ——干扰力 F_{yw} 的气动压心到弹体顶点的距离。

由附加侧滑角 $\Delta \beta_w$ 引起的干扰力和干扰力矩分别为

$$\left. \begin{aligned} F_{zw} &= c_z^b \Delta \beta_w q S \\ M_{yw} &= F_{zw} (x_{pz} - x_G) \end{aligned} \right\} \quad (5-23)$$

式中 x_{pz} ——干扰力 F_{zw} 的气动压心到弹体顶点的距离。

总之，对于初始弹道而言，风速矢量是导致启控点散布的三个主要因素（推力偏心、风速、初始扰动）之一。尤其是横向风 W_z ，对弹道参数的影响更为显著。以某滚转反坦克导弹为例，横向风对启控点散布的影响如图 5-9 所示。图中 Δy_k 、 $\Delta \theta_k$ 、 Δz_k 、 $\Delta \psi_{vk}$ 为仅考虑横向风时启控点处弹道参数相对于理论弹道参数的偏差值。当横风 W_z 指向地面系 Az 轴正向时， $W_z > 0$ ，弹道左偏，这时 $\Delta z_k < 0$ ， $\Delta \psi_{vk} > 0$ 。这是因为该弹具有较大的尾翼，所以，具有迎风偏的特点；另外，由于横风 W_z 的存在，导致作用于弹上的气动力矩发生变化，以及滚转弹的陀螺效应和马格努斯效应等原因，使弹道出现爬高的现象，即 $\Delta y_k > 0$ ， $\Delta \theta_k > 0$ 。当 $W_z < 0$ 时，弹道参数偏差量的变化趋势与 $W_z > 0$ 的情况恰恰相反。

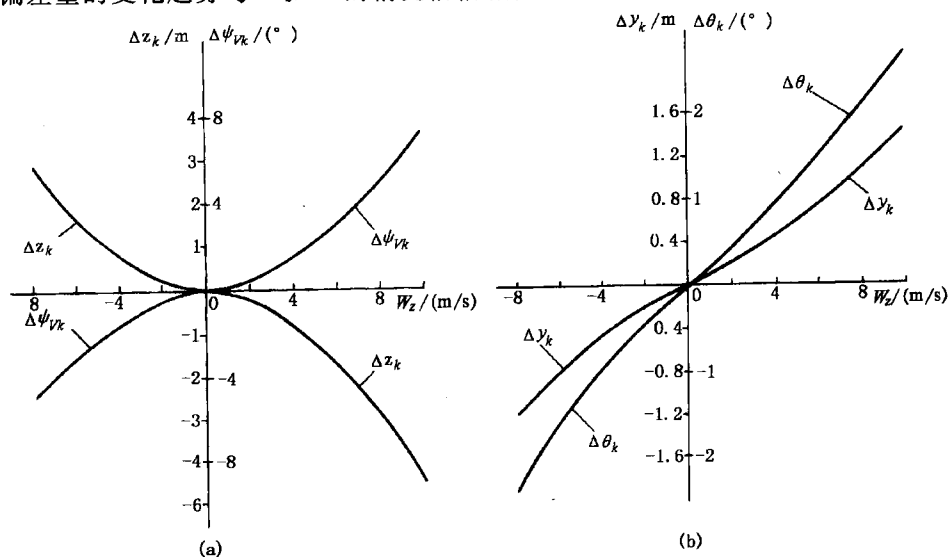


图 5-9 横风 W_z 对启控点散布的影响

图 5-10 表示常值横风和随机横风对角参数 α_w^* 、 β_w^* 的影响。从图中可见，常值风的扰动使弹道参数产生系统偏差，而随机风将引起攻角 α_w^* 和侧滑角 β_w^* 的较大振荡。对于静稳定导弹，阵风一旦停止， α_w^* 、 β_w^* 将逐渐趋于稳态值。由于随机风的大小、方向以及出现的时刻和延续的时间都是随机的，如果在启控点附近出现较大的随机风，就有可能使导弹飞离规定的散布区域。即使在启控之后出现较大的随机风，也不利于导弹的操纵飞行。

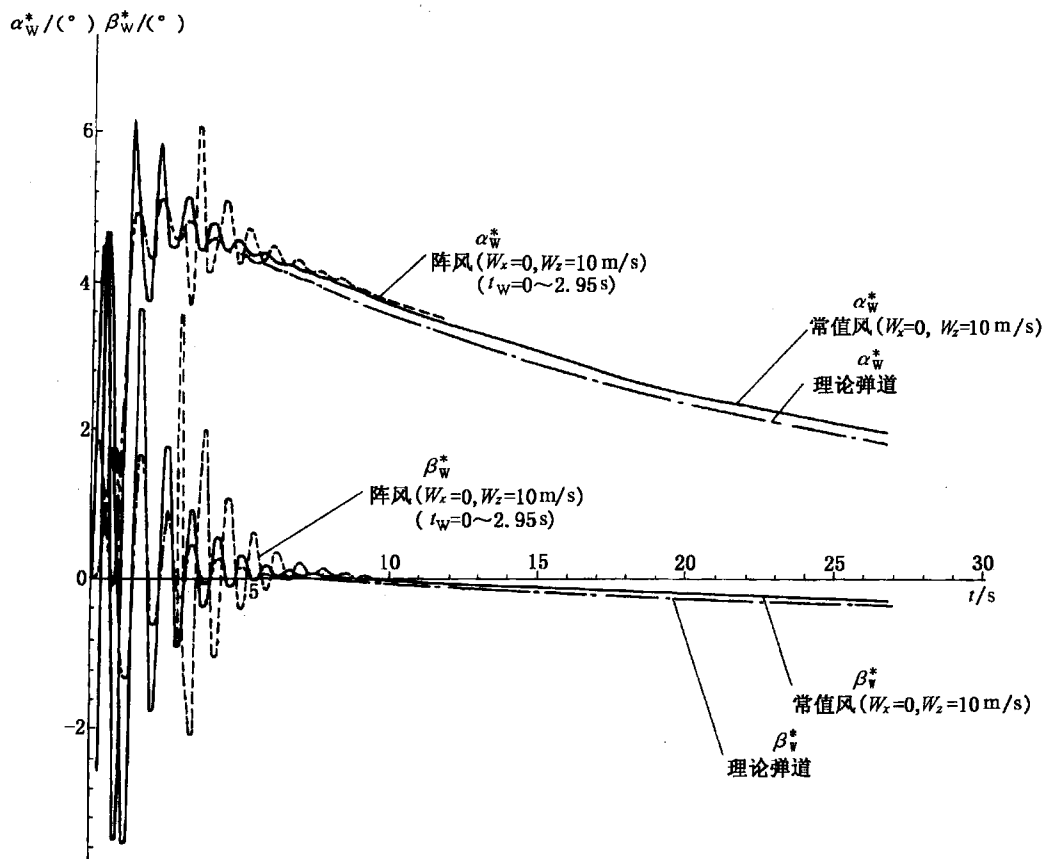


图 5-10 横向风对角参数 α_w^* 、 β_w^* 的影响

五、制造和安装工艺误差引起的扰动

导弹弹身和弹翼的加工及其装配都会有工艺误差，它们也会引起扰动力和力矩。这是由于弹身各段之间在对接时可能出现轴线位移和角位移。而弹翼的安装，在理论上要求两个对称弹翼的翼弦平面通过弹身轴线或者有一固定的安装角 φ ，但由于工艺误差，有可能形成某一安装误差角 $\Delta\varphi$ 。基于上述原因，导弹在飞行过程中就会产生一定的附加攻角和附加侧滑角，从而引起附加的扰动力和力矩。

1. 弹身的装配误差

弹身是分段加工制造的，每一段都有允许的加工误差，把各段对接起来就会使弹身轴线与理论轴线不再重合，外形也相应地发生变化。由于轴线的偏离将形成推力偏心，并使安装在某个弹身段上的升力面产生一个附加攻角（假设该偏离是在对称面内发生的）。

由图 5-11 所示,若弹身的 l_1 段与 l_2 段对接处形成误差 h_1 , l_2 段与 l_3 段对接处形成误差 h_2 ,那么,由于 h_1 的存在,将在 l_2 、 l_3 段舱体上形成附加攻角 $\Delta\alpha_{b1}$,由于 h_2 的存在,在 l_3 段舱体上形成附加攻角 $\Delta\alpha_{b2}$,其中

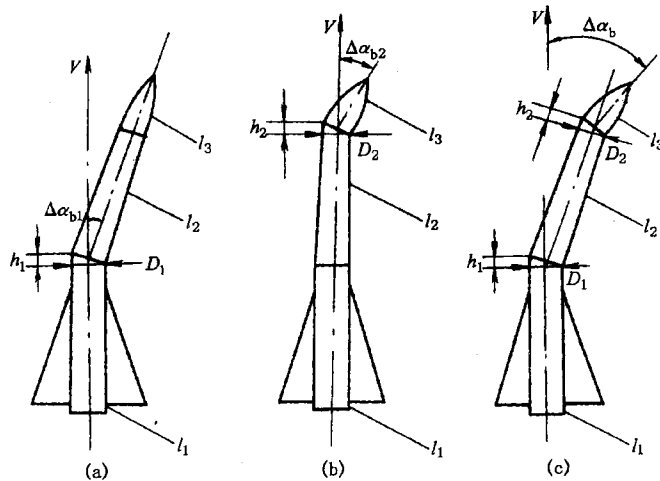


图 5-11 弹身装配工艺误差示意图

$$\Delta\alpha_{b1} \approx \frac{h_1}{D_1}, \quad \Delta\alpha_{b2} \approx \frac{h_2}{D_2}$$

由于 $\Delta\alpha_{b1}$ 、 $\Delta\alpha_{b2}$ 都是独立的随机变量,服从于正态分布规律,当 h_1 、 h_2 同时出现时,在 l_3 舱段产生的附加攻角 $\Delta\alpha_b$ 应为

$$\Delta\alpha_b = \Delta\alpha_{b1} + \Delta\alpha_{b2}$$

所以,由附加攻角 $\Delta\alpha_b$ 引起的扰动力和力矩可表示为

$$F_{yb} = c_y^a \Delta\alpha_b q S, \quad M_{zb} = -F_{yb}(x_{pyb} - x_G) \quad (5-24)$$

同理,若存在附加侧滑角 $\Delta\beta_b$,则有

$$F_{zb} = c_z^b \Delta\beta_b q S, \quad M_{yb} = F_{zb}(x_{pzb} - x_G) \quad (5-25)$$

式中 x_{pyb} 、 x_{pzb} ——附加攻角 $\Delta\alpha_b$ 、附加侧滑角 $\Delta\beta_b$ 引起的扰动力气动压心到弹体顶点的距离。

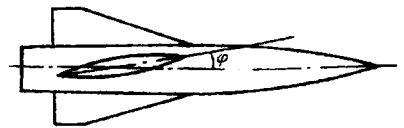


图 5-12 弹翼安装误差

2. 弹翼的安装误差

理论上要求对称型弹翼的翼弦平面通过弹身轴线或者有一固定的安装角。由于不可避免地存在着工艺误差,可能导致根部翼弦与弹身轴线间形成误差安装角 φ ,见图 5-12。因为安装角和攻角有着同样的作用,由此在导弹上产生干扰力和干扰力矩。

如果水平弹翼和垂直弹翼的安装误差分别为 $\Delta\varphi_y$ 、 $\Delta\varphi_z$,则由 $\Delta\varphi_y$ 、 $\Delta\varphi_z$ 引起的纵向和侧向扰动力和扰动力矩分别为

$$\left. \begin{aligned} F_{y\varphi} &= c_y^a \Delta\varphi_y q S \\ M_{z\varphi} &= -F_{y\varphi}(x_{py\varphi} - x_G) \end{aligned} \right\} \quad (5-26)$$

$$\left. \begin{aligned} F_{z\varphi} &= c_z^b \Delta\varphi_z q S \\ M_{y\varphi} &= F_{z\varphi}(x_{pz\varphi} - x_G) \end{aligned} \right\} \quad (5-27)$$

式中 $x_{py\varphi}$ 、 $x_{pz\varphi}$ ——水平弹翼、垂直弹翼的气动压心到弹体顶点的距离。

弹翼安装误差 $\Delta\varphi_y$ 、 $\Delta\varphi_z$ 一般为服从正态分布的随机变量，其分布特性可用 σ_{φ_y} 、 σ_{φ_z} 来表征。

§ 5-2 初始段扰动运动方程组

将导弹运动方程组(2-120)或(2-65)中控制关系方程式删去，然后，计及§5-1中分析的各主要随机扰动因素引起的扰动力和扰动力矩，如推力偏心引起的推力偏心矩、动不平衡导致的附加力矩、常值风和随机风速对空气动力和空气动力矩的影响、弹身和弹翼制造与安装工艺误差产生的扰动力和力矩等，就可以得到初始段扰动运动方程组。初始扰动在运动方程组初始条件中考虑。下面以低速滚转导弹为例，并假定除常值风和随机风速以外，其它各扰动因素对阻力的影响较小，可以忽略不计；忽略推力偏心角引起的推力法向分量。

根据假定，初始段运动方程组可以写成

$$\left. \begin{aligned}
 m \frac{dV}{dt} &= P \cos \alpha^* \cos \beta^* - X - mg \sin \theta \\
 mV \frac{d\theta}{dt} &= P (\sin \alpha^* \cos \gamma_V^* + \cos \alpha^* \sin \beta^* \sin \gamma_V^*) + \\
 &\quad (Y + F_{yb} + F_{y\varphi}) \cos \gamma_{VW}^* - (Z + F_{zb} + F_{z\varphi}) \sin \gamma_{VW}^* - mg \cos \theta \\
 - mV \cos \theta \frac{d\psi_V}{dt} &= P (\sin \alpha^* \sin \gamma_V^* - \cos \alpha^* \sin \beta^* \cos \gamma_V^*) + \\
 &\quad (Y + F_{yb} + F_{y\varphi}) \sin \gamma_{VW}^* + (Z + F_{zb} + F_{z\varphi}) \cos \gamma_{VW}^* \\
 J_{x_4} \frac{d\omega_{x_4}}{dt} &= \frac{1}{2} \rho V_W^2 l (m_{x_0} + \bar{m}_{x_4}^{\bar{\omega}_{x_4}} \bar{\omega}_{x_4} + \bar{m}_{x_4}^{\bar{\omega}_{y_4}} \bar{\omega}_{y_4} + \bar{m}_{x_4}^{\bar{\omega}_{z_4}} \bar{\omega}_{z_4}) - \\
 &\quad (J_{y_4} - J_{x_4}) A \frac{d\omega_{y_4}}{dt} - (J_{z_4} - J_{x_4}) B \frac{d\omega_{z_4}}{dt} \\
 J_{y_4} \frac{d\omega_{y_4}}{dt} &= \frac{1}{2} \rho V_W^2 L (m_{y_4}^{\beta} \beta^* + \bar{m}_{y_4}^{\bar{\omega}_{y_4}} \bar{\omega}_{y_4} + \bar{m}_{y_4}^{\bar{\omega}_{x_4}} \bar{\omega}_{x_4}) - (J_{x_4} - J_{z_4}) \omega_{x_4} \omega_{z_4} - \\
 &\quad J_{z_4} \omega_{z_4} \dot{\gamma} - (J_{y_4} - J_{x_4}) A \frac{d\omega_{x_4}}{dt} + Pd \sin(\gamma + \delta) + M_{yb} + M_{y\varphi} \\
 J_{z_4} \frac{d\omega_{z_4}}{dt} &= \frac{1}{2} \rho V_W^2 L (m_{z_4}^{\alpha} \alpha^* + \bar{m}_{z_4}^{\bar{\omega}_{z_4}} \bar{\omega}_{z_4} + \bar{m}_{z_4}^{\bar{\omega}_{x_4}} \bar{\omega}_{x_4}) - (J_{y_4} - J_{x_4}) \omega_{y_4} \omega_{x_4} + \\
 &\quad J_{y_4} \omega_{y_4} \dot{\gamma} - (J_{z_4} - J_{x_4}) B \frac{d\omega_{x_4}}{dt} - Pd \cos(\gamma + \delta) + M_{zb} + M_{z\varphi} \\
 \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_{z_4} \\
 \frac{d\psi}{dt} &= \omega_{y_4} / \cos \vartheta \\
 \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_{x_4} - \frac{d\psi}{dt} \sin \vartheta \\
 \frac{dx}{dt} &= V \cos \theta \cos \psi_V
 \end{aligned} \right\} \quad (5-28)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= V \sin \theta \\
\frac{dz}{dt} &= -V \cos \theta \sin \phi_v \\
\frac{dm}{dt} &= -m_c \\
\beta^* &= \arcsin[\cos \theta \sin(\psi - \phi_v)] \\
\alpha^* &= \vartheta - \arcsin(\sin \theta / \cos \beta^*) \\
\gamma_v^* &= \arcsin(\tan \theta \tan \beta^*) \\
V_w &= \sqrt{(V \cos \theta \cos \phi_v - W_x)^2 + (V \sin \theta - W_y)^2 + (-V \cos \theta \sin \phi_v - W_z)^2} \\
\theta_w &= \arctan \frac{V \sin \theta - W_y}{\sqrt{(V \cos \theta \cos \phi_v - W_x)^2 + (-V \cos \theta \sin \phi_v - W_z)^2}} \\
\phi_{vw} &= \arctan \frac{V \cos \theta \sin \phi_v + W_z}{V \cos \theta \cos \phi_v - W_x} \\
\beta_w^* &= \arcsin[\cos \theta_w \sin(\psi - \phi_{vw})] \\
\alpha_w^* &= \vartheta - \arcsin(\sin \theta_w / \cos \beta_w^*) \\
\gamma_{vw}^* &= \arcsin(\tan \theta_w \tan \beta_w^*) \\
F_{yb} &= c_y^a \Delta \alpha_b^* q S \\
F_{zb} &= c_z^b \Delta \beta_b^* q S \\
F_{y\varphi} &= c_y^a \Delta \varphi_y q S \\
F_{z\varphi} &= c_z^b \Delta \varphi_z q S \\
M_{yb} &= F_{zb} (x_{pzb} - x_G) \\
M_{zb} &= -F_{yb} (x_{pyb} - x_G) \\
M_{y\varphi} &= F_{z\varphi} (x_{pz\varphi} - x_G) \\
M_{z\varphi} &= -F_{y\varphi} (x_{py\varphi} - x_G) \\
A &= \lambda \cos \gamma + \mu \sin \gamma \\
B &= \lambda \sin \gamma - \mu \cos \gamma
\end{aligned} \tag{5-28} \text{ 续}$$

在扰动运动方程组(5-28)中,除推力偏心距的方位角被视为 $[0, 2\pi]$ 上的均匀分布随机变量之外,所有其他扰动变量一般都可视为服从正态分布的随机变量。为此,就需要构造相应的数学概率模型,用以产生服从一定分布的随机变量。只要给出方程组的初值,并能获得大量的随机变量的抽样值,就可以在计算机上用蒙特卡洛法进行数学模拟打靶试验,并对弹道参数统计计算。

§ 5-3 利用蒙特卡洛法研究弹道参数的统计特性

蒙特卡洛方法是一类通过随机变量的统计试验或随机模拟,求解数学、物理和工程技术问题近似解的数值方法。也称为统计试验法、随机模拟法或伪随机数法。

蒙特卡洛法用于近似数值计算领域已有百年的历史。以前由于模拟试验工具的限制,很少有人用来求解实际问题。高速计算机的发展和普及为蒙特卡洛方法提供了强有力的模拟工

具，使这类方法得到了愈来愈广泛的应用。

用蒙特卡洛方法进行数学模拟打靶，是在计算机上完成的。它可以补充和减少复杂而又昂贵的导弹飞行试验，进行武器系统的研制、定型或改型等多种工作，利用蒙特卡洛方法进行模拟打靶的基本步骤是：

(1) 建立一个比较精确的导弹系统数学模型。如果研究命中目标的概率，还需要目标运动数学模型；

(2) 确定导弹飞行过程中的各种随机扰动因素以及各种扰动因素的分布规律；

(3) 根据各随机扰动变量的分布律，构造相应的数学概率模型，以产生各随机扰动变量的抽样值；

(4) 将随机变量的抽样值送入数学模型（即运动方程）。模拟打靶多次，即可获得启控点处随机弹道参量的子样；

(5) 对模拟打靶结果进行统计处理。

上述模拟打靶方法的计算流程框图见图 5-13。上述模拟步骤中的前两个问题，已经在本章前两节中作了介绍，本节主要解决各种概率分布的随机变量的产生、抽样及检验问题。

一、随机数的产生

用蒙特卡洛方法模拟一个实际问题，要用到各种分布的随机数。就数学上而言，只要有了一种分布规律的随机数，就可以通过各种数学变换或抽样的方法，产生出具有任意分布的随机数。实际上，在计算机上总是先产生最简单的 $[0,1]$ 区间的均匀分布随机数，然后再用它产生出所需的各种分布的随机数。

$[0,1]$ 区间的均匀分布密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$[0,1]$ 区间上的均匀分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x < 0 \\ x, & \text{当 } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{当 } x > 1 \end{cases}$$

产生随机数的方法很多，在计算机上已经使用的方法可分为三类：

1. 将采用观察法产生的随机数制作成随机数表，再将随机数表存储在计算机里

采用观察法获得的随机数的统计性质不好，而且通过它构成的随机数表在计算机上使用也不方便，一方面，它需要占用较大的存贮空间和较长的调用时间，另一方面，在现代计算机模拟应用中需要使用大量的随机数，即使百万数表也往往还是不够用。

2. 用物理方法，如噪声型随机数发生器产生真正的随机数

这种随机数产生器的主要缺点是它没有可重复性，几乎不可能得到重复的随机数序列。这使得对程序正确性和模拟正确性的检查十分困难。

3. 用数学方法产生伪随机数

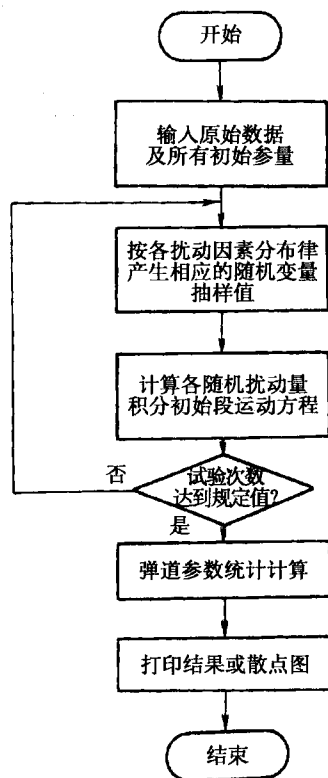


图 5-13 数学模拟打靶方法的流程框图

这种方法利用数字计算机的运算性能, 根据递推公式

$$r_{n+j+1} = g(r_{n+1}, r_{n+2}, \dots, r_{n+j}) \quad (5-29)$$

由程序直接产生数值序列 $\{r_i\}$ 。这种产生随机数的方法速度快, 占用计算机内存小, 对模拟问题可以进行复算检查, 所以发展较快, 使用广泛。

用递推公式(5-29)产生的随机数序列 $\{r_i\}$, 由于计算机的字长有限, 只能表示有限个的数。所以, 所产生的随机数值序列是确定的, 到一定长度就会出现周期现象, 这与随机数的基本性质是矛盾的。因此, 用数学方法在计算机上不可能产生真正的随机数。为了和真正的随机数区别开来, 通常将这种用数学方法产生的随机数称做伪随机数。但是用数学方法产生的随机数值序列 $\{r_i\}$ 只要符合随机数的各类统计检验, 就可以将它们当作真正的随机数使用。

常用的产生伪随机数的数学方法中, 统计性质较好, 使用较为广泛的是线性同余法, 它包括乘同余法和混合同余法两种。

1949年, 勒墨尔(Lehmer)首次提出用乘同余法产生均匀随机数, 其递推公式为

$$x_{n+1} = \lambda x_n \pmod{M} \quad (5-30)$$

1961年格雷贝格尔(Greenberger)将它推广为

$$x_{n+1} = \lambda x_n + c \pmod{M} \quad (5-31)$$

称为混合同余法。式中乘子 λ 、增量 c 、模 M 和初值 x_0 都是非负整数。

$\pmod{M}$ 表示取模, 即表示除以 M 后取其整数部分, 显然 $0 \leq x_{n+1} < M$ 。取

$$r_{n+1} = x_{n+1}/M$$

作为随机数, 有 $0 \leq r_{n+1} < 1$ 。

可见, 数列 $\{r_i\}$ 完全由常数 λ 、 c 、 M 和初值 x_0 来确定。只要合理选择这些参数, 就可以得到统计性质好的随机数列, 有关内容可参看参考文献[22]。

二、均匀随机数的检验

上面讨论了随机数、随机变量的模拟方法。那么, 用这些方法产生的数值序列, 是否具有符合要求的统计性质? 能否在蒙特卡洛模拟中使用? 下面从统计假设检验出发, 分析它们的统计性质, 我们仅就几个主要的具体检验方法作些介绍, 其他一些检验方法可查阅有关资料。设

$$r_1, r_2, \dots, r_N \quad (5-32)$$

是要进行统计检验的一组随机数。以下分别介绍对这组随机数的独立性检验、均匀性检验和参数检验。

在随机数的经验检验中, 通常应先进行独立性检验, 因为其他许多统计检验方法是以独立性为前提的。

1. 独立性检验

检验独立性的最有效方法之一是计算相邻一定间隔的数之间的相关系数, 然后判断相关程度。因为相关系数为零是两个随机变量相互独立的必要条件, 所以相关系数的大小可以衡量相关程度。

若前后距离为 j 个数的相关系数

$$\bar{\rho}_j = \left[\frac{1}{N-j} \sum_{i=1}^{N-j} r_i r_{j+i} - (\bar{r})^2 \right] / s^2 \quad (5-33)$$

式中 $\bar{r}$ 、 s^2 分别为(5-32)式中的随机数序列的均值和方差。

对充分大的 $N(N-j>50)$ ，统计量 $u = \rho_j \sqrt{N-j}$ 渐近服从标准正态分布。若取显著水平 $\alpha=0.05$ ，则当 $|u| < 1.96$ 时可认为相关系数 ρ_j 与零无显著差别，即认为随机数 r_i 与 r_{i+j} 之间不相关。反之，则认为相关。

2. 均匀性检验

均匀性检验用来检查随机数 $[0,1]$ 区间的数值分布是否均匀，是否符合均匀概率分布。均匀性检验也称为频率检验，一般利用数理统计中的 χ^2 检验法来检验随机数的实际发生次数(频率)和理论频率的差异。

设从总体中选取一个样本 $r_1, r_2, \dots, r_N$ ，将它按一定规则分为互不相交的 K 组，其中落入第 i 组的频数为 n_i 。已知落入第 i 组的理论频数为 $m_i = N/K (i=1, 2, \dots, K)$ ，则检验统计量为

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^K \frac{(n_i - m_i)^2}{m_i}$$

χ^2 的值可以衡量实际频率和理论频率的差异，也就是度量实际随机数分布的均匀程度。当两者完全符合时， $\chi^2=0$ 。

那么， χ^2 的值处于多大范围内才可以认为随机数抽样值符合均匀性检验呢？一般情况下，选定一个显著水平 α ，并根据参数 ν (自由度， $\nu=k-1$)，从 χ^2 表中查出 χ_α^2 的值。如果计算得到的 χ^2 值小于 χ_α^2 ，就认为符合均匀性假设。因为它符合

$$P(\chi^2 < \chi_\alpha^2) = 1 - \alpha \quad (5-34)$$

3. 参数检验

通常采用 u 检验方法，检验随机数的分布参数的观测值和理论值的差异是否显著。

设从总体中选取样本 $r_1, r_2, \dots, r_N$ ，样本均值 $E(r) = \mu$ ，方差 $D(r) = \sigma^2$ ，则 u 检验统计量为

$$u = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i - \mu \right) / \sigma \quad (5-35)$$

显然， u 服从标准正态分布 $N(0,1)$ 。

对于随机数序列 $r_1, r_2, \dots, r_N$ ，随机数的一阶矩、二阶矩和方差的观测值

$$\bar{r} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i, \quad \bar{r}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i^2, \quad s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(r_i - \frac{1}{2} \right)^2 \quad (5-36)$$

根据随机数的理论分布，不难计算

$$\left. \begin{aligned} E(\bar{r}) &= \frac{1}{2}, & D(\bar{r}) &= \frac{1}{12N} \\ E(\bar{r}^2) &= \frac{1}{3}, & D(\bar{r}^2) &= \frac{4}{45N} \\ E(s^2) &= \frac{1}{12}, & D(s^2) &= \frac{1}{180N} \end{aligned} \right\} \quad (5-37)$$

利用(5-35)式，则相应检验统计量分别为

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \sqrt{12N} \left(\bar{r} - \frac{1}{2} \right) \\ u_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{45N} \left(\bar{r}^2 - \frac{1}{3} \right) \\ u_3 &= \sqrt{180N} \left(s^2 - \frac{1}{12} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5-38)$$

它们渐近服从标准正态分布 $N(0,1)$ 。

若取显著水平 α 为 0.05, 则 u 检验拒绝域为 $|u| \geq 1.96$ 。

三、非均匀随机数的产生

在得到 $[0,1]$ 上均匀分布的随机数列 $\{r_i\}$ 之后, 要产生非均匀分布的随机数, 可以利用反变换法、舍选抽样法、复合法、变换法等等。下面仅就具有分布函数 $F(x)$, 密度函数 $f(x)$ 的连续随机数 x 的反变换法作简单介绍, 其他产生非均匀随机数的方法可查阅有关文献。

设需产生分布函数为 $F(x)$ 的连续随机数 x 。若已有 $[0,1]$ 区间均匀随机数 R , 则产生 X 的反变换公式为

$$F(x) = r \quad (5-39)$$

即

$$x = F^{-1}(r) \quad (5-40)$$

式(5-40)的直观意义如图 5-14 所示。若给定 $[0,1]$ 区间均匀随机数 R 的一个数值 r_i , 则 $x_i = F^{-1}(r_i)$ 即为分布函数为 $F(x)$ 的连续随机数 X 的一个数值。从数学上可以证明这一点, 从直观上看也很明显, 因为 r 对应着 x , 而均匀随机数 $R \leq r$ 的概率 $P(R \leq r) = r$, 因此, 连续随机数 $X \leq x$ 的概率 $P(X \leq x) = r = F(x)$, 即 X 的分布函数为 $F(x)$ 。

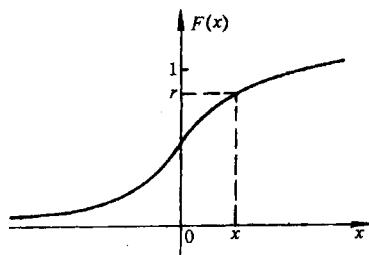


图 5-14 产生随机数的反变换法

应用这一反变换定理, 可以得到各种连续分布的随机变量:

1. 均匀分布随机变量

若已知一随机变量概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

由 $f(x)$ 求得分布函数

$$F(x) = \int_a^x \frac{dx}{b-a} = \frac{x-a}{b-a} = r$$

则

$$x = a + (b-a)r \quad (5-41)$$

2. 正态分布随机变量

已知随机变量 x 以

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right]$$

为密度函数, 称为正态随机变量, 简记为 $x \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ , σ^2 分别表示非标准正态分布随机变量的均值和方差。对于这种非标准的正态分布, 可以通过标准正态分布的随机变量求得, 其

关系式为

$$x = \sigma u + \mu \quad (5-42)$$

式中 u —— $N(0,1)$ 的随机变量, 即标准正态分布的随机变量。

若取两个 $[0,1]$ 上均匀分布随机数 r_1 和 r_2 , 利用二元函数变换得到 (证明略)

$$u_1 = \sqrt{-2 \ln r_1} \cos 2\pi r_2, \quad u_2 = \sqrt{-2 \ln r_1} \sin 2\pi r_2 \quad (5-43)$$

两个相互独立的 $N(0,1)$ 分布随机变量 u 的抽样值。

也可以用概率近似, 产生 $N(0,1)$ 分布的随机变量 u 。根据中心极限定理, 取随机数 $r_1, r_2, \dots, r_N$, 有概率近似抽样

$$u = \sqrt{12N} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i - \frac{1}{2} \right) \quad (5-44)$$

渐近服从 $N(0,1)$ 正态分布。实际应用中常取 N 等于 6 或 12。当 $N=12$ 时, 上式变为

$$u = r_1 + r_2 + \dots + r_{12} - 6 \quad (5-45)$$

以上简要地介绍了随机数的产生和检验方法。概括而言, 蒙特卡洛法是借助于概率化的数学模型和被研究的物理过程的特征计算以复现该过程的方法。它对建立的模型进行多次试验, 并以此为基础对试验数据作统计处理, 决定出被研究过程的特征, 以作为过程参数的统计估计值。根据这些参数的散布量, 能够从概率意义上确定解决问题的近似程度。为了使统计值达到足够的精确程度, 通常需要进行几百次随机采样解的运算, 因而需要较多的机时。

利用计算机对导弹系统运动参数进行统计分析的另一种方法是协方差分析描述函数法 (CADET)。该方法的基本思想是运用描述函数理论先对导弹系统运动方程组进行统计线性化, 然后, 再利用协方差分析对已线性化的系统数学模型导出系统响应的随机状态矢量的均值和协方差的微分方程, 利用这两个矩阵微分方程只需一次求解就能确定导弹系统运动参数的统计性能值, 因而该方法可以大大节省机时, 但是其编程却要比统计试验法复杂得多。该方法对于线性系统而言, 得到的解就是精确解; 对于非线性系统, 由于统计线性化, 得到的是近似解。有关 CADET 方法, 请参看有关文献。

第六章 导弹动态特性的研究方法

§ 6-1 概 述

前几章主要是讨论导弹的弹道学问题。在研究弹道学问题时,通常采用“瞬时平衡”假设,即认为导弹在飞行过程中,任一瞬间绕质心的力矩都处于平衡状态,即合力矩为零。同时假定制导系统的各个环节(包括导弹本身)无惯性,也无时间延滞。也就是说,把导弹看做是一个可控制的质点,即认为导弹由一个平衡的飞行状态转变到另一平衡状态是在瞬间完成的。这样,只要研究作用在质心上的诸力和运动之间关系,就可以求出导弹的飞行弹道,这里并没有涉及控制的过程如何。然而,在实际飞行过程中,导弹绕质心的合力矩不可能经常处于平衡状态,因为控制飞行的最一般方法就是形成和运用控制力和力矩,使导弹绕质心旋转以达到改变运动参数的目的。由于导弹和制导系统的各个环节都是有惯性的,而且制导系统也不可能在理想条件下工作,所以,为了达到新的平衡飞行状态,导弹绕质心的旋转运动不可能在瞬间完成,必须经历某一时间过程,这个过程通常称为“过渡过程”。因此,当考虑制导系统工作过程时,就不能像弹道学中那样把导弹当作质点来处理。另外,在飞行过程中,除了控制作用外,导弹还受到干扰作用,如:风引起的气动力和气动力矩的变化;弹体制造的工艺误差和安装误差以及弹翼安装误差,都会使导弹结构外形偏离理论值,而形成附加的气动力和力矩;发动机推力与额定值不一致,以及推力偏心所引起的附加作用力和力矩;发动机开车或关车瞬间引起的作用力和力矩的突然变化;制导系统的元件有工艺误差和受外界干扰产生起伏误差等,使舵面出现不必要的偏转;自动驾驶仪的陀螺输出特性不对称及零点漂移、舵机的机械间隙及振动等,使得舵面偏转与要求的情况不一致等。由于这些干扰因素的存在,使得导弹在飞行过程中总是绕质心不断地转动,这种转动导致导弹在飞行过程中的弹道参数与按力矩平衡假设的理想条件下求得的结果并不完全相同。

导弹动态特性分析就是将导弹看做质点系来研究其运动情况,不仅考虑作用在质心上的力,还考虑围绕质心的力矩。研究导弹在干扰力和干扰力矩的作用下,能否保持原来的飞行状态;研究在操纵机构作用下,导弹改变飞行状态的能力如何,也就是研究导弹的稳定性和操纵性问题。这些内容直接与导弹设计有关,它将涉及气动外形的选择,结构布局的安排,以及制导系统参数的确定等。因此,这部分知识是导弹总体设计,制导系统设计以及准确度分析的基础。

§ 6-2 作为控制对象的导弹

导弹在飞向目标的过程中,是按照制导规律进行飞行的。通过导引、控制系统使操纵机构(如舵面、摆动发动机、燃气偏转器——摆帽、扰流片等)偏转,产生操纵力和力矩,使导弹姿态发生变化,从而改变作用在导弹上的合力大小和方向,以控制导弹飞行。所以导弹的制导系统是使操纵机构偏转以保证导弹与目标相遇或按预定的弹道飞行的所有装置的综合。

导弹制导系统按其基本功能是由两大部分组成，即导引系统和控制系统。导引系统设备可能全部在弹上，也可能是弹上设备与弹外制导站设备的组合。控制系统也有称为姿态控制系统、角运动控制系统或稳定系统，其设备全部在弹上。图 6-1 所示的制导系统组成的装置只是选择其中的主要部分。需要指出的是这些组成中的个别装置，有时很难确定它是归属导引系统，还是控制系统，或者是两者共有。

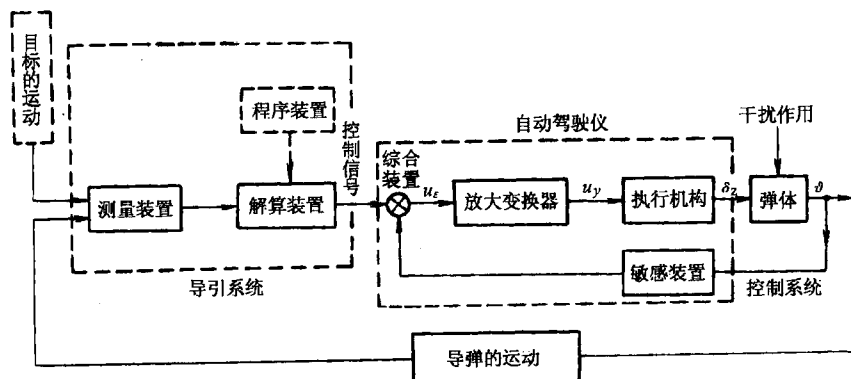


图 6-1 导弹制导系统组成简图

导引系统的功能是：测量导弹和目标的相对位置及其实际的飞行参数；计算导弹沿要求的弹道飞行所需的控制信号并输入控制系统。控制系统的功能是：准确而迅速地执行由导引系统输出的改变导弹弹道的控制信号；同时保证导弹在各种干扰作用下能在要求的弹道上稳定地飞行。这就是说，控制系统既要保证导弹的机动性，又要保证导弹的稳定性。

对于自主式制导（如方案控制、惯性制导和星光制导等）是根据导弹应完成的任务，预先设计了飞行弹道。导弹飞行时，制导系统与目标无直接关系，而是通过程序装置输出预定的飞行参数，并与导弹实际飞行参数相比，如有偏差，就形成控制信号输入控制系统。

导弹制导系统是有反馈的闭合系统。由图 6-1 可见，无论在制导系统中或在控制系统中，导弹弹体都是作为系统中的一个环节，即控制对象。因此，当用自动控制理论对导弹控制系统和制导系统进行分析与设计时，导弹的动态特性也完全可以用自动控制理论中的概念和定义来表示，见表 6-1。

这里，把操纵机构的偏转看做导弹的控制作用，而表示操纵机构位置或状态的量当作输入变量。对导弹的干扰作用，一般是在导弹运动方程中引入干扰力和干扰力矩，或者相应地用改变输入或输出变量加以考虑。例如把干扰力矩 M_{gz} 折算成相应的舵偏角 δ_{gz} ，即

$$\delta_{gz} = M_{gz} / M_z^0 \quad (6-1)$$

导弹的输出变量可以是表征导弹运动参数的任何一个量，例如攻角 α 、俯仰角 ϑ 、弹道倾角角速度 $\dot{\vartheta}$ 、飞行高度 H 、飞行速度 V 等。输出变量的选取由所研究的问题来确定。输出变量随时间的变化取决于两个因素：

- (1) 输入变量的变化，如操纵机构的偏转特性；
- (2) 作为制导系统一个环节的导弹弹体动态特性。

由此可见，设计导弹制导系统时，必须知道导弹弹体的动态特性，而在设计导弹弹体时，也必须考虑到控制系统和制导系统的要求。

表 6-1 导弹的特性用自动控制理论的概念和定义表示

序号	名 称	定 义	例 子	备 注
1	控制作用	为形成控制力和控制力矩必须加于导弹的作用	操纵面偏角	控制作用由运动参数需要值确定
2	干扰作用	使导弹运动参数偏离其需要值的各种干扰因素	风的干扰, 操纵机构随机偏转等	由于干扰的连续作用, 使导弹输出变量的实际值总是偏离其需要值
3	输入变量	同控制作用或干扰作用等效的随时间变化的量	$\delta_x, \delta_y, \delta_z$ 等	
4	输出变量	由于控制作用或干扰作用引起导弹运动参数随时间变化的量	$\vartheta, \alpha, \dot{\theta}, V, y$ 等	
5	传递系数 (放大系数)	稳态时, 输出变量与输入变量的比值		当给定传递函数 $W(s)$, 传递系数 K 按 $K = \lim_{s \rightarrow 0} W(s)$ 确定
6	环节或系统的动态	所研究的输出变量随时间变化的状态		动态时, 环节或系统的特性称为动态特性。通常, 动态方程式为微分方程
7	输出变量的过渡过程	由输入作用(控制作用或干扰作用)引起的输出变量从原稳态值到新稳态值的过程		
8	输出变量的稳态值	稳态时的输出变量值		
9	过渡函数 (时间函数)	当 $R=1$ 和 $C(0)=0$ 时, $C(t)$ 的关系式(R 为输入变量、 C 为输出变量)		
10	稳态(静态)误差	稳态时的控制误差		
11	动态误差	无干扰作用时动态的控制误差值		导弹的惯性是产生动态误差的原因
12	传递函数	当初值为零时, 输出变量的象函数 $C(s)$ 与输入变量的象函数 $R(s)$ 之比		对于一对不同的输出和输入变量, 一般情况下, 将有不同的传递函数
13	幅相频率特性	当 $s=i\omega$ 时传递函数的表达式 $W(s) \xrightarrow{s=i\omega} W(i\omega)$		$W(i\omega)$ 在复平面 P, iQ 上画出
14	幅频特性	$A(\omega) = \frac{A_c}{A_R}$ 与频率 ω 的关系式 (A_c 为输出变量振幅, A_R 为输入变量振幅)		这时, 将复数 $W(i\omega)$ 表示为 $W(i\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$
15	相频特性	$\varphi(\omega)$: 输出振动对输入振动的相移 φ 与频率 ω 的关系式		

导弹飞行时,总是不可避免地要受到各种干扰作用。研究导弹动态特性目的之一,就是要力求排除或者大大减小干扰对导弹飞行的影响。导弹的干扰,如果按作用的时间长短来分,可以分为经常作用干扰和瞬时作用干扰。经常作用干扰如导弹的安装误差、发动机推力偏心,舵面偏离零位等。对于这种干扰,在动态分析时,作为干扰力和干扰力矩来处理。瞬时作用干扰又称偶然或脉冲干扰,它是瞬时作用又瞬时消失,或者短时间作用,很快消失,例如在瞬时作用的阵风、发射时的起始扰动、级间分离、制导系统中偶然出现的短促信号等。这种干扰作用的结果,往往使某些运动参数出现初始偏差,如在瞬时作用的垂直风影响下,使导弹攻角产生初始偏差角 $\Delta\alpha_0$ 。这时,动态分析的目的就是要研究这个初始偏差对导弹运动的影响。

§ 6-3 导弹扰动运动的研究方法

导弹扰动运动是指导弹在控制作用或干扰作用下的运动特性。先介绍未扰动运动和扰动运动、未扰动弹道和扰动弹道的概念。如果导弹结构、外形及参数符合理论值,发动机状态参数、控制系统参数符合额定值,大气状态参数符合标准值,目标特性是确定的等,则按给定的初始条件计算得出的理论弹道称为未扰动弹道或基准弹道,相应的导弹运动称为未扰动运动或基准运动。然而,实际飞行的弹道总是不同于未扰动的理论弹道,这不仅是由于所采用的方程只是近似地描述导弹和制导系统的动力学特性,而且,还由于有一系列随机因素作用在导弹和制导系统,实际的初始条件总是不同于所给定的数值,大气扰流所引起的随机空气动力也作用于导弹上,目标机动飞行也有随机特性等。所有这些因素都不可避免地存在于实际飞行中,并对导弹的运动产生扰动,也就是有附加运动加到未扰动运动上,这时导弹运动称为扰动运动,其对应的弹道称为扰动弹道。

由第二章中知道,描述导弹运动是非线性微分方程组(2-65),因此,要研究导弹的扰动运动,就需要解非线性微分方程组。目前实际应用中有两种不同的工程数学方法:

1. 用数值积分法解导弹扰动运动方程组

如果对导弹扰动运动需要比较精确的计算,或者由于所研究的问题必须用非线性微分方程组来描述,这时,就需要解非线性微分方程组。一般来说,大多数微分方程组的解不可能用初等函数表示,亦即得不出解析解。但是,用数值积分法,可以求出特解。

50年代以前,普遍认为使用数值积分法解微分方程是一种近似方法。因为这种方法需要繁重的计算,因此,只能把导弹运动简化为平面运动,计算的步长也不能取得太小。此外,求解时还必须知道初始条件,所求得解只是在一定初始条件下的特解。因此,由于繁重的计算,只能选择一些典型情况求解。这样,往往得不到一般结论。

随着大容量、高速度的电子计算机的出现,可以精确地算出导弹的扰动弹道以及受控运动的过程。因为电子计算机可以使用较为精确的描述导弹运动的数学模型,计算步长也可以根据精度要求进行选取,还可以选择各种初始条件进行计算。因此,数值积分法在现代计算技术的基础上,已不再是近似方法,而是较为精确的方法,因此,它得到了更加广泛的应用。

由于数值积分法只能是对应于一组确定的初始条件下的特解,因此,研究扰动运动时,较难从方程组解中总结出带规律性的结果,这是数值积分法的一个缺点。

2. 小扰动法

如果对抗动运动方程组加以合理的简化处理,使其能够解析求解而又具有必要的工程精确度,这是很有价值的。因为解析解中包含了各种飞行参数和气动参数,可以直接分析参数对导弹动态特性的影响。常用的方法就是利用小扰动假设将微分方程线性化,通常称为小扰动法。

当研究一个非线性系统在某一稳定平衡点附近的微小扰动运动的状态时,原来的系统可以充分精确地用一个线性系统加以近似。几乎可以肯定地说,只要加以足够精确的分析,任何一个物理系统都是非线性的。我们说某一个实际的物理系统是线性系统,只是说它的某些主要性能可以充分精确地用一个线性系统加以近似而已。而且所谓“充分精确”,是指实际系统与理想化的线性系统的差别,对于所研究的问题,已经小到可以忽略的程度。只有当具体的条件和要求给定以后,才能确定一个实际系统是线性系统还是非线性系统。在这个问题上并不存在绝对的判断准则。例如导弹弹体-自动驾驶仪系统(即姿态控制系统)就是非线性系统,因为不论是导弹运动方程还是自动驾驶仪方程都是非线性的。但是,当研究动态特性时,可以认为这两个方程组是线性的;而如果所研究的是导弹弹体-自动驾驶仪系统的自振问题,则略去自动驾驶仪方程的非线性是不允许的,因为正是由于自动驾驶仪的非线性特性才会发生自振。

如果扰动的影响很小,则扰动弹道很接近未扰动弹道,这样就有了对导弹运动方程组进行线性化的基础。为了对方程组(2-65)进行线性化,所有运动参数都分别写成它们在未扰动运动中的数值与某一偏量之和,即

$$\left. \begin{aligned} V(t) &= V_0(t) + \Delta V(t) \\ \theta(t) &= \theta_0(t) + \Delta\theta(t) \\ \dots\dots\dots \\ \omega_x(t) &= \omega_{x0}(t) + \Delta\omega_x(t) \\ \dots\dots\dots \\ z(t) &= z_0(t) + \Delta z(t) \end{aligned} \right\} \quad (6-2)$$

式中脚注“0”表示未扰动运动中的运动学参数的数值; $\Delta V(t)$ 、 $\Delta\theta(t)$ 、 $\dots$ 、 $\Delta z(t)$ 表示扰动运动参数对未扰动运动参数的偏差值,称之为运动学参数的偏量。

如果未扰动弹道的运动学参数已经根据弹道学中的方法求得,则只要求出偏量值,扰动弹道上的运动参数也就可以确定了。因此,研究导弹的扰动运动就可以归结为研究运动学参数的偏量变化。这样的研究方法可以得到一般性的结论,因此获得了广泛的应用。导弹弹体动态特性分析这部分内容就是建立在小扰动法的基础上的。

如果导弹制导系统的工作精度较高,实际飞行弹道总是与未扰动弹道相当接近,实际的运动参数也是在未扰动弹道上的运动参数附近变化,那么,实践证明,在许多情况下,导弹运动方程组可以用线性化方程组来近似。如果扰动弹道和未扰动弹道差别很大,用小扰动法研究稳定性就会有较大的误差,用于研究扰动弹道误差就更大了,在这种情况下,就不能应用此法。

对于导弹制导系统的设计和分析,从控制理论的应用上也有两种不同的方法,即经典控制理论和现代控制理论。

经典控制理论是以单输入-单输出的常参量系统作为主要研究对象。它的研究方法以传递

函数作为系统基本数学描述，以根轨迹法和频率响应法作为分析和设计系统的两类方法。它的基本内容是研究系统的稳定性及在给定输入下系统的分析或在给定指标下系统的设计。这样，导弹作为制导系统的一个环节，即控制对象，其特性完全可由经典控制理论的概念和定义表示，如输入量、输出量、传递函数、稳定性、过渡过程品质指标等。

60年代由于探索空间需要和电子计算机的飞速发展逐渐形成现代化控制理论。它的研究对象既可以是线性的，也可以是非线性的，既可以是常参量的，也可以是变参量的。它的研究方法本质上是时间域的方法（经典控制理论是频域的），是建立在对系统状态变量的描述，即所谓状态空间法，是直接求解微分方程组的一种方法。利用它来设计和分析系统时，可以揭示系统内在的规律，实现系统在一定条件下的最优控制。

现代控制理论在解决大型复杂的控制问题时，具有许多突出的优点，目前在导弹制导系统分析和设计中也得到愈来愈多的应用，但是它不能够完全取代经典控制理论，在工程的实际应用中，两者各有所长，应互为补充。

本书主要是应用经典控制理论进行导弹动态分析。

§ 6-4 导弹运动方程组的线性化

下面讨论如何将第二章中已经得到的导弹运动方程组(2-65)进行线性化。

$$\left. \begin{aligned}
 m \frac{dV}{dt} &= P \cos \alpha \cos \beta - X - G \sin \theta \\
 mV \frac{d\theta}{dt} &= P(\sin \alpha \cos \gamma_v + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_v) + Y \cos \gamma_v - Z \sin \gamma_v - G \cos \theta \\
 -mV \cos \theta \frac{d\phi_v}{dt} &= P(\sin \alpha \sin \gamma_v - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma_v) + Y \sin \gamma_v + Z \cos \gamma_v \\
 J_x \frac{d\omega_x}{dt} &= M_x - (J_z - J_y)\omega_y \omega_z \\
 J_y \frac{d\omega_y}{dt} &= M_y - (J_x - J_z)\omega_x \omega_z \\
 J_z \frac{d\omega_z}{dt} &= M_z - (J_y - J_x)\omega_x \omega_y \\
 \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma \\
 \frac{d\psi}{dt} &= \frac{1}{\cos \vartheta}(\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) \\
 \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_z - \tan \vartheta(\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) \\
 \frac{dx}{dt} &= V \cos \theta \cos \phi_v \\
 \frac{dy}{dt} &= V \sin \theta \\
 \frac{dz}{dt} &= -V \cos \theta \sin \phi_v
 \end{aligned} \right\} \quad (6-3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= -m_c \\ \sin\beta &= \cos\theta[\cos\gamma\sin(\psi - \psi_v) + \sin\vartheta\sin\gamma\cos(\psi - \psi_v)] - \sin\theta\cos\vartheta\sin\gamma \\ \sin\alpha &= \{\cos\theta[\sin\vartheta\cos\gamma\cos(\psi - \psi_v) - \sin\gamma\sin(\psi - \psi_v)] - \\ &\quad \sin\theta\cos\vartheta\cos\gamma\}/\cos\beta \\ \sin\gamma_v &= [\cos\alpha\sin\beta\sin\vartheta - (\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma)\cos\vartheta]/\cos\theta \end{aligned} \right\} (6-3) \text{ 续}$$

在这组方程中，没有列入制导系统的方程，因为，当分析弹体的动态特性时，假定舵面偏角为已知值。

一、微分方程组线性化的方法

通过下面的方程组来研究导弹运动微分方程组的线性化方法

$$f_1 \frac{dx_1}{dt} = F_1, \quad f_2 \frac{dx_2}{dt} = F_2, \quad \dots, \quad f_i \frac{dx_i}{dt} = F_i, \quad \dots, \quad f_n \frac{dx_n}{dt} = F_n \quad (6-4)$$

式中 f_i 和 F_i 是变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的非线性函数

$$f_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad F_i = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

方程组(6-4)的特解之一

$$x_1 = x_{10}(t), \quad x_2 = x_{20}(t), \quad \dots, \quad x_n = x_{n0}(t)$$

是对应于一个未扰动运动。如果将该特解代入方程(6-4)，则得到等式

$$f_{i0} \frac{dx_{i0}}{dt} = F_{i0}, \quad \dots, \quad f_{i0} \frac{dx_{i0}}{dt} = F_{i0}, \quad \dots, \quad f_{n0} \frac{dx_{n0}}{dt} = F_{n0}$$

式中 $f_{i0} = f_i(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}), \quad F_{i0} = F_i(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

现在讨论方程(6-4)中某一个方程的线性化方法，例如，取第 i 个方程，为了书写简单，将脚注“ i ”去掉，则

$$f \frac{dx}{dt} = F$$

从这个方程中减去相应于未扰动运动的第 i 个等式，则得到偏量形式的运动方程

$$f \frac{dx}{dt} - f_0 \frac{dx_0}{dt} = F - F_0 \quad (6-5)$$

式中 $F - F_0 = \Delta F$ 为函数 F 的偏量，即在未扰动弹道与扰动弹道上此函数的差值。

方程(6-5)式的左端为函数 $f \frac{dx}{dt}$ 类似的偏量。现在计算这一偏量。为此，加上并减去 $f \frac{dx_0}{dt}$ 得

$$f \frac{dx}{dt} - f_0 \frac{dx_0}{dt} + f \frac{dx_0}{dt} - f \frac{dx_0}{dt} = (f_0 + \Delta f) \frac{d\Delta x}{dt} + \Delta f \frac{dx_0}{dt} \quad (6-6)$$

式中 Δx 及 Δf 表示偏量，即

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta f = f - f_0$$

现在求函数 $F(x_1, \dots, x_n)$ 的偏量。根据台劳公式将变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的非线性函数展成增量 $\Delta x_1 = x_1 - x_{10}, \dots, \Delta x_n = x_n - x_{n0}$ 的幂级数。将函数展成级数是在变量数值为 $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ 附近邻域中进行的。如果只限于选取展开式的第一项，则得到

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)_0 \Delta x_2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n} \right)_0 \Delta x_n + R_2$$

式中 R_2 ——展开式中含有二阶或更高阶小量的余项；

$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0, \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_0, \dots, \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)_0$ ——相应于未扰动弹道的偏导数 $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}$ 之值。

函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的增量为

$$\begin{aligned}\Delta F &= F(x_1, x_2, \dots, x_n) - F(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_0 \Delta x_2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)_0 \Delta x_n + R_2\end{aligned}\quad (6-7)$$

偏量 Δf 也有类似的表达式

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0 \Delta x_2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0 \Delta x_n + r_2\quad (6-8)$$

从表达式(6-6)、(6-7)和(6-8)中略去高于一阶的小量 $\Delta f \frac{d\Delta x}{dt}$ 、 R_2 及 r_2 ，并代入方程(6-5)中，则得到未知数为偏量 $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ 的扰动运动方程

$$\begin{aligned}f_0 \frac{d\Delta x}{dt} + \frac{dx_0}{dt} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 \Delta x_1 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0 \Delta x_n \right] \\ = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0 \Delta x_1 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)_0 \Delta x_n\end{aligned}$$

对方程组(6-4)中每个方程都进行这样的变换后，就得到扰动运动方程组

$$\begin{aligned}f_{i0} \frac{d\Delta x_i}{dt} &= \left[\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right)_0 - \frac{dx_{i0}}{dt} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)_0 \right] \Delta x_1 + \dots + \\ &+ \left[\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_n}\right)_0 - \frac{dx_{i0}}{dt} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_n}\right)_0 \right] \Delta x_n \quad (i = 1, \dots, n)\end{aligned}\quad (6-9)$$

该方程组为线性微分方程组，因为包含在方程中的新变量（增量 $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ ）只是一阶的，并且没有这些变量的乘积。

因为假定未扰动运动是已知的，则在方程组(6-9)中方括号内的各项以及所有的 f_{i0} 都是时间 t 的已知函数。方程组(6-9)通常称为扰动运动方程组。

当对形式如(6-4)的非线性微分方程组进行线性化时，利用(6-9)式是很方便的。不难看出，导弹运动方程组(6-3)就具有这种形式。

二、空气动力和力矩表达式的线性化

由于导弹运动方程组中包含有作用在导弹上的力和力矩，因此，在进行导弹运动方程组线性化以前，先要对这些力和力矩进行线性化。为此，必须了解这些力和力矩与哪些因素有关，其中哪些因素的影响又可以忽略。

由导弹空气动力学中知道，对于 Ox_1y_1 面具有对称性的导弹，影响气动力和气动力矩的主要参数是： $V, H, \alpha, \beta, \omega_x, \omega_y, \omega_z, \delta_x, \delta_y, \delta_z, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\delta}_y, \dot{\delta}_z$ ，即

$$\left. \begin{aligned}X(V, H, \alpha, \beta, \delta_x, \delta_y) \\ Y(V, H, \alpha, \delta_z) \\ Z(V, H, \beta, \delta_y) \\ M_x(V, H, \alpha, \beta, \delta_x, \delta_y, \delta_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z) \\ M_y(V, H, \beta, \delta_y, \omega_x, \omega_y, \dot{\beta}, \dot{\delta}_y) \\ M_z(V, H, \alpha, \delta_z, \omega_x, \omega_z, \dot{\alpha}, \dot{\delta}_z)\end{aligned} \right\} \quad (6-10)$$

若是气动轴对称型且具有倾斜稳定的导弹，忽略其中次要因素，则(6-10)式可以写为

$$\left. \begin{aligned} X(V, H, \alpha, \beta) \\ Y(V, H, \alpha, \delta_z) \\ Z(V, H, \beta, \delta_y) \\ M_x(V, H, \omega_x, \delta_x) \\ M_y(V, H, \beta, \omega_y, \delta_y, \dot{\beta}) \\ M_z(V, H, \alpha, \omega_z, \delta_z, \dot{\alpha}) \end{aligned} \right\} \quad (6-11)$$

对于影响气动力和气动力矩的某些参数能否忽略或者能否进一步简化要取决于具体导弹的气动外形和运动状态。例如，对于绕纵轴滚转的导弹，由于气动交连而产生的马格努斯力矩就不能忽略。这时就必须考虑攻角 α 和滚转角速度 ω_x 对偏航力矩 M_y 的影响及侧滑角 β 和滚转角速度 ω_x 对俯仰力矩 M_z 的影响。

对于面对称导弹，在实际飞行攻角和侧滑角范围内，忽略次要因素，则气动力和气动力矩可以近似表示成下列形式

$$\left. \begin{aligned} X &= X_0 + X^{\alpha^2} \alpha^2 + X^{\beta^2} \beta^2 \\ Y &= Y_0 + Y^{\alpha} \alpha + Y^{\delta_z} \delta_z \\ Z &= Z^{\beta} \beta + Z^{\delta_y} \delta_y \\ M_x &= M_{x0} + M_x^{\beta} \beta + M_x^{\omega_x} \omega_x + M_x^{\omega_y} \omega_y + M_x^{\delta_x} \delta_x + M_x^{\delta_y} \delta_y \\ M_y &= M_y^{\beta} \beta + M_y^{\omega_x} \omega_x + M_y^{\omega_y} \omega_y + M_y^{\dot{\beta}} \dot{\beta} + M_y^{\delta_y} \delta_y \\ M_z &= M_{z0} + M_z^{\alpha} \alpha + M_z^{\omega_x} \omega_x + M_z^{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + M_z^{\delta_z} \delta_z \end{aligned} \right\} \quad (6-12)$$

对于气动轴对称且具有倾斜稳定的导弹，忽略次要因素，气动力和气动力矩可以近似表示成下列形式

$$\left. \begin{aligned} X &= X_0 + X^{\alpha^2} \alpha^2 + X^{\beta^2} \beta^2 \\ Y &= Y^{\alpha} \alpha + Y^{\delta_z} \delta_z \\ Z &= Z^{\beta} \beta + Z^{\delta_y} \delta_y \\ M_x &= M_{x0} + M_x^{\omega_x} \omega_x + M_x^{\delta_x} \delta_x \\ M_y &= M_y^{\beta} \beta + M_y^{\omega_y} \omega_y + M_y^{\dot{\beta}} \dot{\beta} + M_y^{\delta_y} \delta_y \\ M_z &= M_z^{\alpha} \alpha + M_z^{\omega_x} \omega_x + M_z^{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + M_z^{\delta_z} \delta_z \end{aligned} \right\} \quad (6-13)$$

对于绕纵轴滚转导弹 $M_y^{\omega_x}$ 、 $M_z^{\omega_x}$ 具有一定数值，上式中第五、六式应写成

$$\left. \begin{aligned} M_y &= M_y^{\beta} \beta + M_y^{\omega_x} \omega_x + M_y^{\omega_y} \omega_y + M_y^{\dot{\beta}} \dot{\beta} + M_y^{\delta_y} \delta_y \\ M_z &= M_z^{\alpha} \alpha + M_z^{\omega_x} \omega_x + M_z^{\omega_y} \omega_y + M_z^{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + M_z^{\delta_z} \delta_z \end{aligned} \right\} \quad (6-14)$$

式中 X_0 —— $\alpha=\beta=0$ 时的阻力；

M_{x0} —— $\omega_x=\delta_x=0$ 时的滚转力矩值；

Y^{α} ， $\dots$ ， Z^{δ_y} ， $\dots$ ， $M_y^{\dot{\beta}}$ ——气动力和力矩对于参数 α ， $\dots$ ， δ_y ， $\dots$ ， $\dot{\beta}$ 的偏导数；

$M_y^{\omega_x}$ ， $M_z^{\omega_x}$ ——马格努斯力矩；

X^{α^2} 、 X^{β^2} ——迎面阻力对 α^2 、 β^2 的偏导数。

上述所有导数值都是参数 α 、 β 、 δ_x 、 δ_y 、 δ_z 、 ω_x 、 ω_y 、 ω_z 、 $\dot{\alpha}$ 及 $\dot{\beta}$ 取零时的值，对于给定的导弹，偏

导数 $X^{a^2}, \dots, Y^a, \dots, M_{y^x}^{\omega}, \dots, M_z^a$ 都是飞行高度 H 和速度 V 的非线性函数,例如

$$Y^a = c_y^a \frac{\rho V^2}{2} S$$

式中 $c_y^a = c_y^a \left(\frac{V}{C} \right)$, $C = C(H)$ 及 $\rho = \rho(H)$ 。

现在求空气动力和力矩增量,这些增量是对应于扰动飞行与未扰动飞行之间气动力和力矩的差值。这里将不考虑在扰动运动中高度增量 ΔH 对空气动力和力矩增量的影响(因为它很小)。下面的推导都是针对气动面对称型的导弹。

根据式(6-7)及(6-12)得到迎面阻力、升力、侧力和空气动力矩的偏量

$$\Delta X = \left(\frac{\partial X}{\partial V} \right)_0 \Delta V + \left(\frac{\partial X}{\partial \alpha} \right)_0 \Delta \alpha + \left(\frac{\partial X}{\partial \beta} \right)_0 \Delta \beta \quad (6-15)$$

$$\Delta Y = \left(\frac{\partial Y}{\partial V} \right)_0 \Delta V + (Y^a)_0 \Delta \alpha + (Y^{\delta_z})_0 \Delta \delta_z \quad (6-16)$$

$$\Delta Z = \left(\frac{\partial Z}{\partial V} \right)_0 \Delta V + (Z^\beta)_0 \Delta \beta + (Z^{\delta_y})_0 \Delta \delta_y \quad (6-17)$$

$$\Delta M_x = \left(\frac{\partial M_x}{\partial V} \right)_0 \Delta V + (M_x^\beta)_0 \Delta \beta + (M_{x^x}^{\omega})_0 \Delta \omega_x + (M_{x^y}^{\omega})_0 \Delta \omega_y + (M_{x^z}^{\delta_x})_0 \Delta \delta_x + (M_{x^y}^{\delta_y})_0 \Delta \delta_y \quad (6-18)$$

$$\Delta M_y = \left(\frac{\partial M_y}{\partial V} \right)_0 \Delta V + (M_y^\beta)_0 \Delta \beta + (M_{y^y}^{\omega})_0 \Delta \omega_y + (M_{y^x}^{\omega})_0 \Delta \omega_x + (M_{y^z}^{\delta_y})_0 \Delta \delta_y + (M_{y^x}^{\delta_x})_0 \Delta \delta_x \quad (6-19)$$

$$\Delta M_z = \left(\frac{\partial M_z}{\partial V} \right)_0 \Delta V + (M_z^a)_0 \Delta \alpha + (M_{z^z}^{\omega})_0 \Delta \omega_z + (M_z^{\dot{\alpha}})_0 \Delta \dot{\alpha} + (M_{z^z}^{\delta_z})_0 \Delta \delta_z \quad (6-20)$$

偏导数 $\left(\frac{\partial X}{\partial V} \right)_0, \left(\frac{\partial X}{\partial \alpha} \right)_0, \dots, \left(\frac{\partial M_z}{\partial V} \right)_0$ 的数值都是由未扰动运动参数确定。利用式(6-12),这些偏导数表达式可写为

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial X}{\partial V} \right)_0 &= \left(\frac{\partial X_0}{\partial V} \right)_0 + \left(\frac{\partial X^{a^2}}{\partial V} \right)_0 \alpha_0^2 + \left(\frac{\partial X^{\beta^2}}{\partial V} \right)_0 \beta_0^2 \\ \left(\frac{\partial X}{\partial \alpha} \right)_0 &= 2(X^{a^2})_0 \alpha_0 \\ \left(\frac{\partial X}{\partial \beta} \right)_0 &= 2(X^{\beta^2})_0 \beta_0 \end{aligned} \right\} \quad (6-21)$$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial V} \right)_0 = \left(\frac{\partial Y_0}{\partial V} \right)_0 + \left(\frac{\partial Y^a}{\partial V} \right)_0 \alpha_0 + \left(\frac{\partial Y^{\delta_z}}{\partial V} \right)_0 \delta_{z0} \quad (6-22)$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial V} \right)_0 = \left(\frac{\partial Z^\beta}{\partial V} \right)_0 \beta_0 + \left(\frac{\partial Z^{\delta_y}}{\partial V} \right)_0 \delta_{y0} \quad (6-23)$$

$$\left(\frac{\partial M_x}{\partial V} \right)_0 = \left(\frac{\partial M_{x0}}{\partial V} \right)_0 + \left(\frac{\partial M_x^\beta}{\partial V} \right)_0 \beta_0 + \left(\frac{\partial M_{x^x}^{\omega}}{\partial V} \right)_0 \omega_{x0} + \left(\frac{\partial M_{x^y}^{\omega}}{\partial V} \right)_0 \omega_{y0} + \left(\frac{\partial M_{x^z}^{\delta_x}}{\partial V} \right)_0 \delta_{x0} + \left(\frac{\partial M_{x^y}^{\delta_y}}{\partial V} \right)_0 \delta_{y0} \quad (6-24)$$

$$\left(\frac{\partial M_y}{\partial V} \right)_0 = \left(\frac{\partial M_y^\beta}{\partial V} \right)_0 \beta_0 + \left(\frac{\partial M_{y^y}^{\omega}}{\partial V} \right)_0 \omega_{y0} + \left(\frac{\partial M_y^{\dot{\beta}}}{\partial V} \right)_0 \dot{\beta}_0 + \left(\frac{\partial M_{y^x}^{\omega}}{\partial V} \right)_0 \omega_{x0} + \left(\frac{\partial M_{y^z}^{\delta_y}}{\partial V} \right)_0 \delta_{y0} \quad (6-25)$$

$$\left(\frac{\partial M_z}{\partial V} \right)_0 = \left(\frac{\partial M_{z0}}{\partial V} \right)_0 + \left(\frac{\partial M_z^a}{\partial V} \right)_0 \alpha_0 + \left(\frac{\partial M_{z^z}^{\omega}}{\partial V} \right)_0 \omega_{z0} + \left(\frac{\partial M_z^{\dot{\alpha}}}{\partial V} \right)_0 \dot{\alpha}_0 + \left(\frac{\partial M_{z^z}^{\delta_z}}{\partial V} \right)_0 \delta_{z0} \quad (6-26)$$

式(6-21)~(6-26)的导数表达式在下面线性化以后的运动方程简化时要用到,但是在进行计算时不一定非按此式。具体计算这些导数,例如 $\left(\frac{\partial X}{\partial V}\right)_0$,常用的是

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial X}{\partial V}\right)_0 &= \left(\frac{\partial}{\partial V} c_x \frac{1}{2} \rho V^2 S\right)_0 \\ &= \left(c_{x0} \rho V S + \frac{\partial c_x}{\partial Ma} \frac{\partial Ma}{\partial V} \frac{\rho V^2 S}{2}\right)_0 \\ &= X_0 \left(\frac{2}{V} + \frac{1}{C} \frac{1}{c_x} \frac{\partial c_x}{\partial Ma}\right)_0 \\ \text{同理} \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial V}\right)_0 &= Y_0 \left(\frac{2}{V} + \frac{1}{C} \frac{1}{c_y} \frac{\partial c_y}{\partial Ma}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial Z}{\partial V}\right)_0 &= Z_0 \left(\frac{2}{V} + \frac{1}{C} \frac{1}{c_z} \frac{\partial c_z}{\partial Ma}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial M_x}{\partial V}\right)_0 &= M_{x0} \left(\frac{2}{V} + \frac{1}{C} \frac{1}{m_x} \frac{\partial m_x}{\partial Ma}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial M_y}{\partial V}\right)_0 &= M_{y0} \left(\frac{2}{V} + \frac{1}{C} \frac{1}{m_y} \frac{\partial m_y}{\partial Ma}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial M_z}{\partial V}\right)_0 &= M_{z0} \left(\frac{2}{V} + \frac{1}{C} \frac{1}{m_z} \frac{\partial m_z}{\partial Ma}\right)_0 \end{aligned} \right\} \quad (6-27)$$

除了对空气动力和力矩表达式进行线性化外,还要对发动机推力表达式进行线性化。空气喷气发动机的推力是飞行高度和速度的函数,即

$$P = P(H \cdot V)$$

而固体火箭发动机的推力大小与飞行速度及导弹其他运动参数无关,仅与飞行高度有关,因此对发动机推力不难进行线性化。对于贴近地面飞行的反坦克导弹,可以不必考虑飞行高度变化对推力的影响。

三、运动方程组的线性化

设未扰动运动为空间非定态飞行,其运动参数为 $V_0(t)$ 、 $\theta_0(t)$ 、 ψ_{V0} 、 $\alpha_0(t)$ 、 $\beta_0(t)$ 、 $\dots$ 、 ω_{x0} 、 $\dots$ 、 $z_0(t)$ 。导弹运动方程线性化的基本假设是小扰动,即假定扰动运动参数与在同一时间内的未扰动运动参数值间的差值相当小。同时,为了使线性化以后的扰动运动方程比较简单,对未扰动运动作如下假设:

(1) 未扰动运动中侧向运动学参数 ψ_{V0} 、 ψ_0 、 β_0 、 γ_{V0} 、 γ_0 、 ω_{x0} 、 ω_{y0} 和侧向操纵机构偏转角 δ_{y0} 、 δ_{x0} ,以及纵向参数对时间的导数 $\dot{\omega}_{x0} \approx \dot{\beta}_0$ 、 $\dot{\alpha}_0$ 、 $\dot{\delta}_{x0}$ 、 $\dot{\theta}_0$ 均很小,因此可以略去它们之间的乘积以及这些参数与其他小量的乘积。还假定在未扰动飞行中,偏导数 $X^\beta = \left(\frac{\partial X}{\partial \beta}\right)_0$ 为一小量。

(2) 不考虑导弹的结构参数偏量 Δm 、 ΔJ_x 、 ΔJ_y 、 ΔJ_z ,大气压强偏差 Δp 、大气密度的偏量 $\Delta \rho$ 和坐标的偏量 Δy 对扰动运动的影响,因为在扰动运动过程中,这些影响是很小的。这样,参数 m 、 J_x 、 J_y 、 p 、 ρ 、 y 在扰动运动中与未扰动运动中的数值一样,也是时间的已知函数。

根据上述假设,利用微分方程线性化的方法和气动力与力矩线性化的结果,就可以对运

动方程组(6-3)进行线性化:

第一个方程为

$$m \frac{dV}{dt} = P \cos \alpha \cos \beta - X - G \sin \theta$$

式中变化的参量有 V 、 α 、 β 和 θ 。与方程组(6-4)相比较, m 相当于 f_i , V 相当于 x_i , 而 $P \cos \alpha \cos \beta - X - G \sin \theta$ 相当于 F_i 。根据公式(6-9)并利用公式(6-12), 则得到

$$m_0 \frac{d\Delta V}{dt} = \left[\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_0 \cos \alpha_0 \cos \beta_0 - \left(\frac{\partial X}{\partial V} \right)_0 \right] \Delta V + \left[-P_0 \sin \alpha_0 \cos \beta_0 - \left(\frac{\partial X}{\partial \alpha} \right)_0 \right] \Delta \alpha + \left[-P_0 \cos \alpha_0 \sin \beta_0 - \left(\frac{\partial X}{\partial \beta} \right)_0 \right] \Delta \beta + [-G \cos \theta_0] \Delta \theta \quad (6-28)$$

式中的导数值 $\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_0$ 、 $\left(\frac{\partial X}{\partial V} \right)_0$ 、 $\left(\frac{\partial X}{\partial \alpha} \right)_0$ 、 $\left(\frac{\partial X}{\partial \beta} \right)_0$ 是对应于未扰动运动的数值。利用偏导数的简略表示法, 并略掉脚注“0”, 则

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_0 = P^V, \quad \left(\frac{\partial X}{\partial V} \right)_0 = X^V, \quad \left(\frac{\partial X}{\partial \alpha} \right)_0 = X^\alpha, \quad \left(\frac{\partial X}{\partial \beta} \right)_0 = X^\beta$$

这样, 方程(6-28)可写成下面形式

$$m \frac{d\Delta V}{dt} = (P^V \cos \alpha \cos \beta - X^V) \Delta V + (-P \sin \alpha \cos \beta - X^\alpha) \Delta \alpha + (-P \cos \alpha \sin \beta - X^\beta) \Delta \beta + (-G \cos \theta) \Delta \theta \quad (6-29)$$

因已假设侧向参数是小量, 因此, 在式(6-29)中

$$P \cos \alpha \sin \beta \Delta \beta \approx P \cos \alpha (\beta \Delta \beta)$$

$$X^\beta \Delta \beta = 2X^{\beta^2} (\beta \Delta \beta)$$

以上两式都包含着小量的乘积。若去掉式(6-29)中二阶小量各项, 并且角度的正弦和余弦用近似式表示, 即

$$\sin \alpha \approx \alpha, \quad \sin \beta \approx \beta, \quad \cos \alpha \approx \cos \beta \approx 1$$

则最后得到

$$m \frac{d\Delta V}{dt} = (P^V - X^V) \Delta V + (-P \alpha - X^\alpha) \Delta \alpha + (-G \cos \theta) \Delta \theta \quad (6-30)$$

式(6-30)的物理意义是: 右边第一项是由于速度偏量 ΔV (同一时刻扰动运动速度相对未扰动运动速度的偏量) 引起的 Ox_2 方向力的偏量; 第二项是由于攻角偏量 $\Delta \alpha$ 引起的 Ox_2 方向力的偏量; 第三项是由于弹道倾角偏量 $\Delta \theta$ 引起的 Ox_2 方向力的偏量; 由其他参数的偏量引起的 Ox_2 方向力的偏量很小而被忽略。右边 $d\Delta V/dt$ 在同一时刻 t 可表示为 $d\Delta V/dt = \Delta(dV/dt)$, 表示由于 Ox_2 方向力的偏量引起的加速度偏量。

第二个方程为

$$mV \frac{d\theta}{dt} = P(\sin \alpha \cos \gamma_V + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_V) + Y \cos \gamma_V - Z \sin \gamma_V - G \cos \theta$$

式中参变量有 V 、 α 、 β 、 γ_V 、 θ 、 δ_x 和 δ_y , 仍然与方程组(6-4)比较, mV 相当于 f_i , θ 相当于 x_i , $P(\sin \alpha \cos \gamma_V + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_V) + Y \cos \gamma_V - Z \sin \gamma_V - G \cos \theta$ 相当于 F_i , 根据公式(6-9), 则得到

$$mV \frac{d\Delta \theta}{dt} = \left[P^V(\sin \alpha \cos \gamma_V + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_V) + Y^V \cos \gamma_V - Z^V \sin \gamma_V - m \frac{d\theta}{dt} \right] \Delta V +$$

$$\begin{aligned}
& [P(\cos\alpha\cos\gamma_V - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma_V) + Y^a\cos\gamma_V]\Delta\alpha + \\
& [P(\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma_V - Z^\beta\sin\gamma_V)]\Delta\beta + [G\sin\theta]\Delta\theta + \\
& [P(-\sin\alpha\sin\gamma_V + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma_V) - Y\sin\gamma_V - Z\cos\gamma_V]\Delta\gamma_V + \\
& [Y^\delta\cos\gamma_V]\Delta\delta_z - [Z^\delta\sin\gamma_V]\Delta\delta_y
\end{aligned}$$

根据假设, 导数 $d\theta/dt$ 是小量, $m(d\theta/dt)\Delta V$ 是二阶小量, $Z\cos\gamma_V\Delta\gamma_V$ 也是二阶小量(因为 $Z\Delta\gamma_V = Z^\beta(\beta\Delta\gamma_V) + Z^\delta(\delta_y\Delta\gamma_V)$)。此外, 所有包含 $\sin\gamma_V$ 或 $\sin\beta$ 的各项, 例如 $\sin\gamma_V\Delta\delta_y$, $\sin\beta\Delta\gamma_V$ 都是高于一阶的小量。并认为 $\cos\gamma_V \approx 1$, 则最后得到

$$mV \frac{d\theta}{dt} = (P^V\alpha + Y^V)\Delta V + (P + Y^a)\Delta\alpha + (G\sin\theta)\Delta\theta + Y^\delta\Delta\delta_z \quad (6-31)$$

第三个方程为

$$-mV\cos\theta \frac{d\psi_V}{dt} = P(\sin\alpha\sin\gamma_V - \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma_V) + Y\sin\gamma_V + Z\cos\gamma_V$$

经过线性化后具有下列形式

$$-mV\cos\theta \frac{d\Delta\psi_V}{dt} = (-P + Z^\beta)\Delta\beta + (P\alpha + Y)\Delta\gamma_V + Z^\delta\Delta\delta_y \quad (6-32)$$

式中, 去掉了包括小量乘积的各项, 即 $(d\psi_V/dt)\Delta V$ 、 $(d\psi_V/dt)\Delta\theta$ 、 $\beta\Delta V$ 、 $\delta_y\Delta V$ 以及包含 $\sin\beta$ 或 $\sin\gamma_V$ 的二阶小量。

第四个方程为

$$J_x \frac{d\omega_x}{dt} = M_x - (J_z - J_y)\omega_y\omega_z$$

式中变化的参量有 V 、 ω_x 、 ω_y 、 ω_z 、 δ_x 、 β 和 δ_y , 比较方程组(6-4), J_x 相当于 f_i , ω_x 相当于 x_i , 而 $M_x - (J_z - J_y)\omega_y\omega_z$ 相当于 F_i 。根据公式(6-9)进行线性化, 并利用式(6-18)则得到

$$\begin{aligned}
J_x \frac{d\Delta\omega_x}{dt} = & M_x^V\Delta V + M_x^\beta\Delta\beta + M_x^{\omega_x}\Delta\omega_x + [M_x^{\omega_y} - (J_z - J_y)\omega_z]\Delta\omega_y + \\
& [- (J_z - J_y)\omega_y]\Delta\omega_z + M_x^{\delta_x}\Delta\delta_x + M_x^{\delta_y}\Delta\delta_y
\end{aligned}$$

利用式(6-24)并略去包含 $\beta\Delta V$ 、 $\omega_x\Delta V$ 、 $\omega_y\Delta V$ 、 $\delta_x\Delta V$ 、 $\delta_y\Delta V$ 、 $\omega_z\Delta\omega_y$ 、 $\omega_y\Delta\omega_z$ 小量的各项, 此外, 认为 $(\partial M_{x0}/\partial V)_0$ 也是小量, 于是得到

$$J_x \frac{d\Delta\omega_x}{dt} = M_x^\beta\Delta\beta + M_x^{\omega_x}\Delta\omega_x + M_x^{\omega_y}\Delta\omega_y + M_x^{\delta_x}\Delta\delta_x + M_x^{\delta_y}\Delta\delta_y \quad (6-33)$$

第五个方程为

$$J_y \frac{d\omega_y}{dt} = M_y - (J_x - J_z)\omega_x\omega_z$$

经过线性化后, 利用公式(6-25)式并略去 $M_y^V\Delta V$ 中包含有小量参数 β_0 、 ω_{x0} 、 ω_{y0} 、 $\dot{\beta}_0$ 、 $\dot{\delta}_{y0}$ 与小偏量 ΔV 乘积的各项和 $\omega_z\Delta\omega_x$ 、 $\omega_x\Delta\omega_z$ 项, 于是得到

$$J_y \frac{d\Delta\omega_y}{dt} = M_y^\beta\Delta\beta + M_y^{\omega_y}\Delta\omega_y + M_y^{\dot{\beta}}\dot{\beta} + M_y^{\delta_y}\Delta\delta_y + M_y^{\omega_x}\Delta\omega_x \quad (6-34)$$

第六个方程为

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z - (J_y - J_x)\omega_x\omega_y$$

经过线性化后, 利用公式(6-26)式并略去 $M_z^V\Delta V$ 式中 $\omega_{z0}\Delta V$ 、 $\dot{\alpha}_0\Delta V$ 项和 $\omega_x\Delta\omega_y$ 、 $\omega_y\Delta\omega_x$ 项, 于是得到

$$J_z \frac{d\Delta\omega_z}{dt} = M_z^V \Delta V + M_z^a \Delta\alpha + M_z^{\omega_z} \Delta\omega_z + M_z^i \Delta\dot{\alpha} + M_z^{\delta_z} \Delta\delta_z \quad (6-35)$$

式中

$$M_z^V \Delta V = \left[\left(\frac{\partial M_{zo}}{\partial V} \right)_0 + \left(\frac{\partial M_z^a}{\partial V} \right)_0 \alpha_0 + \left(\frac{\partial M_z^{\delta_z}}{\partial V} \right)_0 \delta_{zo} \right] \Delta V$$

式(6-30)~(6-35)中还要相应的引入由于干扰作用产生的干扰力 F_{gx} 、 F_{gy} 、 F_{gz} 及干扰力矩 M_{gx} 、 M_{gy} 、 M_{gz} 。

对方程组(6-3)中第7至12式的运动学方程线性化的结果如下

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Delta\psi}{dt} &= \frac{1}{\cos\vartheta} \Delta\omega_y \\ \frac{d\Delta\vartheta}{dt} &= \Delta\omega_z \\ \frac{d\Delta\gamma}{dt} &= \Delta\omega_x - \tan\vartheta \Delta\omega_y \end{aligned} \right\} \quad (6-36)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Delta x}{dt} &= \cos\theta \Delta V - V \sin\theta \Delta\theta \\ \frac{d\Delta y}{dt} &= \sin\theta \Delta V + V \cos\theta \Delta\theta \\ \frac{d\Delta z}{dt} &= -V \cos\theta \Delta\psi_v \end{aligned} \right\} \quad (6-37)$$

对几何关系方程(第14~第16式)线性化后得到下列各式

$$\left. \begin{aligned} \Delta\theta &= \Delta\vartheta - \Delta\alpha \\ \Delta\psi_v &= \Delta\psi + \frac{\alpha}{\cos\theta} \Delta\gamma - \frac{1}{\cos\theta} \Delta\beta \\ \Delta\gamma_v &= \tan\theta \Delta\beta + \frac{\cos\vartheta}{\cos\theta} \Delta\gamma \end{aligned} \right\} \quad (6-38)$$

最后就可得到线性化以后的扰动运动方程组

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d\Delta V}{dt} &= (P^V - X^V) \Delta V + (-P\alpha - X^a) \Delta\alpha + (-G \cos\theta) \Delta\theta + F_{gx} \\ mV \frac{d\Delta\theta}{dt} &= (P^V \alpha + Y^V) \Delta V + (P + Y^a) \Delta\alpha + (G \sin\theta) \Delta\theta + Y^{\delta_z} \Delta\delta_z \\ -mV \cos\theta \frac{d\Delta\psi_v}{dt} &= (-P + Z^\beta) \Delta\beta + (P\alpha + Y) \Delta\gamma_v + Z^{\delta_y} \Delta\delta_y + F_{gz} \\ J_x \frac{d\Delta\omega_x}{dt} &= M_x^\beta \Delta\beta + M_x^{\omega_x} \Delta\omega_x + M_x^{\omega_y} \Delta\omega_y + M_x^{\delta_x} \Delta\delta_x + M_x^{\delta_y} \Delta\delta_y + M_{gx} \\ J_y \frac{d\Delta\omega_y}{dt} &= M_y^\beta \Delta\beta + M_y^{\omega_y} \Delta\omega_y + M_y^{\omega_x} \Delta\omega_x + M_y^{\delta_x} \Delta\delta_x + M_y^{\delta_y} \Delta\delta_y + M_{gy} \\ J_z \frac{d\Delta\omega_z}{dt} &= M_z^V \Delta V + M_z^a \Delta\alpha + M_z^{\omega_z} \Delta\omega_z + M_z^i \Delta\dot{\alpha} + M_z^{\delta_z} \Delta\delta_z + M_{gz} \\ \frac{d\Delta\psi}{dt} &= \frac{1}{\cos\vartheta} \Delta\omega_y \\ \frac{d\Delta\vartheta}{dt} &= \Delta\omega_z \\ \frac{d\Delta\gamma}{dt} &= \Delta\omega_x - \tan\vartheta \Delta\omega_y \end{aligned} \right\} \quad (6-39)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d\Delta x}{dt} &= \cos\theta\Delta V - V\sin\theta\Delta\theta \\
 \frac{d\Delta y}{dt} &= \sin\theta\Delta V + V\cos\theta\Delta\theta \\
 \frac{d\Delta z}{dt} &= -V\cos\theta\Delta\phi_v \\
 \Delta\theta &= \Delta\vartheta - \Delta\alpha \\
 \Delta\phi_v &= \Delta\psi + \frac{\alpha}{\cos\theta}\Delta\gamma - \frac{1}{\cos\theta}\Delta\beta \\
 \Delta\gamma_v &= \tan\theta\Delta\beta + \frac{\cos\vartheta}{\cos\theta}\Delta\gamma
 \end{aligned} \right\} \quad (6-39) \text{ 续}$$

对于轴对称型导弹线性化以后的偏量方程组与方程组(6-39)基本相同,只是其中第4、5、6式简化为下式

$$\left. \begin{aligned}
 J_x \frac{d\Delta\omega_x}{dt} &= M_{x^x}^{\omega_x}\Delta\omega_x + M_{x^x}^{\delta_x}\Delta\delta_x + M_{gx} \\
 J_y \frac{d\Delta\omega_y}{dt} &= M_{y^y}^{\delta_y}\Delta\delta_y + M_{y^y}^{\omega_y}\Delta\omega_y + M_{y^y}^{\dot{\beta}}\Delta\dot{\beta} + M_{y^y}^{\delta_y}\Delta\delta_y + M_{gy} \\
 J_z \frac{d\Delta\omega_z}{dt} &= M_z^V\Delta V + M_z^{\alpha}\Delta\alpha + M_z^{\omega_z}\Delta\omega_z + M_z^{\dot{\alpha}}\Delta\dot{\alpha} + M_z^{\delta_z}\Delta\delta_z + M_{gz}
 \end{aligned} \right\} \quad (6-40)$$

式中 $M_z^V\Delta V = \left[\left(\frac{\partial M_z^a}{\partial V} \right)_0 \alpha_0 + \left(\frac{\partial M_z^s}{\partial V} \right)_0 \delta_{z_0} \right] \Delta V$

式(6-39)中偏量 ΔV 、 $\Delta\theta$ 、 $\dots$ 、 $\Delta\gamma_v$ 是时间的函数,这些偏量的系数由未扰动运动参数值: V_0 、 α_0 、 β_0 、 $\dots$ 、 δ_{z_0} 来确定。如果未扰动运动是定态飞行,即其运动参数是常数,则未知数 ΔV 、 $\Delta\theta$ 、 $\dots$ 、 $\Delta\gamma_v$ 中的系数与时间无关。于是得到便于研究的常系数微分方程组。如果未扰动运动是非定态飞行,未知数 ΔV 、 $\Delta\theta$ 、 $\dots$ 、 $\Delta\gamma_v$ 中系数与时间有关,即未扰动运动参数随时间变化,那么线性化以后的扰动运动方程组是变系数的微分方程组。

§ 6-5 扰动运动分解为纵向和侧向扰动运动

从方程组(6-39)中很容易看出扰动运动方程组可以分为两个独立的方程组。一组是描述纵向运动参数偏量 ΔV 、 $\Delta\theta$ 、 $\Delta\vartheta$ 、 $\Delta\omega_z$ 、 Δx 、 Δy 、 $\Delta\alpha$ 的变化,即

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d\Delta V}{dt} &= \frac{P^v - X^v}{m}\Delta V + \frac{-P\alpha - X^a}{m}\Delta\alpha - g\cos\theta\Delta\theta + \frac{F_{gx}}{m} \\
 \frac{d\Delta\theta}{dt} &= \frac{P^v\alpha + Y^v}{mV}\Delta V + \frac{P + Y^a}{mV}\Delta\alpha + \frac{g\sin\theta}{V}\Delta\theta + \frac{Y^{\delta_z}}{mV}\Delta\delta_z + \frac{F_{gy}}{mV} \\
 \frac{d\Delta\omega_z}{dt} &= \frac{M_z^V}{J_z}\Delta V + \frac{M_z^a}{J_z}\Delta\alpha + \frac{M_z^{\omega_z}}{J_z}\Delta\omega_z + \frac{M_z^{\dot{\alpha}}}{J_z}\Delta\dot{\alpha} + \frac{M_z^{\delta_z}}{J_z}\Delta\delta_z + \frac{M_{gz}}{J_z} \\
 \frac{d\Delta\vartheta}{dt} &= \Delta\omega_z \\
 \frac{d\Delta x}{dt} &= \cos\theta\Delta V - V\sin\theta\Delta\theta \\
 \frac{d\Delta y}{dt} &= \sin\theta\Delta V + V\cos\theta\Delta\theta \\
 \Delta\alpha &= \Delta\vartheta - \Delta\theta
 \end{aligned} \right\} \quad (6-41)$$

另外一组是描述侧向运动参数偏量 $\Delta\psi_v$ 、 $\Delta\omega_x$ 、 $\Delta\omega_y$ 、 $\Delta\phi$ 、 $\Delta\gamma$ 、 Δz 、 $\Delta\beta$ 、 $\Delta\gamma_v$ 的变化，即

$$\left. \begin{aligned} \cos\theta \frac{d\Delta\psi_v}{dt} &= \frac{P - Z^\beta}{mV} \Delta\beta - \frac{P\alpha + Y}{mV} \Delta\gamma_v - \frac{Z^{\delta_y}}{mV} \Delta\delta_y - \frac{F_{gz}}{mV} \\ \frac{d\Delta\omega_x}{dt} &= \frac{M_x^\beta}{J_x} \Delta\beta + \frac{M_x^{\omega_x}}{J_x} \Delta\omega_x + \frac{M_x^{\omega_y}}{J_x} \Delta\omega_y + \frac{M_x^\delta}{J_x} \Delta\delta_x + \frac{M_x^{\delta_y}}{J_x} \Delta\delta_y + \frac{M_{gx}}{J_x} \\ \frac{d\Delta\omega_y}{dt} &= \frac{M_y^\beta}{J_y} \Delta\beta + \frac{M_y^{\omega_x}}{J_y} \Delta\omega_x + \frac{M_y^{\omega_y}}{J_y} \Delta\omega_y + \frac{M_y^\delta}{J_y} \Delta\delta_x + \frac{M_y^{\delta_y}}{J_y} \Delta\delta_y + \frac{M_{gy}}{J_y} \\ \frac{d\Delta\phi}{dt} &= \frac{1}{\cos\vartheta} \Delta\omega_y \\ \frac{d\Delta\gamma}{dt} &= \Delta\omega_x - \tan\vartheta \Delta\omega_y \\ \frac{d\Delta z}{dt} &= -V \cos\theta \Delta\psi_v \\ \Delta\beta &= \cos\theta \Delta\phi - \cos\theta \Delta\psi_v + \alpha \Delta\gamma \\ \Delta\gamma_v &= \tan\theta \Delta\beta + \frac{\cos\vartheta}{\cos\theta} \Delta\gamma \end{aligned} \right\} \quad (6-42)$$

对于轴对称型导弹同样可以分成纵向和侧向两组扰动运动方程组。

第二章中已指出，在一般情况下导弹的运动可看做是导弹的质心沿坐标轴以速度 V_x 、 V_y 、 V_z 的三个平移运动和以角速度 ω_x 、 ω_y 、 ω_z 绕坐标轴的旋转运动所组成。如果导弹相对纵向平面 Ox_1y_1 是对称的，当导弹以接近于垂直平面弹道飞行，且侧向参数很小时，则导弹的一般运动可以分为纵向运动和侧向运动。

导弹纵向运动是由导弹质心以速度 V_{x_2} 、 V_{y_2} 沿坐标轴 Ox_2 和 Oy_2 的二个平移运动（也就是在 Ox_1y_1 对称面内的运动）以及相对于 Oz_1 轴以角速度 ω_{z_1} 的旋转运动所组成。在纵向运动中，只有纵向运动学参数 V 、 α 、 θ 、 ω_z 、 ϑ 、 x 、 y 等有变化。侧向运动学参数 β 、 γ 、 γ_v 、 ω_x 、 ω_y 、 ψ_v 、 ϕ 、 z 等于零。

导弹侧向运动是由导弹质心以速度 V_{z_2} 沿 Oz_2 轴的平移运动及绕 Ox_1 及 Oy_1 轴以角速度 ω_{x_1} 、 ω_{y_1} 的旋转运动所组成，所以侧向运动是描述侧向参数变化的运动。

纵向运动可以独立存在，而侧向运动只能与纵向运动同时存在。

在扰动运动中，如果干扰作用或者俯仰操纵机构的偏转，仅使纵向运动参数有偏量，而侧向运动参数 ψ_v 、 ϕ 、 β 、 ω_x 、 ω_y 、 γ_v 、 γ 、 z 仍保持未扰动飞行时的数值，这样的扰动运动通常称为纵向扰动运动。

如果干扰的作用或者操纵机构的偏转，仅使侧向运动参数 ψ_v 、 ϕ 、 β 、 γ_v 、 ω_x 、 ω_y 、 z 得到偏量，而纵向运动参数仍保持未扰动飞行时的数值。这样的扰动运动称为侧向扰动运动。

由式(6-41)和(6-42)可见，纵向和侧向扰动运动能够独立存在。虽然侧向扰动运动方程组中包含有纵向未扰动参数，但是在分析扰动运动时，未扰动运动是作为已知的。因此，在进行导弹动态特性分析时，对纵向扰动运动和侧向扰动运动可以分别独立进行。但是必须注意的扰动运动分成纵向扰动运动和侧向扰动运动只有满足下列条件才有可能。

- (1) 导弹相对纵向平面 Ox_1y_1 对称；
- (2) 运动参数对其未扰动值的偏量足够小；
- (3) 在未扰动飞行中，侧向运动参数以及纵向运动参数对时间的导数值足够小。

如果满足了第(1)、(3)条件,纵向力和力矩 X 、 Y 和 M_x 对任何侧向运动参数的导数都接近于零,例如 $X^\beta \approx 0$;如果实现了第(2)、(3)条件,则描述侧向参数变化的方程中,带有纵向参数的各项就都可以去掉,如以 $\left(\frac{\partial M_y}{\partial V}\right)_0 \Delta V$ 这一项为例,根据式(6-25),得到

$$\left(\frac{\partial M_y}{\partial V}\right)_0 \Delta V = \left(\frac{\partial M_y^\beta}{\partial V}\right)_0 \beta_0 \Delta V + \left(\frac{\partial M_y^{\omega_y}}{\partial V}\right)_0 \omega_{y0} \Delta V + \left(\frac{\partial M_y^{\dot{\beta}}}{\partial V}\right)_0 \dot{\beta}_0 \Delta V + \left(\frac{\partial M_y^{\delta_{y0}}}{\partial V}\right)_0 \delta_{y0} \Delta V \quad (6-43)$$

在未扰动飞行中,参数 β_0 、 $\dot{\beta}_0$ 、 ω_{y0} 、 δ_{y0} 是小量,而它们与 ΔV 的乘积是二阶小量,所以当飞行速度改变时,偏航力矩的增量 $(\partial M_y / \partial V)_0 \Delta V$ 同样也是二阶小量。同理,当纵向参数变化时,侧向力和力矩 Z 、 M_x 、 M_y 的增量都是二阶小量,因此对线性化运动方程简化时可以把它们略掉。

§ 6-6 系数“冻结”法

绝大多数的导弹在飞行过程中,即便是按照未扰动弹道飞行,运动参数也是随时间而变化的。只有在某些特殊情况下,即导弹作水平直线等速飞行时,才可以近似地认为运动参数不变,例如飞航式导弹弹道的中段(即平飞段)。但是严格地说,由于飞行过程中,导弹的质量 m 和转动惯量 J_x 、 J_y 、 J_z 随着燃料的不断消耗也在不断地变化,所以,即使是能够严格保持等速平飞,某些运动参数,例如攻角 α 和俯仰角 ϑ 仍然是时间的函数。因此,所得到的线性化扰动运动方程组总是变系数线性微分方程组。

求解变系数线性系统是比较复杂问题,只有在极简单的情况下(一般不超过二阶)才可能求得解析解。对于方程(6-41)和(6-42),通过数字计算机求解只能得到特解。而研究常系数线性方程则简单得多,特别是求一般解析解的方法大家是熟知的。此外,还有很多研究常系数方程解的方法,它们在工程实践中获得了广泛的应用,例如判断解的稳定性方法、频率法等。

为了有可能采用常系数线性系统自动控制理论中所介绍的方法,通常利用所谓系数“冻结”法来研究导弹的动态特性。

在研究导弹动态特性时,并不是对导弹所有可能弹道逐条逐点进行分析,而是选取典型弹道上的特征点进行分析,如对某地空导弹的动态特性分析时,首先选取典型弹道,然后在典型弹道上选取特征点,如助推器脱落干扰点、控制开始点,弹道上可用过载最小点、弹道上需用过载最大点及干扰力和力矩最大的点等作为特征点。通过对典型弹道上特征点的动态分析可以表征导弹在整个飞行中的动态特性(见 § 7-8)。

所谓系数“冻结”就是在研究导弹的动态特性时,如果未扰动弹道已经给出,则在该弹道上任意点的运动参数和结构参数都为已知,近似认为所研究的弹道点(即特征点)附近小范围内,未扰动运动的运动参数、气动参数、结构参数和制导系统参数都固定不变,也就是近似地认为式(6-39)各扰动运动方程中的扰动偏量前的系数,在特征点的附近冻结不变。这样,就把变系数线性微分方程变为常系数线性微分方程,使求解大为简化。

系数“冻结”法并无严格的理论依据或数学证明。在实用中发现,如果在过渡过程时间内,系数的变化不超过 15%~20% 时,系数“冻结”法不至于带来很大的误差。而我们主要

研究的是快衰减短周期扰动运动(见第七章),过渡过程时间一般是在几秒钟以内,在此期间系数不会有很大变化,因此,采用系数“冻结”法不至于产生太大的误差。但是也有例外,有时系数变化并不大,而用系数“冻结”法求得的常系数微分方程解与实际情况的差别却很大。因此,在初步选择导弹和制导系统的参数时,可以采用系数“冻结”法,但进一步设计时,应该用非线性微分方程组,通过数字计算机和飞行试验等方法最后加以验证。

§ 6-7 导弹的稳定性和操纵性的概念

在研究导弹制导系统时,导弹运动方程组应包括描述制导系统工作状态的控制方程,我们称此方程组为导弹系统方程组。在这种情况下,操纵机构的偏转角 δ_z 、 δ_y 、 δ_x 也同 V 、 θ 等参数一样均作为未知变量看待。

在设计导弹制导系统时,必须知道作为制导系统一个环节的弹体动态特性。为此目的,在导弹运动方程组中,设操纵机构偏转角 $\delta_x(t)$ 、 $\delta_y(t)$ 、 $\delta_z(t)$ 为已知的时间函数,把它们作为输入量以确定弹体的动态特性。此时,由方程(6-41)和(6-42)构成的方程组是封闭的(未知数的数目与方程数目相等),也不需要加入制导系统的控制方程。

导弹弹体的动态特性是指它在受到扰动作用后或当操纵机构产生偏转时所产生的扰动运动特性,也称为导弹弹体的稳定性和操纵性。

一、稳定性概念

导弹在运动时,受到外界扰动作用,使之离开原来的飞行状态,若干扰取消后,导弹能恢复到原来状态,则称导弹的运动是稳定的。如果在干扰取消以后,导弹并不恢复到原来的飞行状态,甚至偏差越来越大,则称导弹是不稳定的。例如在某一有限时间间隔内,由阵风引起的干扰力作用在导弹上,而且该力在时刻 t_0 又消失了(时刻 t_0 称为初始时刻)。由于干扰力短时间作用的结果,在 $t=t_0$ 时,导弹运动参数不同于在未扰动飞行中的数值,即

$$V(t_0) = V_0(t_0) + \Delta V(t_0)$$

$$\alpha(t_0) = \alpha_0(t_0) + \Delta\alpha(t_0)$$

.....

偏量值 $\Delta V(t_0)$ 、 $\Delta\alpha(t_0)$ 、...等称为初始扰动。当 $t > t_0$,即在干扰力作用消失后,偏量 ΔV 、 $\Delta\alpha$ 、...的变化取决于导弹弹体及其控制系统(这时起稳定作用)的动态特性。

为了评价导弹弹体的稳定性,假设在扰动运动的过程中,即当 $t > t_0$ 时,操纵机构,一直保持不变的位置上。此时,导弹对阵风的反应就表现为由运动参数初始扰动所引起的固有运动,也就是对应线方程组(6-41)和(6-42)中 $\Delta\delta_x = \Delta\delta_y = \Delta\delta_z = 0$, $F_{gx} = F_{gy} = F_{gz} = M_{gx} = M_{gy} = M_{gz} = 0$ 时的齐次方程组的通解,这种固有运动亦称为自由运动。

图6-2(a)和(b)表示干扰力和干扰力矩消失后,攻角的偏量随时间变化的各种情况。图中 $\Delta\alpha_0$ 为扰动引起的初始攻角偏量,显然图(a)中1和2是稳定的;图(b)中3、4和5都是不稳定的。

对于导弹运动的稳定性,更为确切的提法是指某些运动参数的稳定性。导弹运动参数可以分为导弹质心运动参数(如 V 、 x 、 y ...)和导弹绕质心转动的运动参数,又称角运动参数(如 α 、 β 、 γ 、 ϑ 、 θ 、 ω_x 、...),因此,在研究导弹运动的稳定性时,往往不是笼统说研究它的稳定性,而

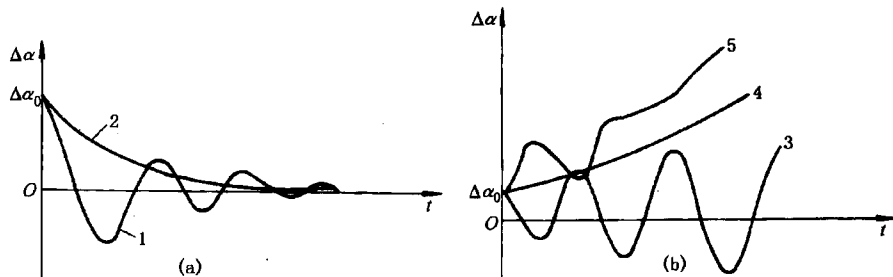


图 6-2 受扰动后, 攻角偏量随时间的变化
(a) 稳定运动; (b) 不稳定运动

是针对那一类运动参数或那几个运动参数而言的, 如导弹飞行高度的稳定性, 攻角 α 、俯仰角 ϑ 、倾斜角 γ 的稳定性等。

必须指出, 导弹弹体的稳定性, 是指导弹没有控制作用时抗干扰的能力, 这与制导系统参与工作时的闭环回路中的导弹系统稳定性是不同的。如无控情况下导弹是不稳定的, 但在控制作用下可以变成稳定的。当然, 也可能出现这种情况, 即导弹在无控时是稳定的, 而由于控制系统设计的不合理, 反而在闭环时不稳定了。对于战术导弹, 一般总是希望在无控时具有良好的稳定性和动态品质, 以降低对控制系统的要求。也有的导弹完全依靠弹体自身的稳定性来保证导弹的飞行稳定性。

还需指出, 这里所说的导弹的稳定性 (即运动稳定性) 和静稳定性的概念是不同的。静稳定性是指干扰力和干扰力矩消失后最初瞬间 ($t=t_0$) 导弹的运动趋势。如果运动的趋势是恢复到原来的飞行状态, 则导弹具有静稳定性。当 $m_z^* < 0$ 时, 则导弹具有纵向静稳定性。关于稳定性和静稳定性之间的内在联系, 将在第七章中进行阐述。

二、操纵性概念

为了使导弹按预定的弹道飞行, 操纵机构需要不时地进行偏转。导弹的操纵性可以理解为当操纵机构偏转后, 导弹改变其原来飞行状态 (如攻角、侧滑角、俯仰角、弹道倾角、滚动角等) 的能力以及反应的快慢程度。

研究操纵机构偏转时的导弹运动, 即导弹弹体的操纵性时, 不考虑控制系统的工作过程, 也就是在给定偏量 $\Delta\delta_z(t)$ 、 $\Delta\delta_y(t)$ 、 $\Delta\delta_x(t)$ 的条件下求解线性非齐次微分方程组 (6-41) 和 (6-42)。这种方程组的一般解是由齐次方程组的通解与非齐次方程组的特解所组成。

齐次方程组的通解对应于导弹的自由运动, 非齐次方程组的特解对应于导弹的强迫运动。所以, 操纵机构偏转时所产生的扰动运动是由自由运动和强迫运动组合而成。

在研究导弹弹体操纵性时, 通常只研究导弹对操纵机构三种典型偏转方式的反应。这三种方式就是阶跃偏转、谐波偏转和脉冲偏转。

1. 单位阶跃偏转

$$\Delta\delta_z(\text{或 } \Delta\delta_y, \Delta\delta_x) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t \geq t_0 \end{cases}$$

见图 6-3。

研究操纵机构作阶跃偏转的必要性是因为在这种情况下, 导弹的响应最强烈, 引起过渡

过程中的超调量最大。图 6-3 中表示了操纵机构作阶跃偏转时导弹的攻角响应过程。

实际上操纵机构不可能作瞬时的阶跃偏转。因为如果是这样,操纵机构的偏转速度将是无限大,从而舵机的功率也需要无限大。但是,在舵机快速作用下,操纵机构的偏转是接近于阶跃偏转的情况。

2. 谐波偏转

$$\Delta\delta(t) = \Delta\delta_0 \sin \omega t$$

在这种情况下,导弹的响应称为导弹对操纵机构偏转的跟随性,见图 6-4。

当操纵机构作谐波偏转时,导弹的响应具有延迟、放大(或缩小)现象。图 6-4 中 $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\delta_z$ 有相位差,振幅之间也有一定的比例关系。

当然,在实际飞行过程中,操纵机构不可能出现谐波偏转规律(除非飞行试验中,为了测出导弹的频率特性,人为地使操纵机构作谐波偏转)。但是在自动控制理论中知道,用频率法研究动力学系统时,必须知道各元件(或环节)的频率特性,因此,规定操纵机构作谐波偏转规律正是为了求得导弹的频率特性。

3. 脉冲偏转

$$\Delta\delta(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < t_0 \\ 0, & t < 0, t > t_0 \end{cases}$$

式中 A ——常数。

图 6-5 为操纵机构作脉冲偏转时攻角的响应。

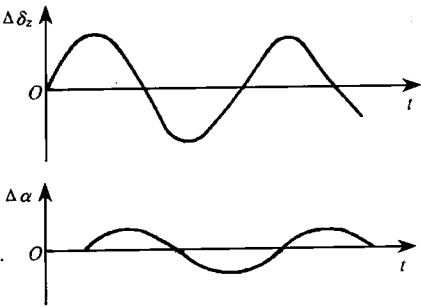


图 6-4 导弹攻角对操纵机构偏转的跟随性

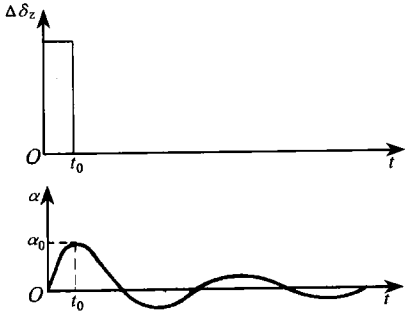


图 6-5 操纵机构作脉冲偏转时攻角的响应

舵面在实际飞行中的偏转,可以说是上述典型情况的某种组合。

第七章 导弹弹体纵向动态特性分析

在第六章中已经把导弹扰动运动分解为纵向扰动运动和侧向扰动运动，并以两组互相独立的扰动运动方程组来描述。在这一章中。要具体研究导弹弹体纵向扰动运动特性，也就是稳定性和操纵性问题。在对不同的具体问题研究时，还要通过对纵向扰动运动的分析，讨论方程组可能的简化。

§ 7-1 纵向扰动运动方程组

一、纵向扰动运动方程组

由纵向扰动运动方程组(6-41)可知，它的变量是运动参数偏量 ΔV 、 $\Delta\theta$ 、 $\Delta\omega_z$ 、 $\Delta\vartheta$ 、 $\Delta\alpha$ 以及 Δx 和 Δy 。由于偏量 Δx 和 Δy 并不包含在其他方程中，所以可以把描述偏量 Δx 和 Δy 的两个方程独立出来，这样纵向扰动运动方程组就变为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Delta V}{dt} &= \frac{P^V - X^V}{m} \Delta V + \frac{-P\alpha - X^a}{m} \Delta\alpha - g\cos\theta\Delta\theta + \frac{F_{gx}}{m} \\ \frac{d\Delta\omega_z}{dt} &= \frac{M_z^V}{J_z} \Delta V + \frac{M_z^a}{J_z} \Delta\alpha + \frac{M_z^{\omega_z}}{J_z} \Delta\omega_z + \frac{M_z^{\dot{\alpha}}}{J_z} \Delta\dot{\alpha} + \\ &\quad \frac{M_z^{\delta_z}}{J_z} \Delta\delta_z + \frac{M_{gz}}{J_z} \\ \frac{d\Delta\theta}{dt} &= \frac{P^V\alpha + Y^V}{mV} \Delta V + \frac{P + Y^a}{mV} \Delta\alpha + \frac{g\sin\theta}{V} \Delta\theta + \\ &\quad \frac{Y^{\delta_z}}{mV} \Delta\delta_z + \frac{F_{gy}}{mV} \\ \frac{d\Delta\vartheta}{dt} &= \Delta\omega_z \\ \Delta\alpha &= \Delta\vartheta - \Delta\theta \end{aligned} \right\} \quad (7-1)$$

为了使方程组(7-1)书写简便，引入方程系数的简化表示符号，为此，对方程和运动参数偏量进行编号，见表 7-1。

表 7-1 导弹的纵向扰动运动线性化方程和运动参数偏量的编号

方程式序号 i	扰 动 运 动 方 程 式	运 动 参 数 偏量序号 j	运 动 参 数 偏 量
1	$\frac{d\Delta V}{dt} = \frac{P^V - X^V}{m} \Delta V + \frac{-P\alpha - X^a}{m} \Delta\alpha - g\cos\theta\Delta\theta + \frac{F_{gx}}{m}$	1	ΔV
		2	$\Delta\omega_z$
2	$\frac{d\Delta\omega_z}{dt} = \frac{M_z^V}{J_z} \Delta V + \frac{M_z^{\omega_z}}{J_z} \Delta\omega_z + \frac{M_z^a}{J_z} \Delta\alpha + \frac{M_z^{\dot{\alpha}}}{J_z} \Delta\dot{\alpha} + \frac{M_z^{\delta_z}}{J_z} \Delta\delta_z + \frac{M_{gz}}{J_z}$	3	$\Delta\theta$
		4	$\Delta\alpha$
3	$\frac{d\Delta\theta}{dt} = \frac{P^V\alpha + Y^V}{mV} \Delta V + \frac{g\sin\theta}{V} \Delta\theta + \frac{P + Y^a}{mV} \Delta\alpha + \frac{Y^{\delta_z}}{mV} \Delta\delta_z + \frac{F_{gy}}{mV}$	5	$\Delta\delta_z$
		6	F_{gx}, F_{gy}, M_{gz}

方程式中各个系数采用 a_{ij} 的符号表示， a_{ij} 的第一个脚注 i 表示运动方程的序号，第二个

脚注 j 表示运动参数偏量的顺序号, 例如 a_{11} 就代表 $(P^V - X^V)/m$ 。系数 a_{ij} 的表达式见表 7-2。

表 7-2 动力系数 a_{ij} 的符号及其表达式

运动方程 式序号 i	运 动 系 数 序 号 j					
	1	2	3	4	5	6
1	$a_{11} = \frac{P^V - X^V}{m}$ (s^{-1})	$a_{12} = 0$	$a_{13} = -g \cos \theta$ ($m \cdot s^{-2}$)	$a_{14} = -\frac{X^a + P^a}{m}$ ($m \cdot s^{-2}$)	$a_{15} = -\frac{X^{\delta_z}}{m}$ ($m \cdot s^{-2}$)	$a_{16} = \frac{1}{m}$ (kg^{-1})
2	$a_{21} = \frac{M_z^V}{J_z}$ ($m^{-1} \cdot s^{-1}$)	$a_{22} = \frac{M_z^{\omega_z}}{J_z}$ (s^{-1})	$a_{23} = 0$	$a_{24} = \frac{M_z^a}{J_z} (s^{-2})$ $a'_{24} = \frac{M_z^{\dot{a}}}{J_z} (s^{-1})$	$a_{25} = \frac{M_z^{\delta_z}}{J_z} (s^{-2})$ $a'_{25} = \frac{M_z^{\dot{\delta}_z}}{J_z} (s^{-1})$	$a_{26} = \frac{1}{J_z}$ ($kg^{-1} \cdot m^{-2}$)
3	$a_{31} = \frac{P^V \alpha + Y^V}{mV}$ (m^{-1})	$a_{32} = 0$	$a_{33} = \frac{g \sin \theta}{V}$ (s^{-1})	$a_{34} = \frac{P + Y^a}{mV}$ (s^{-1})	$a_{35} = \frac{Y^{\delta_z}}{mV}$ (s^{-1})	$a_{36} = \frac{1}{mV}$ ($s \cdot kg^{-1} \cdot m^{-1}$)

这样, 纵向扰动运动方程可改写为如下形式

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d\Delta V}{dt} - a_{11}\Delta V - a_{13}\Delta\theta - a_{14}\Delta\alpha &= a_{16}F_{gx} \\
 \frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} - a_{21}\Delta V - a_{22}\frac{d\Delta\vartheta}{dt} - a_{24}\Delta\alpha - a'_{24}\frac{d\Delta\alpha}{dt} \\
 &= a_{25}\Delta\delta_z + a_{26}M_{gx} \\
 \frac{d\Delta\theta}{dt} - a_{31}\Delta V - a_{33}\Delta\theta - a_{34}\Delta\alpha &= a_{35}\Delta\delta_z + a_{36}F_{gy} \\
 -\Delta\vartheta + \Delta\theta + \Delta\alpha &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (7-2)$$

系数 a_{11} 、 $\dots$ 、 a_{21} 、 $\dots$ 、 a_{36} 称为动力系数, 它表征导弹的动力学特性。

二、动力系数的物理意义

下面说明常用的几个动力系数的物理意义。

当取用系数表达式中空气动力和力矩系数的导数时, 要注意其单位, 在国际单位制中角度的单位为 rad , 而角速度则以 rad/s 表示, 如

$$\begin{aligned}
 [c_y^a] &= rad^{-1}, \dots, [m_y^{\theta}] = rad^{-1}, \dots, \\
 [m_{\dot{x}}^{\omega_z}] &= rad^{-1}, \dots, [m_z^{\dot{a}}] = rad^{-1}, \dots.
 \end{aligned}$$

系数 a_{22} 为

$$a_{22} = \frac{M_z^{\omega_z}}{J_z} = \frac{m_z^{\omega_z} q S b_A}{J_z} \frac{b_A}{V} \quad (s^{-1}) \quad (7-3)$$

它表征导弹的空气动力阻尼。由表 7-1 中第二个方程可知, a_{22} 是角速度偏量为一个单位 ($\Delta\omega_z = \Delta\dot{\vartheta} = 1$) 时所引起的导弹绕 Oz_1 轴转动角加速度的偏量。因为 $M_z^{\omega_z} < 0$, 所以, 角加速度偏量的方向永远与角速度偏量 $\Delta\omega_z$ 的方向相反。因为角加速度 $a_{22}\Delta\dot{\vartheta}$ 的作用是阻止导弹相对于轴 Oz_1 的转动, 所以这作用称为阻尼。

系数 a_{24} 为

$$a_{24} = \frac{M_z^a}{J_z} = \frac{m_z^a q S b_A}{J_z} \quad (\text{s}^{-2}) \quad (7-4)$$

它表征导弹的静稳定性。由表 7-1 中第二个方程看出, a_{24} 是攻角变化一个单位 ($\Delta\alpha=1$) 时所引起的导弹绕 Oz_1 轴转动角加速度的偏量。如果 $a_{24}<0$, 即 $M_z^a<0$, 则由攻角偏量 $\Delta\alpha$ 所引起的角加速度偏量的方向与偏量 $\Delta\alpha$ 的方向相反。

系数 a_{25} 为

$$a_{25} = \frac{M_z^{\delta_z}}{J_z} = \frac{m_z^{\delta_z} q S b_A}{J_z} \quad (\text{s}^{-2}) \quad (7-5)$$

它表征升降舵的效率。 a_{25} 是操纵机构偏转一个单位 ($\Delta\delta_z=1$) 时, 所造成的导弹绕 Oz_1 轴转动角加速度的偏量。 a_{25} 的正负取决于导弹气动布局, 对于正常式导弹为负值, 鸭式导弹为正值。

系数 a_{34} 为

$$a_{34} = \frac{Y^a + P}{mV} = \frac{c_y^a q S + P}{mV} \quad (\text{s}^{-1}) \quad (7-6)$$

它表示当攻角偏量为一个单位时, 所引起的弹道切线的转动角速度偏量。系数 a_{34} 可以由攻角偏量为一个单位时所引起的法向过载的偏量来表示, 即

$$a_{34} = \frac{g}{V} n_y^a \quad (\text{s}^{-1}) \quad (7-7)$$

式中

$$n_y^a = \frac{\partial n_y}{\partial \alpha} = \frac{c_y^a q S + P}{G}$$

系数 a_{35} 为

$$a_{35} = \frac{Y^{\delta_z}}{mV} \quad (\text{s}^{-1}) \quad (7-8)$$

它表示操纵机构偏转一个单位时, 所引起的弹道切线转动角速度的偏量。

系数 a_{33} 为

$$a_{33} = \frac{g \sin \theta}{V} \quad (\text{s}^{-1}) \quad (7-9)$$

它是当弹道倾角的偏量为一个单位时, 由于重力所引起的弹道切线转动角速度的偏量 (当弹道倾角偏量为 $\Delta\theta$ 时, 重量的法向分量就产生大小为 $G \sin \theta \Delta\theta$ 的偏离)。

系数 a'_{24} 为

$$a'_{24} = \frac{M_z^{\dot{\alpha}}}{J_z} = \frac{m_z^{\dot{\alpha}} q S b_A}{J_z} \frac{b_A}{V} \quad (\text{s}^{-1}) \quad (7-10)$$

它表征气流下洗的延迟对俯仰力矩的影响。 a'_{24} 的大小是攻角变化率的偏量为一个单位时所引起导弹绕 Oz_1 轴转动角加速度的偏量。

对于旋转弹翼式导弹还应考虑 $x^{\delta_z} \Delta \delta_z$ 和力矩 $M_z^{\delta_z} \Delta \delta_z$ 。这时在 (7-2) 方程组第一式右端应加上 $a_{15} \Delta \delta_z$ 项, a_{15} 为

$$a_{15} = \frac{-X^{\delta_z}}{m} \quad (\text{m} \cdot \text{s}^{-2}) \quad (7-11)$$

在 (7-2) 方程组的第二式右端应加上 $a'_{25} \Delta \dot{\delta}_z$ 项, a'_{25} 为

$$a'_{25} = \frac{M_z^{\dot{\delta}_z}}{J_z} \quad (\text{s}^{-1}) \quad (7-12)$$

鸭式导弹也存在力矩 $M_z^{\delta_z} \Delta \dot{\delta}_z$ ，因此，要考虑 $a'_{25} \Delta \dot{\delta}_z$ 这一项。

至于 a_{15} 、 a'_{25} 以及其他动力系数的物理意义，根据上面的分析方法，同样可以作出解释。

当给定的气动力和气动力矩系数导数 c_y^{α} 、 $c_y^{\delta_z}$ 、 m_z^{α} 、 $m_z^{\delta_z}$ 、… 的单位为 $(1/(\circ))$ 时，在计算时，必须化为 (rad^{-1}) 。

三、动力系数的确定

由动力系数表达式可知，动力系数的大小取决于导弹的结构参数、几何参数、气动参数以及未扰动弹道参数。例如，为了确定动力系数 a_{22} 、 a_{24} 、 a'_{24} 、 a_{25} 、 a'_{25} 、 a_{34} 、 a_{35} 、 a_{15} 、 a_{16} 、 a_{26} 、 a_{36} ，除气动参数外，还必须知道 P 、 m 、 J_z 、 V_0 、 y_0 ；为了算出系数 a_{11} 、 a_{14} 、 a_{15} 、 a_{21} 、 a_{31} ，除与 P 、 m 、 J_z 、 V_0 、 y_0 有关外，还需知道 α_0 和 δ_{z0} ；系数 a_{13} 、 a_{33} 还与 θ_0 有关。

上述参数都是由未扰动弹道决定的。为了求得未扰动弹道，应求解非线性微分方程组 (6-3)。由于方程组 (6-3) 的求解比较复杂，并且在进行导弹总体和制导系统设计时，需要对各种不同典型弹道上的不同特征点进行计算与分析，因此，对未扰动运动的弹道要进行多次的计算，计算工作量是相当可观的。在初步设计时可以对未扰动弹道进行简化计算。利用“瞬时平衡”假设条件得到的导弹质心运动方程组 (2-70)，用于计算未扰动弹道参数十分简便。由这组方程求得的未扰动弹道称为理想弹道。理想弹道是理论弹道的一种简化情况，也是一种理论弹道。

动力系数主要取决于未扰动弹道上的速压 q 和马赫数 M_a ，即取决于飞行高度和速度。这些通过方程组 (2-70) 所求得的弹道参数，其误差不会太大。

四、扰动运动方程组以矩阵形式表示

为将纵向扰动运动方程组 (7-2) 用矩阵形式表示，取俯仰角速度 $\Delta \dot{\vartheta} = \Delta \omega_z$ ，并消去弹道倾角偏量 $\Delta \theta$ 及其角速度 $\Delta \dot{\theta}$ ，取 $\Delta \dot{\theta} = \Delta \dot{\vartheta} - \Delta \dot{\alpha}$ ，则方程组 (7-2) 可以写成如下矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{V} \\ \Delta \dot{\omega}_z \\ \Delta \dot{\alpha} \\ \Delta \dot{\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{14} - a_{13} & a_{13} \\ a_{21} - a'_{24}a_{31} & a_{22} + a'_{24} & -a'_{24}a_{34} + a'_{24}a_{33} + a_{24} & -a'_{24}a_{33} \\ -a_{31} & 1 & -a_{34} + a_{33} & -a_{33} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V \\ \Delta \omega_z \\ \Delta \alpha \\ \Delta \vartheta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_{25} - a'_{24}a_{35} \\ -a_{35} \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \dot{\delta}_z + \begin{bmatrix} a_{16}F_{gx} \\ a_{26}M_{gz} - a'_{24}a_{36}F_{gy} \\ -a_{36}F_{gy} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7-13)$$

设四阶动力系数阵

$$L = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{14} - a_{13} & a_{13} \\ a_{21} - a'_{24}a_{31} & a_{22} + a'_{24} & -a'_{24}a_{34} + a'_{24}a_{33} + a_{24} & -a'_{24}a_{33} \\ -a_{31} & 1 & -a_{34} + a_{33} & -a_{33} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7-14)$$

于是式(7-13)变为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Delta V \\ \Delta \omega_z \\ \Delta \alpha \\ \Delta \dot{\vartheta} \end{pmatrix} &= L \begin{pmatrix} \Delta V \\ \Delta \omega_z \\ \Delta \alpha \\ \Delta \vartheta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{25} - a'_{24}a_{35} \\ -a_{35} \\ 0 \end{pmatrix} \Delta \delta_z + \begin{pmatrix} a_{16}F_{gx} \\ a_{26}M_{gz} - a'_{24}a_{36}F_{gy} \\ -a_{36}F_{gy} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7-15) \\ (1) \quad (2) \quad (3) \quad (4) \end{aligned}$$

如果(3)和(4)两个列矩阵为零,则式(7-15)就是一个齐次线性微分方程组,这时矩阵方程描述的是导弹的纵向自由扰动运动。产生扰动原因是导弹受到偶然干扰的作用,使某些运动参数出现了初始偏差,如偶然阵风引起的攻角初始偏量 $\Delta\alpha_0$ 。导弹纵向自由扰动运动的性质与方阵 L 有关。这个方阵由动力系数所组成,因此 L 代表导弹的动力学性质。

当升降舵偏转时($\Delta\delta_z \neq 0$),第3个列矩阵必然存在,这时矩阵方程(7-15)代表一个非齐次的线性微分方程组,它描述了导弹在舵面偏转时的纵向强迫扰动运动。由矩阵方程可以明显看出,舵面偏转时,即使无偶然干扰,强迫扰动运动也是由两个分量所组成,一个是自由分量,另一个是强迫分量,而方阵 L 同样影响着扰动运动的性质。

在经常干扰力和干扰力矩作用下,即第(4)个列矩阵元素有值,导弹也会产生强迫扰动运动。

在线性代数中,列矩阵可以表示一个空间矢量,因此由矩阵方程(7-15)可知,导弹纵向扰动运动至少要由一个四维空间矢量来表示。由矩阵或空间矢量描述导弹纵向扰动运动,虽然书写方便,概括性很强。但不易了解扰动运动的物理概念,所以,在分析导弹动态特性的物理实质时,主要还是采用动力学形式的微分方程组(7-2),而在进行数学推导时,则采用矩阵形式。当然,用矩阵形式表示导弹的运动,对于学习和应用现代控制理论也是必须的。

研究动态性质,一般分为三个步骤进行:第一步是研究导弹受到偶然干扰作用时,未扰动运动是否具有稳定性,这就要求分析自由扰动运动的性质,求解式(7-2)或(7-15)齐次线性微分方程组。第二步是研究导弹对控制作用(舵偏角 $\Delta\delta_z \neq 0$)的反应,也就是操纵性问题,这时除了要分析自由扰动运动的性质,更重要的是分析过渡过程的品质。第三步是研究在常值干扰作用下,可能产生的参数误差。

§ 7-2 自由扰动运动的一般特性

一、自由扰动运动方程组

现在讨论导弹的自由扰动运动。为此,在方程组(7-2)中令 $\Delta\delta_z = 0$, $F_{gx} = F_{gy} = M_{gz} = 0$, 则得自由扰动运动方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Delta V}{dt} - a_{11}\Delta V - a_{13}\Delta\theta - a_{14}\Delta\alpha &= 0 \\ -a_{21}\Delta V + \frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} - a_{22}\frac{d\Delta\vartheta}{dt} - a_{24}\Delta\alpha - a'_{24}\frac{d\Delta\alpha}{dt} &= 0 \\ -a_{31}\Delta V - a_{33}\Delta\theta + \frac{d\Delta\theta}{dt} - a_{34}\Delta\alpha &= 0 \\ -\Delta\vartheta + \Delta\theta + \Delta\alpha &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7-16)$$

当利用系数冻结法之后, 方程组(7-16)是常系数线性齐次微分方程组, 其变量为 ΔV 、 $\Delta \vartheta$ 、 $\Delta \theta$ 和 $\Delta \alpha$ 。只要给出初始条件, 就可以求出 $\Delta V(t)$ 、 $\Delta \vartheta(t)$ 、 $\Delta \theta(t)$ 和 $\Delta \alpha(t)$ 的变化规律。

二、特征方程式及其根的特性

现在求方程组(7-16)的如下指数函数形式的特解

$$\Delta V = Ae^{\lambda t}, \quad \Delta \vartheta = Be^{\lambda t}, \quad \Delta \theta = Ce^{\lambda t}, \quad \Delta \alpha = De^{\lambda t} \quad (7-17)$$

式中 A 、 B 、 C 、 D 和 λ 都是常数, 它们需要根据式(7-17)满足方程组(7-16)的条件来确定。

将式(7-17)及其相应的变量 ΔV 、 $\Delta \vartheta$ 、 $\Delta \theta$ 和 $\Delta \alpha$ 对时间的导数

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta V}{dt} &= A\lambda e^{\lambda t}, & \frac{d\Delta \vartheta}{dt} &= B\lambda e^{\lambda t}, & \frac{d^2\Delta \vartheta}{dt^2} &= B\lambda^2 e^{\lambda t}, \\ \frac{d\Delta \theta}{dt} &= C\lambda e^{\lambda t}, & \frac{d\Delta \alpha}{dt} &= D\lambda e^{\lambda t} \end{aligned}$$

代入方程组(7-16)中, 消去共同因子 $e^{\lambda t}$ 后, 则得到如下的代数方程组

$$\left. \begin{aligned} (\lambda - a_{11})A - a_{13}C - a_{14}D &= 0 \\ -a_{21}A + \lambda(\lambda - a_{22})B - (a'_{24}\lambda + a_{24})D &= 0 \\ -a_{31}A - (a_{33} - \lambda)C - a_{34}D &= 0 \\ -B + C + D &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7-18)$$

该方程组可以看做是对于 A 、 B 、 C 、 D 而言的四个线性齐次代数方程, 其中未知数 λ 是作为参变量出现的。显然方程组(7-18)具有一个很明显的解, 即

$$A = B = C = D = 0$$

为了得到非明显解, 应当要求方程组的系数行列式等于零, 即

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & 0 & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & \lambda(\lambda - a_{22}) & 0 & -(a'_{24}\lambda + a_{24}) \\ -a_{31} & 0 & \lambda - a_{33} & -a_{34} \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (7-19)$$

这个方程是对应于 λ 而言的四次代数方程, 称为特征方程。于是, 只有当 λ 是特征方程的根时, 常系数线性齐次微分方程组(7-16)的解才有如同方程(7-17)的解的形式。

式(7-19)展开后, 得特征方程式

$$\Delta(\lambda) = \lambda^4 + P_1\lambda^3 + P_2\lambda^2 + P_3\lambda + P_4 = 0 \quad (7-20)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= -a_{33} + a_{34} - a_{22} - a'_{24} - a_{11} \\ P_2 &= a_{31}a_{14} - a_{31}a_{13} + a_{22}a_{33} - a_{22}a_{34} - a_{24} + a_{33}a'_{24} + \\ &\quad a_{33}a_{11} - a_{34}a_{11} + a_{22}a_{11} + a'_{24}a_{11} \\ P_3 &= -a_{21}a_{14} - a_{31}a_{22}a_{14} + a_{22}a_{31}a_{13} + a'_{24}a_{31}a_{13} + \\ &\quad a_{24}a_{33} - a_{22}a_{33}a_{11} + a_{22}a_{34}a_{11} + a_{24}a_{11} - a_{33}a_{11}a'_{24} \\ P_4 &= a_{21}a_{33}a_{14} - a_{13}a_{21}a_{34} + a_{24}a_{31}a_{13} - a_{24}a_{33}a_{11} \end{aligned} \right\} \quad (7-21)$$

系数 P_1 、 P_2 、 P_3 和 P_4 为实数, 它们取决于扰动运动方程组的系数。

特征方程有四个根: λ_1 、 λ_2 、 λ_3 、 λ_4 。如果四个根都不相同(对于导弹常是如此), 则每一个根 $\lambda_i (i=1, 2, 3, 4)$ 对应方程组(7-16)有如下形式的特解

$$\left. \begin{aligned} \Delta V_i &= A_i e^{\lambda_i t}, & \Delta \vartheta_i &= B_i e^{\lambda_i t}, \\ \Delta \theta_i &= C_i e^{\lambda_i t}, & \Delta \alpha_i &= D_i e^{\lambda_i t} \end{aligned} \right\} \quad (7-22)$$

方程组(7-16)的通解将是四个特解之和, 即

$$\left. \begin{aligned} \Delta V &= A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + A_3 e^{\lambda_3 t} + A_4 e^{\lambda_4 t} \\ \Delta \vartheta &= B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} + B_3 e^{\lambda_3 t} + B_4 e^{\lambda_4 t} \\ \Delta \theta &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t} + C_4 e^{\lambda_4 t} \\ \Delta \alpha &= D_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 e^{\lambda_2 t} + D_3 e^{\lambda_3 t} + D_4 e^{\lambda_4 t} \end{aligned} \right\} \quad (7-23)$$

因为特征方程系数 P_1 、 P_2 、 P_3 和 P_4 为实数, 所以该方程的根 λ_1 、 λ_2 、 λ_3 、 λ_4 可能是实数, 也可能是共轭复数。因此, 自由扰动运动只能有下列几种情况:

1. 四个根均为实数

这时导弹的自由扰动运动由四个非周期运动组成。对应于正根的运动参数随着时间增长而增大, 对应于负根的运动参数将随时间增长而减小。四个根中即使有一个是正根, 则所有偏量 ΔV 、 $\Delta \vartheta$ 、 $\Delta \theta$ 和 $\Delta \alpha$ 均随时间的增长而无限增大。

2. 两个根为实数和两个根为共轭复数

一对共轭复根 $\lambda_1 = x + i\nu$ 和 $\lambda_2 = x - i\nu$ 与下列形式的特解相对应

$$\Delta \vartheta_{1,2} = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t}$$

式中 B_1 、 B_2 ——常数 (共轭复数)

$$B_1 = a - bi, \quad B_2 = a + bi。$$

利用欧拉公式

$$\left. \begin{aligned} e^{i\nu t} + e^{-i\nu t} &= 2\cos\nu t \\ e^{i\nu t} - e^{-i\nu t} &= 2i\sin\nu t \end{aligned} \right\} \quad (7-24)$$

将与 λ_1 和 λ_2 相对应的特解变换一下, 则有

$$\begin{aligned} \Delta \vartheta_{1,2} &= B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} = (a - bi)e^{(x+i\nu)t} + (a + bi)e^{(x-i\nu)t} \\ &= ae^{x\tau}(e^{i\nu\tau} + e^{-i\nu\tau}) - ibe^{x\tau}(e^{i\nu\tau} - e^{-i\nu\tau}) \\ &= 2e^{x\tau}(a\cos\nu\tau + b\sin\nu\tau) = Be^{x\tau}\sin(\nu\tau + \psi) \end{aligned} \quad (7-25)$$

式中 B 、 ψ ——新的任意常数; 其中

$$B = 2\sqrt{a^2 + b^2}, \quad \psi = \arctan \frac{a}{b} \quad (7-26)$$

于是一对共轭复根给出了具有振幅为 $Be^{x\tau}$, 角频率为 ν 和相位为 ψ 的振荡运动。当 $x > 0$ 时, 振幅 $Be^{x\tau}$ 随时间的增长而增大; 当 $x < 0$ 时, $Be^{x\tau}$ 将是衰减的; 当 $x = 0$ 时, 振幅不随时间而变, 见图 7-1。在这种情况下, 导弹自由扰动运动由两个非周期运动和一个振荡运动叠加而成, 即

$$\left. \begin{aligned} \Delta V &= A' e^{x\tau} \sin(\nu\tau + \psi_1) + A_3 e^{\lambda_3 t} + A_4 e^{\lambda_4 t} \\ \Delta \vartheta &= B' e^{x\tau} \sin(\nu\tau + \psi_2) + B_3 e^{\lambda_3 t} + B_4 e^{\lambda_4 t} \\ \Delta \theta &= C' e^{x\tau} \sin(\nu\tau + \psi_3) + C_3 e^{\lambda_3 t} + C_4 e^{\lambda_4 t} \\ \Delta \alpha &= D' e^{x\tau} \sin(\nu\tau + \psi_4) + D_3 e^{\lambda_3 t} + D_4 e^{\lambda_4 t} \end{aligned} \right\} \quad (7-27)$$

如果在实根或复根实部中, 有一个符号为正, 则增量 ΔV 、 $\Delta \vartheta$ 、 $\Delta \theta$ 、 $\Delta \alpha$ 将随时间的增长而增大。

3. 四个根为两对共轭复根

这时导弹的自由扰动运动由两个振荡运动叠加而成,

即

$$\left. \begin{aligned} \Delta V &= A'e^{\nu t}\sin(\nu t + \psi_1) + A''e^{\eta t}\sin(\eta t + \gamma_1) \\ \Delta \vartheta &= B'e^{\nu t}\sin(\nu t + \psi_2) + B''e^{\eta t}\sin(\eta t + \gamma_2) \\ \Delta \theta &= C'e^{\nu t}\sin(\nu t + \psi_3) + C''e^{\eta t}\sin(\eta t + \gamma_3) \\ \Delta \alpha &= D'e^{\nu t}\sin(\nu t + \psi_4) + D''e^{\eta t}\sin(\eta t + \gamma_4) \end{aligned} \right\} \quad (7-28)$$

在这种情况下, 如果任何一个复根的实部为正值, 则增量 ΔV 、 $\Delta \vartheta$ 、 $\Delta \theta$ 、 $\Delta \alpha$ 将随时间的增长而增大。

总之, 导弹运动的纵向稳定性可以由特征方程(7-20)的根来描述, 即:

(1) 所有实根或复根的实部都是负的, 则导弹运动是稳定的;

(2) 只要有一个实根或一对复根的实部为正, 则导弹运动是不稳定的;

(3) 在所有实根或复根的实部中, 只要有一个等于零而其余均为负, 则称导弹为中立稳定的。

也就是说, 如果特征方程诸根均位于复平面上虚轴的左边, 则扰动运动是衰减的, 也就是稳定的。反之, 则是不稳定的。举例说明如下:

例 7-1 某地空导弹在 $H=5\,000\text{ m}$ 高度上飞行, 飞行速度 $V=641\text{ m/s}$, 动力系数由计算得到为下列数值: $a_{11}=-0.003\,98\text{ s}^{-1}$, $a_{13}=-7.73\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $a_{14}=-32.05\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $a_{21}\approx 0$, $a_{22}=-1.01\text{ s}^{-1}$, $a_{24}=-102.2\text{ s}^{-2}$, $a'_{24}=-0.153\,3\text{ s}^{-1}$, $a_{25}=-67.2\text{ s}^{-2}$, $a_{31}=0.000\,061\,5\text{ s}^{-1}$, $a_{33}=-0.009\,41\text{ s}^{-1}$, $a_{34}=1.152\text{ s}^{-1}$, $a_{35}=0.014\,35\text{ s}^{-1}$ 。

根据式(7-20)、(7-21)得到特征方程式为

$$\lambda^4 + 2.329\lambda^3 + 103.385\lambda^2 + 1.375\lambda - 0.044\,8 = 0$$

求得根值为

$$\lambda_{1,2} = \chi + i\nu = -1.158 \pm i10.1, \quad \lambda_3 = -0.028\,5, \quad \lambda_4 = 0.015\,2$$

特征方程的根为一对具有负实部的共轭复根, 一个负小实根和一个正小实根。因此, 导弹弹体运动具有一个小的不稳定根。

例 7-2 某反坦克导弹在贴近地面并接近水平飞行的某时刻, 飞行速度 $V=118\text{ m/s}$, 动力系数由计算得到为下列数值: $a_{11}=-0.110\,2\text{ s}^{-1}$, $a_{13}=-9.786\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $a_{14}=-17.256\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $a_{21}=-0.000\,487\text{ m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$, $a_{22}=-1.341\,5\text{ s}^{-1}$, $a_{24}=-126.78\text{ s}^{-2}$, $a'_{24}\approx 0$, $a_{25}=-16.508\text{ s}^{-2}$, $a_{31}=0.001\,62\text{ s}^{-1}$, $a_{33}=0.005\,82\text{ s}^{-1}$, $a_{34}=1.476\,4\text{ s}^{-1}$, $a_{35}=0.019\,35\text{ s}^{-1}$ 。

根据式(7-20)、(7-21)得到特征方程式为

$$\lambda^4 + 2.922\lambda^3 + 129.07\lambda^2 + 13.426\lambda + 1.922 = 0$$

求得根值为

$$\lambda_{1,2} = -1.409\,05 \pm i11.259\,5, \quad \lambda_{3,4} = -0.051\,95 \pm i0.110\,6$$

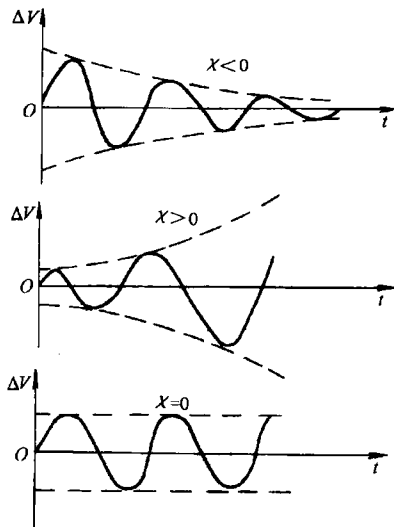


图 7-1 不同 χ 所确定的扰动运动特性

特征方程的根是两对具有负实部的共轭复根, 因此, 导弹弹体运动是稳定的。

例 7-3 某岸对舰导弹在高度 $H=100\text{ m}$ 接近水平等速飞行的某时刻, 弹道倾角 $\theta=-0.69^\circ$, 飞行速度 $V=312.7\text{ m/s}$, 动力系数由计算得到为下列数值: $a_{11}=-0.006\ 01\text{ s}^{-1}$, $a_{13}=-9.8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $a_{14}=-0.064\ 7\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $a_{21}=-0.007\ 697\text{ m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$, $a_{22}=-2.125\ 6\text{ s}^{-1}$, $a_{24}=-45.397\ 3\text{ s}^{-2}$, $a'_{24}=-0.571\ 6\text{ s}^{-1}$, $a_{31}=0.000\ 071\ 07\text{ m}^{-1}$, $a_{33}=0$, $a_{34}=0.943\text{ s}^{-1}$, $a_{35}=0.113\ 5\text{ s}^{-1}$ 。

根据式(7-20)、(7-21)得到特征方程式为

$$\lambda^4 + 3.646\lambda^3 + 47.424\lambda^2 + 0.264\ 8\lambda - 0.039\ 2 = 0$$

求得根值为

$$\lambda_{1,2} = -1.823 \pm i6.64, \quad \lambda_3 = -0.031\ 67, \quad \lambda_4 = 0.026\ 06$$

特征方程的根是一对具有负实部的共轭复根, 一个负小实根和一个正小实根。因此, 导弹弹体运动具有一个小的不稳定根。

例 7-4 某无人驾驶飞行器, 飞行高度 $H=18\ 000\text{ m}$, 飞行速度 $V=200\text{ m/s}$, 动力系数由计算得到为下列数值: $a_{11}=-0.007\ 4\text{ s}^{-1}$, $a_{13}=9.8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $a_{14}=-9.17\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $a_{21}=-0.001\text{ m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$, $a_{22}=-0.28\text{ s}^{-1}$, $a_{24}=-5.9\text{ s}^{-2}$, $a'_{24}=0$, $a_{31}=0.000\ 66\text{ m}^{-1}$, $a_{33}=0$, $a_{34}=0.47\text{ s}^{-1}$ 。

根据式(7-20)、(7-21)得到飞行器的特征方程为

$$\lambda^4 + 0.757\lambda^3 + 6.038\lambda^2 + 0.036\lambda + 0.034 = 0$$

求得根值为

$$\lambda_{1,2} = -0.376 \pm i2.426, \quad \lambda_{3,4} = -0.003 \pm i0.075$$

特征方程的根为两对具有负实部的共轭复根, 因此, 飞行器运动是稳定的。

由上述四例可以看出, 虽然导弹或飞行器的类型不同, 且具有不同的飞行高度和速度, 但表示纵向自由扰动运动型态的特征方程根却存在一定的规律性, 即一对复根的实部和虚部的绝对值远远超过另一对复根的实部和虚部的绝对值(或实根绝对值)。这一点, 对于其他型式的导弹和飞行器, 也得到了相同的结果。关于根的规律性, 在下面还要作进一步的讨论。

三、稳定性准则

在经典的自动控制理论中, 根据特征方程的系数来决定根的性质, 从而判断动力学系统的稳定性, 常用的有几种不同的方法, 如劳斯(Routh)判据, 霍尔维茨(Hurwitz)判据, 奈魁斯特判据(Nyquist)以及根轨迹法等。在分析导弹动态特性时, 如果特征方程式的阶次不高于四次, 采用霍尔维茨准则最为方便。霍尔维茨稳定判据可以用来判断以代数形式描述的特征方程式

$$\Delta(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \cdots + a_m = 0 \quad (7-29)$$

的根的符号。

霍尔维茨判据为: 要使特征方程式(7-29)所有的根都具有负实部, 必要和充分条件是霍尔维茨行列式 Δ_m 及所有主子式 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_{m-1}$ 具有同系数 a_0 一样的符号, 其中

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{m-2} & a_m \end{vmatrix}$$

即当 $a_0 > 0$ 时, $\Delta_1, \Delta_2, \cdots \Delta_m$ 都大于零。

对于阶次不高的特征方程式 ($m \leq 5$), 霍尔维茨判据的要求可以简化, 并具有如下形式

$$\left. \begin{array}{l} \text{当 } m=1 \text{ 时, } a_0 > 0, a_1 > 0 \\ \text{当 } m=2 \text{ 时, } a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0 \\ \text{当 } m=3 \text{ 时, } a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, \Delta_2 > 0 \\ \text{当 } m=4 \text{ 时, } a_0 > 0, a_1 > 0, \cdots, a_4 > 0, \Delta_3 > 0 \\ \text{当 } m=5 \text{ 时, } a_0 > 0, a_1 > 0, \cdots, a_5 > 0, \Delta_4 > 0 \end{array} \right\} \quad (7-30)$$

例 7-5 由例 7-2 中特征方程式

$$\lambda^4 + 2.922\lambda^3 + 129.07\lambda^2 + 13.426\lambda + 1.922 = 0$$

可见, 当 $m=4$ 时, $a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$

$$\Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 = 4866.85 > 0$$

满足霍尔维茨稳定判据条件, 特征方程根 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 具有负的实数部分, 因此导弹的未扰动运动是稳定的。

四、飞行弹道的稳定性

如果导弹弹体是稳定的, 则当遇到外界的偶然干扰 (如阵风等) 且当干扰消失后, 运动参数的偏量 $\Delta V, \Delta \vartheta, \Delta \theta, \Delta \alpha$ 将逐渐趋于零。但是, 在操纵机构固定的情况下, 飞行弹道是否能恢复到原来的弹道上去? 现在来分析这个问题。

由纵向扰动运动方程组 (6-41) 中第 5 和 6 式得到相应的扰动运动方程组如下

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\Delta y}{dt} = \sin\theta\Delta V + \cos\theta\Delta\theta \\ \frac{d\Delta x}{dt} = \cos\theta\Delta V - V\sin\theta\Delta\theta \end{array} \right\} \quad (7-31)$$

在已知起始扰动 (如 $\Delta\alpha_0$) 条件下, 通过以上各节所述的扰动运动方程组, 可以求出运动参数的偏量 $\Delta V(t)$ 和 $\Delta\theta(t)$, 然后代入方程组 (7-31) 中, 就很容易通过数值积分法求出弹道的偏离量 Δy 和 Δx

$$\left. \begin{array}{l} \Delta y = \int_{t_0}^t (\sin\theta\Delta V + V\cos\theta\Delta\theta)dt \\ \Delta x = \int_{t_0}^t (\cos\theta\Delta V - V\sin\theta\Delta\theta)dt \end{array} \right\} \quad (7-32)$$

当 $t=t_0$ 时, $\Delta V=0, \Delta\theta=0 (\Delta\alpha_0 \neq 0)$;

当 $t=t_1$ 时, $\Delta V \neq 0, \Delta\theta \neq 0$, 则 $\Delta y \neq 0, \Delta x \neq 0$;

当时间 t 继续增加时, 偏离量 $\Delta V, \Delta \vartheta, \Delta \theta$ 和 $\Delta \alpha$ 趋于零时, 而 $\Delta x, \Delta y$ 并不趋于零, 亦即弹道有偏离。

因此,导弹弹体对于弹道参数 x 和 y (z 也同样)并不具有稳定性。在控制飞行中,弹道的稳定性一定要依靠制导系统(亦称轨迹控制系统)加以保证;而在无控飞行时,则会由于干扰而造成弹道的偏离。

五、振荡周期及衰减程度

特征方程的每一对共轭复根 $\lambda_{1,2} = \chi + i\nu$ 均与方程(7-16)的一个特解相对应,如

$$\Delta\alpha = De^{x}\sin(\nu t + \phi)$$

式中 ν ——振荡角频率(rad/s)。

而振荡周期

$$T = 2\pi/\nu \quad (7-33)$$

振荡衰减(发散)的程度通常由振幅(如果是实根则为扰动偏量值)减小一半(或发散一倍)的时间 $\Delta t = t_2 - t_1$ 来表示。

当 $t = t_1$ 时,振幅 $|\Delta\alpha_1| = De^{x_1}$;

当 $t = t_2$ 时,振幅 $|\Delta\alpha_2| = De^{x_2}$ 。

如果 $\chi < 0$, 则可从条件

$$\frac{|\Delta\alpha_2|}{|\Delta\alpha_1|} = e^{x(t_2 - t_1)} = \frac{1}{2} \quad (7-34)$$

求出 Δt 的大小,即

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{-\ln 2}{\chi} = \frac{-0.693}{\chi} \quad (7-35)$$

则 $|\chi|$ 愈大时,衰减的程度愈大。如果 $\chi > 0$, 在不稳定的情况下,振幅增大一倍的时间则为

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{0.693}{\chi} \quad (7-36)$$

特征方程的实根 $\lambda = \chi$ 与方程(7-16)的特解相对应,如

$$\Delta\alpha = De^{x}$$

在非周期运动情况下,同样可以用公式(7-35)和(7-36)计算衰减(发散)程度。

振荡衰减(发散)程度也可以由一个周期内幅值的衰减(发散)程度来表示。如

$$\frac{De^{x(n+1)T}}{De^{x n T}} = e^{xT} = e^{2\pi\chi/\nu} \quad (7-37)$$

式中 $De^{x(n+1)T}$ 和 $De^{x n T}$ 为相邻两周期所对应的瞬时幅值。 $|\chi/\nu|$ 数值越大,在一个周期中幅值衰减(发散)也越厉害。例 7-1~7-4 中的振荡周期、振幅减小一半时间、一个周期内幅值的衰减程度的计算结果列于表 7-3 中。

表 7-3 振荡周期和衰减程度计算结果

例 题 序 号	特征方程的根	振荡周期/s	振幅减少一半时间/s	在一个周期内的衰减程度
7-1 某地空导弹	$-1.158 \pm i0.1$ -0.0285 0.0152	0.622	0.599 24.316 45.592(增加)	0.487
7-2 某反坦克导弹	$-1.40905 \pm i11.2595$ $-0.05195 \pm i0.1106$	0.558 56.810	0.492 13.34	0.456 0.0523

(续表)

例 题 序 号	特征方程的根	振荡周期/s	振幅减少一半时间/s	在一个周期内的衰减程度
7-3 某岸舰导弹	$-1.823 \pm i6.64$ -0.03167 $+0.02606$	0.946	0.38 21.88 26.59	0.178
7-4 某无人驾驶飞行器	$-0.376 \pm i2.426$ $-0.003 \pm i0.075$	2.589 83.78	1.843 231.0	0.378 0.778

六、短周期运动和长周期运动

由表 7-3 可知, 导弹的自由扰动运动由快衰减和慢衰减两种不同形式的运动叠加而成。

对各种导弹及其他飞行器的计算和飞行试验结果表明, 一对复根的实部和虚部的绝对值均远远超过另一对复根的实部和虚部(或两个实根)的绝对值。复根的实数大小表征扰动运动的衰减程度, 而虚数的大小则表征振荡频率。由此可见, 一对大复根(就其模值而言)对应于快衰减运动, 而一对小复根则与慢衰减运动相对应。不论扰动运动具有怎样的性质(由两个振荡运动相结合或由四个非周期运动相结合)。上面所述的根与根之间的关系的结论总是正确的。

如果导弹纵向自由扰动运动由两个振荡运动所组成(如表 7-3 中例 7-2 和 7-4), 则一对大复根(λ_1, λ_2)所对应的高频快衰减运动, 称为短周期运动。一对小复根(λ_3, λ_4)所对应的低频慢衰减运动称为长周期运动。通常短周期运动由于衰减很快与快衰减的非周期运动实际上没有多大差别。此外, 由于短周期运动用得更多些, 因此快衰减的非周期运动也人为地称为短周期运动。

七、特征方程根的近似计算

用普通代数方法解四次或四次以上方程式的根是相当繁琐的, 通常都是采用不同的近似计算方法, 这些在数值计算方法专门书籍中已有介绍, 这里仅简要地介绍两种应用上较为简便的方法。

1. 林氏法

特征方程是代数方程, 其阶次由所研究问题的性质来决定, 例如纵向扰动运动的特征方程为四阶, 如果再考虑自动驾驶仪的动态方程, 则所得特征方程可能高于四阶。因此, 特征方程可由一般形式的代数方程来表示

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-2} \lambda^2 + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (7-38)$$

以 a_0 除以系数, 方程则变为

$$\lambda^n + A_1 \lambda^{n-1} + A_2 \lambda^{n-2} + \cdots + A_{n-2} \lambda^2 + A_{n-1} \lambda + A_n = 0 \quad (7-39)$$

$$\text{式中} \quad A_1 = \frac{a_1}{a_0}, \quad A_2 = \frac{a_2}{a_0}, \quad \cdots, \quad A_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_0}, \quad A_n = \frac{a_n}{a_0} \quad (7-40)$$

一次近似时, 取该式后三项, 即

$$\lambda^2 + \frac{A_{n-1}}{A_{n-2}} \lambda + \frac{A_n}{A_{n-2}} = 0 \quad (7-41)$$

将式(7-39)除以式(7-41), 于是有

$$\begin{array}{r}
\lambda^2 + \frac{A_{n-1}}{A_{n-2}}\lambda + \frac{A_n}{A_{n-1}} \sqrt{\frac{\lambda^{n-2} + A'_1\lambda^{n-3} + \dots + A'_{n-2}}{\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + A_2\lambda^{n-2} + \dots + A_{n-2}\lambda^2 + A_{n-1}\lambda + A_n}} \\
\sqrt{\lambda^n + \frac{A_{n-1}}{A_{n-2}}\lambda^{n-1} + \frac{A_n}{A_{n-2}}\lambda^{n-2}} \\
\hline
\begin{array}{ccc}
\times & \times & A_3\lambda^{n-3} \\
\times & \times & \times
\end{array} \\
\hline
\begin{array}{ccc}
& \times & \times & A_4\lambda^{n-4} \\
& \times & \times & \times
\end{array} \\
\hline
\begin{array}{ccc}
& & \dots & \dots \\
& & \dots & \dots
\end{array} \\
\hline
\begin{array}{ccc}
& & R_1\lambda^2 & R_2\lambda & A_n \\
& & \times & \times & \times
\end{array} \\
\hline
& & \times & \times & \text{余式}
\end{array} \quad (7-42)$$

如果余式不等于零,说明(7-41)式不是代数方程(7-39)的因式,这时再进行第二次近似,取除式为

$$\lambda^2 + \frac{R_2}{R_1}\lambda + \frac{A_n}{R_1} = 0 \quad (7-43)$$

再将式(7-39)除以式(7-43),如果剩余式极小,则可将式(7-43)看成式(7-39)的一个因式,从而求出它的第一对根值。如果余式仍相当大,则应按上述步骤进行第三次近似,依次类推,一直求到第一对根满足要求为止。求出一对根值后,式(7-42)的商式方程就比原来的方程降低了两次,然后再以此商式作为被除式,按同样方法就可求出第二对根,依次类推,最后可以求出全部根值。

例 7-6 用林氏法求例 7-2 特征方程的根。

例 7-2 的特征方程式为

$$\lambda^4 + 2.922\lambda^3 + 129.07\lambda^2 + 13.426\lambda + 1.922 = 0 \quad (7-44)$$

第一次近似取出后三项作为除式,并将各系数除以 129.07,则得

$$\lambda^2 + 0.104\lambda + 0.0149 = 0 \quad (7-45)$$

以式(7-45)除式(7-44),则得

$$\begin{array}{r}
\lambda^2 + 0.104\lambda + 0.0149 \sqrt{\frac{\lambda^2 + 2.818\lambda + 128.762}{\lambda^4 + 2.922\lambda^3 + 129.07\lambda^2 + 13.426\lambda + 1.922}} \\
\sqrt{\lambda^4 + 0.104\lambda^3 + 0.0149\lambda^2} \\
\hline
2.818\lambda^3 + 129.055\lambda^2 + 13.426\lambda \\
2.818\lambda^3 + 0.293\lambda^2 + 0.042\lambda \\
\hline
128.762\lambda^2 + 13.384\lambda + 1.922 \\
128.762\lambda^2 + 13.391\lambda + 1.9186 \\
\hline
-0.007\lambda + 0.0034
\end{array} \quad (7-46)$$

从式(7-46)看出,所得余式已接近于零,但为了得出更为精确的结果,可作第二次近似,为此取下式为除式

$$128.762\lambda^2 + 13.384\lambda + 1.922 \quad (7-47)$$

并将各系数除以 128.762, 则得

$$\lambda^2 + 0.1039\lambda + 0.01493 \quad (7-48)$$

以此式再除式(7-44), 得

$$\begin{array}{r} \lambda^2 + 0.1039\lambda + 0.01493 \sqrt{\frac{\lambda^2 + 2.8181\lambda + 128.76227}{\lambda^4 + 2.922\lambda^3 + 129.07\lambda^2 + 13.426\lambda + 1.922}} \\ \hline 2.8181\lambda^3 + 129.05507\lambda^2 + 13.426\lambda \\ 2.8181\lambda^3 + 0.2928\lambda^2 + 0.0421\lambda \\ \hline 128.76227\lambda^2 + 13.3839\lambda + 1.922 \\ 128.76227\lambda^2 + 13.3784\lambda + 1.9224 \\ \hline 0.0055\lambda - 0.0004 \end{array} \quad (7-49)$$

所得余式更接近于零,其结果已足够精确,因此特征方程式(7-44)可以分解为下式

$$(\lambda^2 + 2.818\lambda + 128.76227)(\lambda^2 + 0.1039\lambda + 0.01493) = 0 \quad (7-50)$$

从而得到特征方程式的两对根为

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -1.40905 \pm i11.2595 \\ \lambda_{3,4} &= -0.05195 \pm i0.1106 \end{aligned}$$

由例 7-6 说明用林氏法求根是比较简便的,它适用于求解三次以上的任何代数方程。对于具有一对大根和一对小根的四次代数方程,求解更为方便,但有时也会遇到余式消失很慢而需要作多次近似的情况。

2. 近似求根法

由于导弹的纵向扰动运动的典型情况是特征方程具有两个模值很大的根(λ_1 和 λ_2)和两个模值很小的根(λ_3 和 λ_4),因此,最简单的近似求根可以化为求解两个二次方程。如特征方程为

$$\lambda^4 + P_1\lambda^3 + P_2\lambda^2 + P_3\lambda + P_4 = 0$$

对于模值很大的根(λ_1 和 λ_2), 由于

$$\lambda^4 + P_1\lambda^3 + P_2\lambda^2 \gg P_3\lambda + P_4$$

因此可近似由二次方程式

$$\lambda^2 + P_1\lambda + P_2 = 0 \quad (7-51)$$

来确定。对于模值很小的根(λ_3 和 λ_4), 由于

$$\lambda^4 + P_1\lambda^3 \ll P_2\lambda^2 + P_3\lambda + P_4$$

因此可近似由二次方程式

$$P_2\lambda^2 + P_3\lambda + P_4 = 0 \quad (7-52)$$

来确定。

如果忽略速度偏差 ΔV 和重力对扰动运动大根的影响,则 $a_{33}=a_{11}=a_{31}=0$, 式(7-51)中

P_1 、 P_2 可简化为

$$P_1 \approx a_{34} - a_{22} - a'_{24} \quad (7-53)$$

$$P_2 \approx -a_{24} - a_{22}a_{34} \quad (7-54)$$

则式(7-51)可写为

$$\lambda^2 + (a_{34} - a_{22} - a'_{24})\lambda + (-a_{24} - a_{22}a_{34}) = 0 \quad (7-55)$$

例 7-7 由例 7-2 中特征方程求近似根值。

已知例 7-2 的特征方程式系数 $P_1=2.922$, $P_2=129.07$, 由式(7-51)得

$$\lambda^2 + 2.922\lambda + 129.07 = 0$$

求得

$$\lambda_{1,2} = -1.461 \pm 11.265 \, 7$$

由式(7-52)得

$$129.07\lambda^2 + 13.426\lambda + 1.922 = 0$$

求得

$$\lambda_{3,4} = -0.052 \pm i0.1104$$

由此可见，用此法计算根的近似值与例 7-6 中计算得到的根的精确值相当接近。

计算特征方程的根值，也可应用电子数字计算机求解。下列为四阶特征方程的近似求根法 C 语言程序：

计算特征方程根值的源程序

```
# include "math. h"
# include "stdio. h"

main()
{
float P[4],A[3],B[3],R[2][2],Q[2][2];
float A11,A13,A14,A21,A22,A24,A241,A25,A31,A33,A34,A35;
FILE * fp, * fpout;
int i;

if((fp=fopen("a. dat","rt"))==NULL)exit(1);
if((fpout=fopen("out. dat","wb"))==NULL)exit(1);
fscanf (fp,"%f,%f,%f,%f,%f,%f,%f,%f,%f,%f,%f,%f,%f,%f",&A11,&A13,&A14,&A21,
&A22,&A24,&A241,&A25,&A31,&A33,&A34,&A35);
P[0]=-A33+A34-A22-A241-A11;
P[1]=A31*A14-A31*A13+A22*A33*-A22*A34-A24+A33*A241+A33*A11
-A34*A11+A22*A11+A241*A11;
P[2]=-A21*A14-A31*A22*A14+A22*A31*A13+A241*A31*A13+A24*A33
-A22*A33*A11+A22*A34*A11+A24*A11-A33*A11*A241;
P[3]=A21*A33*A14-A13*A21*A34+A24*A31*A13-A24*A33*A11;
A[0]=1;
A[1]=P[0];
```

```

A[2]=P[1];
for(i=1;i<=3;i++)
    B[i-1]=P[i];
PR2(A,R);
PR2(B,Q);
fprintf(fpout,"P=    ");
for(i=0;i<=3;i++)
    fprintf(fpout,"%1f ",P[i]);
fprintf(fpout,"\n");
fprintf(fpout,"ROOT=    ")
fprintf(fpout,"%1f+i%1f %1f+i%1f\n",R[0][0],R[1][0],R[0][1],R[1][1]);
fprintf(fpout,"%1f+i%1f %1f+i%1f\n",Q[0][0],Q[1][0],Q[0][1],Q[1][1]);
return;
}
PR2(floatP[3],float R[2][2])
{
float b2,c2,d2;

R[1][0]=0.0;
R[1][1]=0.0;
b2=-P[1]/P[0]*0.5;
R[0][0]=b2;
R[0][1]=b2;
c2=P[2]/P[0];
d2=b2*b2-c2;
if(d2>0)
{
    R[0][0]=b2+sqrt(d2);
    R[0][1]=b2-sqrt(d2);
}
else
{
    R[1][0]=sqrt(-d2);
    R[1][1]=-R[1][0];
}
return;
}

```

输入数据:

-0.1102 -9.786 -17.256
 -0.000487 -1.3415 -126.78 0. -16.508
 0.00162 0.00582 1.4764 0.01935

结果输出:

P=2.922280 129.050568 13.426060 1.921584
 ROOT=-1.461140+i 11.265684 -1.461140+i -11.265684
 -0.052019+i 0.110382 -0.052019+i -0.110382

§ 7-3 纵向扰动运动分解为两个阶段

一、纵向扰动运动分解为两个阶段

对于不同类型的导弹和其他飞行器,在不同的扰动情况下,其自由扰动运动方程的解表明:不仅特征方程式根的数值具有一定的规律性,而且解的系数也存在着规律性。

假设表达式(7-23)(λ_i 均为实根)、(7-27)、(7-28)中快衰减的各项中的常数对应为 A_1 、 B_1 、 C_1 、 D_1 、 A_2 、 B_2 、 C_2 、 D_2 及 A' 、 B' 、 C' 、 D' ,而慢衰减的各项中常数对应为 A_3 、 B_3 、 C_3 、 D_3 、 A_4 、 B_4 、 C_4 、 D_4 、 A'' 、 B'' 、 C'' 、 D'' 。因为 $\sin(\nu t + \psi) \leq 1$ 和 $e^x \leq 1$ (若弹体角运动是稳定的),在初始时刻($t=0$)以及以后的时间中,解中任何项如 Ae^x 或者 $A'e^x \sin(\nu t + \psi)$ 的数值在很大程度上取决于解的系数。任何一个参数的解都同时包含了长周期运动和短周期运动,但是按照相加项前面系数的大小不同,所起的作用并不相同。

对应于 ΔV 的表达式中,快衰减项的系数 $|A_1|$ 、 $|A_2|$ 或 $|A'|$ 比慢衰减项的系数 $|A_3|$ 、 $|A_4|$ 或 $|A''|$ 要小得多,如

$$\Delta V = A'e^x \sin(\nu t + \psi_1) + A''e^{\xi t} \sin(\eta t + \gamma_1)$$

其中 $|\chi| \gg |\xi|$, $\nu \gg \eta$

而 $|A'| \ll |A''|$

因此, ΔV 的变化主要取决于慢衰减项。

对应于 $\Delta \vartheta$ 和 $\Delta \theta$ 的表达式中,快衰减项和慢衰减项都起着重要的作用。

对应于 $\Delta \alpha$ 的表达式中,快衰减项的系数 D_1 、 D_2 和 D' 比慢衰减项的系数 D_3 、 D_4 和 D'' 要大得多,如

$$\Delta \alpha = D'e^x \sin(\nu t + \psi_4) + D''e^{\xi t} \sin(\eta t + \gamma_4)$$

而 $|D'| \gg |D''|$

因此, $\Delta \alpha$ 的变化主要取决于快衰减项。

例 7-8 由例 7-2 可知某反坦克导弹在贴近地面且接近水平飞行的某时刻,速度 $V=118$ m/s,特征方程式的根为

$$\lambda_{1,2} = -1.40905 \pm i11.2595, \quad \lambda_{3,4} = -0.05195 \pm i0.1106$$

若导弹受偶然干扰的作用,使攻角初始偏差 $\Delta \alpha_0 = 2^\circ$,弹道倾角初始偏差 $\Delta \theta_0 = -2^\circ$,则自由扰动运动解的表达式如下

$$\Delta V(t) = 0.052e^{-1.409t} \sin(645.2t + 169.54^\circ) + 3.056e^{-0.052t} \sin(6.337t - 0.21^\circ)$$

$$\begin{aligned}\Delta\vartheta(t) &= 1.994^\circ e^{-1.409t} \sin(645.2t + 82.8^\circ) - \\ &\quad 2.229^\circ e^{-0.052t} \sin(6.337t + 62.52^\circ) \\ \Delta\theta(t) &= 0.265^\circ e^{-1.409t} \sin(645.2t - 6.7^\circ) - \\ &\quad 2.212^\circ e^{-0.052t} \sin(6.337t + 62.2^\circ) \\ \Delta\alpha(t) &= 1.9998^\circ e^{-1.409t} \sin(645.2t + 89.66^\circ) - \\ &\quad 0.0034^\circ e^{-0.052t} \sin(6.337t + 1.53^\circ)\end{aligned}$$

将以上表达式画成扰动运动过程的曲线如图 7-2。扰动运动的最初阶段 ΔV 、 $\Delta\vartheta$ 、 $\Delta\theta$ 、 $\Delta\alpha$ 的变化见图 7-3。

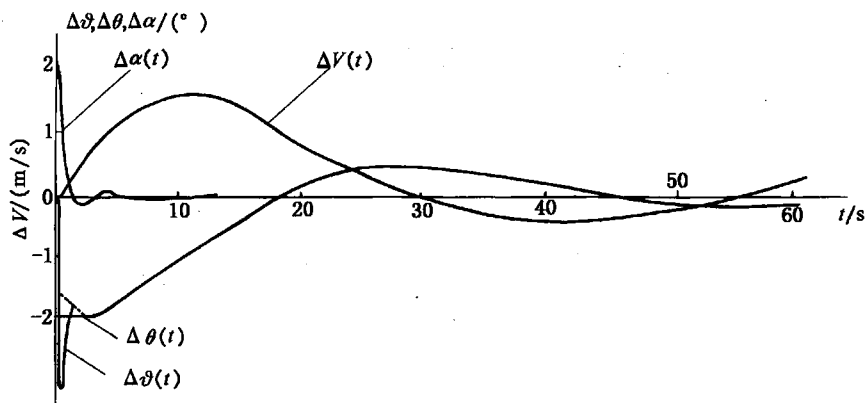


图 7-2 导弹纵向自由扰动运动

例中短周期运动的周期为 0.558 s，振幅减小一半的时间等于 0.492 s；长周期运动的周期为 57.14 s，振幅减少一半的时间为 13.34 s。

在所讨论的例子中。有

$$\begin{aligned}|A'| &= 0.052, & |A''| &= 3.048, & |A'| &\ll |A''|; \\ |B'| &= 1.994, & |B''| &= 2.229, & |B'| &\text{和 } |B''| \text{ 数量级相近}; \\ |C'| &= 0.265, & |C''| &= 2.212, & |C'| &\text{和 } |C''| \text{ 数量级相近}; \\ |D'| &= 1.9998, \\ |D''| &= 0.0034, & |D'| &\gg |D''|.\end{aligned}$$

由图 7-3 看出，具有周期 0.588 s 的短周期运动很快就衰减了，经过几秒钟以后，偏量 ΔV 、 $\Delta\vartheta$ 、 $\Delta\theta$ 、 $\Delta\alpha$ 中一对大根所对应的项都减到零的附近，而具有周期 56.81 s 的长周期运动衰减是很慢的。可见，导弹自由扰动运动可以分为两个阶段。在第一阶段里，快衰减的短周期运动占主要地位，偏量 $\Delta\vartheta$ 、 $\Delta\theta$ 、 $\Delta\alpha$ 的变化剧烈，而偏量 ΔV 的变化并不大，在第一阶段终结前，偏量 ΔV 、 $\Delta\vartheta$ 、 $\Delta\theta$ 、 $\Delta\alpha$ 表

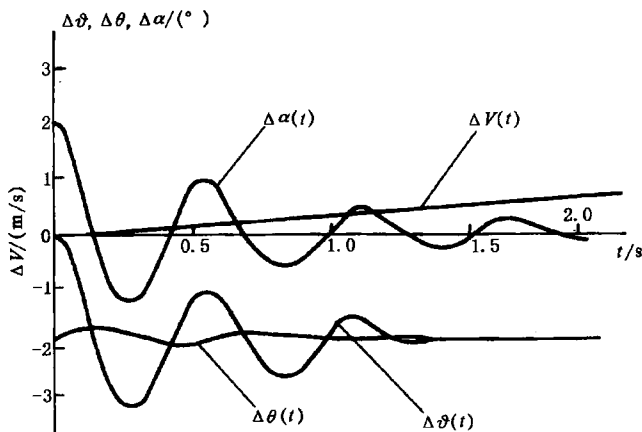


图 7-3 导弹纵向自由扰动运动（运动的前几秒）

达式中一对大根所对应的项已经减小到零。偏量 $\Delta\alpha$ 主要取决于这些项，因此到第一阶段结束时，它实际上已经衰减掉。在第二阶段里，只有慢衰减的长周期运动存在，在这一阶段的时间里，主要是偏量 ΔV 、 $\Delta\vartheta$ 和 $\Delta\theta$ 变化着，而具有不大振幅的 $\Delta\alpha$ 实际上已经不存在了。

偏量 $\Delta\omega_z = d\Delta\vartheta/dt$ 的变化与偏量 $\Delta\alpha$ 的变化相类似，不仅在第一阶段，而且在第二阶段也是如此。

二、纵向扰动运动分解为两个阶段的物理原因

自由扰动运动分解为两个阶段的物理原因对于导弹和其他飞行器都是相同的。由于导弹旋转的惯性比较小，而受干扰后产生的干扰力矩相对地比较大，所以比较容易使导弹相对质心旋转，并很快改变攻角。而在同样时间内，导弹飞行速度的惯性比较大，而受干扰后产生的干扰力相对地又比较小，因此导弹的速度变化比较小。为了证实这一点，只要计算一下初始时刻沿弹道切线方向的加速度偏量 $\left| \frac{d\Delta V}{dt} \right|$ 和角加速度偏量 $\left| \frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} \right|$ 的大小即可。

例如，对例 7-8 中反坦克导弹在自由扰动的初始时刻，加速度和角加速度偏量为

$$\frac{d\Delta V}{dt} = a_{14}\Delta\alpha + a_{13}\Delta\theta = (a_{14} - a_{13})\Delta\alpha = 0.26 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

$$\frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} = a_{24}\Delta\alpha = -253.56 \text{ ((}^\circ\text{)/s}^2\text{)}$$

以同样扰动情况对例 7-1 中的地空导弹，扰动初始时刻加速度及角加速度偏量为

$$\frac{d\Delta V}{dt} = -0.849 \text{ m/s}, \quad \frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} = -204.4 \text{ ((}^\circ\text{)/s}^2\text{)}$$

由此可以看到，开始沿弹道切线方向的加速度偏量非常小（在一秒钟内速度的变化量与飞行速度相比小到可以略去的程度），而在同一时刻角加速度偏量却相当大。因此，在扰动运动的初始时刻，导弹的转动总是比飞行速度变化剧烈。

当扰动作用在导弹上，如瞬时作用的阵风破坏了气动力矩的平衡，具有静稳定性的导弹的扰动运动按如下过程进行：

空气动力矩偏量 ΔM_z 引起导弹相对横轴 Oz_1 剧烈地转动，因而攻角很快改变。这时飞行速度变化得比较慢。在扰动运动的前几秒内，飞行速度来不及发生显著变化，可以认为它就等于未扰动的速度值。

攻角的偏量引起了升力的变化。如果未扰动运动以直线运动时，升力与重力的分量 $G\cos\theta$ 相等，则在扰动运动中，当升力分量大于或小于重力分量时，就会引起导弹的弹道相对未扰动弹道的偏离，其角速度 $d\theta/dt$ 由每一时刻 $Y - G\cos\theta$ 的差值来确定。

对于具有静稳定的导弹，攻角的变化是力图达到对应于给定时刻操纵机构的平衡攻角。由于有翼式导弹具有较大的阻尼，导弹的转动实际上在扰动运动最初几秒内就结束了。

第一阶段结束时，相对于导弹横轴 Oz_1 的力矩已经基本上达到平衡，攻角已与平衡攻角几乎没有差别，而角速度偏量 $\Delta\omega_z$ 也趋于零，但是俯仰角和弹道倾角 $\theta = \vartheta - \alpha$ 与其未扰动弹道上的数值还有很大差别，因此还没有达到力的平衡（推力、迎面阻力、升力和重力）。这以后导弹的运动将是长周期的、慢衰减的运动，一直进行到沿弹道法向和切向的力达到平衡为止。在长周期运动过程中，角速度偏量 $\Delta\omega_z$ 及攻角偏量 $\Delta\alpha$ 变化都不大，主要是飞行速度、俯仰角及弹道倾角的偏量在变化。

实际上在第一阶段时,即使速度偏量 ΔV 有一定数量,然而由于速度偏量 ΔV 所引起的旋转加速度偏量 $\left| \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} \right|$ 和角速度偏量 $\left| \frac{d \Delta \theta}{dt} \right|$ 仍是很小的,这由自由扰动运动方程(7-16)可知,因为动力系数 $|a_{21}| \ll |a_{24}|$ 和 $|a_{22}|$, $|a_{31}| \ll |a_{34}|$ 。如例 7-2 中反坦克导弹的动力系数

$$\begin{aligned} |a_{21}| &= 0.000\,487, & \text{而 } |a_{22}| &= 1.341\,5, & |a_{24}| &= 126.78 \\ |a_{31}| &= 0.001\,62, & \text{而 } |a_{34}| &= 1.476\,4 \end{aligned}$$

例 7-1 中地空导弹的动力系数

$$\begin{aligned} |a_{21}| &\approx 0, & \text{而 } |a_{22}| &= 1.01, & |a_{24}| &= 102.2 \\ |a_{31}| &= 0.000\,061\,5, & \text{而 } |a_{34}| &= 1.152 \end{aligned}$$

因此在第一阶段研究 $\Delta \vartheta$ 、 $\Delta \theta$ 、 $\Delta \alpha$ 变化时,可以忽略 ΔV 对它们的影响。

总之,根据上述的物理现象说明,通常可以将导弹的扰动运动分解为两个独立的阶段,在第一阶段速度不变($\Delta V=0$),仅 $\Delta \alpha$ 、 $\Delta \theta$ 、 $\Delta \omega_z$ 和 $\Delta \vartheta$ 有变化,同时第一阶段结束时, $\Delta \alpha$ 和 $\Delta \omega_z$ 都衰减掉了。在第二阶段,把 $\Delta \alpha$ 和 $\Delta \omega_z$ 看做零,只研究 ΔV 、 $\Delta \vartheta$ 、 $\Delta \theta$ 的变化。根据这样的简化,就可以分别地为每一阶段建立扰动运动简化方程。但是以上规律不能认为具有普遍意义。由于目前导弹的气动外形式样很多,扰动运动的形态并不完全相同,如静不稳定的弹道式导弹(无安定面或安定面很小)的扰动运动规律与上述的就有差别,但经过分析表明,速度变化很缓慢这一点仍然如此。所以在应用上述规律时,需要比较慎重。

三、短周期阶段的扰动运动方程组

当设计导弹及其制导系统时,只研究扰动运动短周期阶段。因为控制飞行必须控制法向力,而控制法向力是通过改变攻角和侧滑角来达到的,而攻角实际上仅在短周期阶段内变化。所以,主要研究导弹在这一阶段内对操纵机构偏转的反应。

为了简化制导系统的分析,需对导弹的纵向扰动运动现象加以简化,即只讨论速度偏量 ΔV 可以忽略的短周期扰动运动,亦即把速度看做时间的已知函数 $V(t)=V_0(t)$ 。这样的假设不会引起太大的误差。

在建立短周期扰动运动近似方程组时,由扰动运动方程组(7-2)中去掉描述 ΔV 变化的第一个方程,在其余的方程式中,令 $\Delta V=0$,于是,得到简化后的扰动运动方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} - a_{22} \frac{d \Delta \vartheta}{dt} - a_{24} \Delta \alpha - a'_{24} \dot{\Delta \alpha} \\ &= a_{25} \Delta \delta_z + a_{26} M_{gz} \\ \frac{d \Delta \theta}{dt} - a_{33} \Delta \theta - a_{34} \Delta \alpha &= a_{35} \Delta \delta_z + a_{36} F_{gy} \\ - \Delta \vartheta + \Delta \theta + \Delta \alpha &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7-56)$$

方程组(7-56)主要是描述导弹的角运动。注意该方程组的假设前提为:小扰动、未扰动的侧向参数及纵向角速度足够小,同时只适用于不超过几秒钟的短暂时间。

由式(7-56)可得短周期扰动运动的特征行列式为

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda(\lambda - a_{22}) & 0 & -(a'_{24}\lambda + a_{24}) \\ 0 & \lambda - a_{33} & -a_{34} \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 + P_1 \lambda^2 + P_2 \lambda + P_3 \lambda + P_4 \quad (7-57)$$

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= -a_{33} + a_{34} - a_{22} - a'_{24} \\ P_2 &= a_{22}(a_{33} - a_{34}) - a_{24} + a_{33}a'_{24} \\ P_3 &= a_{22}a_{33} \end{aligned} \right\} \quad (7-58)$$

同样以例 7-1~例 7-4 为例,将各动力系数代入式(7-57)和(7-58),求得短周期扰动运动特征方程式的根,并与一般情况下求得的特征方程根进行比较,见表 7-4。

表 7-4 不同简化条件特征方程根值的比较

例 题 序 号	纵向扰动运动的特征方程根	纵向短周期扰动运动特征方程根	最简化的短周期扰动运动特征方程根
7-1 某地空导弹	$\lambda_{1,2} = -1.158 \pm i10.1$ $\lambda_3 = -0.0285, \lambda_4 = 0.0152$	$\lambda_{1,2} = -1.163 \pm i10.101$ $\lambda_3 = -0.0093$	$\lambda_{1,2} = -1.081 \pm i10.9$ $\lambda_3 = 0$
7-2 某反坦克导弹	$\lambda_{1,2} = -1.409 \pm i11.26$ $\lambda_{3,4} = -0.05195 \pm i0.1106$	$\lambda_{1,2} = -1.406 \pm i11.23$ $\lambda_3 = 0.00582$	$\lambda_{1,2} = -1.409 \pm i11.26$ $\lambda_3 = 0$
7-3 某岸-舰导弹	$\lambda_{1,2} = -1.823 \pm i6.64$ $\lambda_3 = -0.03167, \lambda_4 = 0.02606$	$\lambda_{1,2} = -1.8201 \pm i6.64$ $\lambda_3 = 0$	
7-4 某无人驾驶飞行器	$\lambda_{1,2} = -0.376 \pm i2.426$ $\lambda_{3,4} = -0.003 \pm i0.075$	$\lambda_{1,3} = -0.376 \pm i2.427$ $\lambda_3 = 0$	

由表 7-4 可知,短周期扰动运动特征方程根的一对大根 $\lambda_{1,2}$ 与扰动运动特征方程根中一对大根 $\lambda_{1,2}$ 相比,其误差不超过 0.4%。对于小根 $\lambda_{3,4}$ 就有一定的差别,然而小根在短周期阶段起的作用是极其微小的。所以,用方程组(7-56)来分析短周期阶段的扰动运动是足够精确的。

现在对方程组(7-56)作进一步简化。

重力对于弹道切线转动角速度 $d\theta/dt$ 的影响取决于弹道倾角 θ 。当未扰动运动是水平运动时, $a_{33} = 0$; 当未扰动弹道倾角很大时, a_{33} 接近于 g/V 。如果系数 a_{33} 与 a_{34} 或 a_{35} 相比很小,则在扰动运动中重力对于 $\Delta\theta$ 的影响可以忽略,如有翼式导弹就是这种情况。因为

$$a_{33} = \frac{g}{V} \sin\theta \leq \frac{g}{V} = \frac{G}{mV}$$

而

$$a_{34} = \frac{P + Y^a}{mV}$$

一般飞行状态下,推力 P 大于重力 G ,对于有固定弹翼的导弹,由于机动性要求 $Y^a \gg G$,所以 a_{33} 比 a_{34} 小得多。如例 7-1 中某地空导弹的动力系数

$$a_{33} = -0.00941 \text{ s}^{-1}, \quad a_{34} = 1.152 \text{ s}^{-1}, \quad a_{35} = 0.1435 \text{ s}^{-1}$$

例 7-2 中某反坦克导弹的动力系数

$$a_{33} = 0.00582 \text{ s}^{-1}, \quad a_{34} = 1.4764 \text{ s}^{-1}, \quad a_{35} = 0.01935 \text{ s}^{-1}$$

可见 $a_{33} \ll a_{34}$ 和 a_{35} 。

但是对于弹道式导弹,由于重量 G 大,而 Y^a 又较小,当飞行速度不很大的情况下,不能略去这一项。

对于有固定弹翼的导弹,系数 a_{35} 与 a_{34} 相比也显得很小,于是在描述弹道倾角变化的方程中可以去掉 $a_{35}\Delta\delta_z$ 项(对于旋转弹翼式导弹,由于 C_y^a 与 $C_y^{\delta_z}$ 差别不大,动力系数 a_{35} 就比较大,这一项不能忽略),结果方程组(7-56)第二式可写成如下的简化形式

$$\frac{d\Delta\theta}{dt} = a_{34}\Delta\alpha + a_{36}F_{gy} \quad (7-59)$$

在方程组(7-56)的第一式中 $a'_{24}\Delta\dot{\alpha}$ 表征着洗流延迟对导弹角加速度的影响。为了简化研究,通常在该方程中去掉 $a'_{24}\Delta\dot{\alpha}$ 项,即认为洗流延迟对于运动特性没有多大影响。由例7-1~例7-4中可见

$$|a'_{24}| \ll |a_{24}| \text{ 和 } |a_{25}|$$

于是,纵向扰动运动方程组的最简化形式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} - a_{22}\frac{d\Delta\vartheta}{dt} - a_{24}\Delta\alpha &= a_{25}\Delta\delta_z + a_{26}M_{gx} \\ \frac{d\Delta\theta}{dt} - a_{34}\Delta\alpha &= a_{36}F_{gy} \\ -\Delta\vartheta + \Delta\theta + \Delta\alpha &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7-60)$$

用此方程组对例7-1及例7-2计算特征根,其结果见表7-4。由表7-4可见,对此两例用简化方程组计算误差不大。

在进行具体问题的研究时,能否忽略哪些项,一定要进行具体的分析,不能一概而论。在进行导弹动态特性研究时,引入了许多简化假设,但是,在研究新的气动外形导弹时,能否采用这些简化假设,则必须进行验证。例如现代导弹的气动特性通常是非线性的,这就要具体研究 c_y^a 、 c_y^{δ} 、 $\dots$ 、 M_z^a 等数值,能否对气动力和力矩加以线性化。另外在大扰动情况下,就不能对运动方程进行线性化,这时非线性对控制过程的影响只有通过计算机才能足够完整地加以考虑。

简化的导弹扰动运动方程组,对导弹及其制导系统的初步研究是很方便的,因果关系比较直观。没有上述的简化假设,将使导弹和制导系统的设计变得复杂。

§ 7-4 导弹弹体的传递函数

在导弹的制导系统中,导弹弹体是其中的一个环节,也是控制对象,所以在设计导弹制导系统时,必须了解导弹弹体的动态特性。在经典的自动控制理论中要用传递函数和频率特性等来表征系统的动态特性。因此,设计导弹制导系统时,需要建立弹体的传递函数。

一、纵向扰动运动的传递函数

在纵向制导系统中,弹体环节的输出量是 ΔV 、 $\Delta\vartheta$ 、 $\Delta\theta$ 、 $\Delta\alpha$,而输入量为 $\Delta\delta_z$ 。若存在外界干扰,输入量除 $\Delta\delta_z$ 外,还有经常作用的干扰力 F_{gx} 、 F_{gy} 和干扰力矩 M_{gx} 。

在自动控制理论中,传递函数 $W(s)$ 是初始条件为零时输出量与输入量的拉普拉斯变换式之比。因此,为了得到导弹的传递函数,应首先将扰动运动方程组(7-2)进行拉氏变换,将原函数变为象函数,经整理后可写成下列矩阵方程

$$\begin{bmatrix} s - a_{11} & 0 & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & s(s - a_{22}) & 0 & -(a'_{24}s + a_{24}) \\ -a_{31} & 0 & s - a_{33} & -a_{34} \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V(s) \\ \Delta\vartheta(s) \\ \Delta\theta(s) \\ \Delta\alpha(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{25} \\ a_{35} \\ 0 \end{bmatrix} \Delta\delta_z(s) + \begin{bmatrix} a_{16}F_{gx}(s) \\ a_{26}M_{gx}(s) \\ a_{36}F_{gy}(s) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7-61)$$

这是运动参数偏量象函数的代数方程,右端有两列矩阵,因此, $\Delta V(s)$ 、 $\Delta\vartheta(s)$ 、 $\Delta\theta(s)$ 和 $\Delta\alpha(s)$

的解由两部分组成。若假定操纵机构的偏转以及干扰力和干扰力矩都是相互独立的，则它们对导弹纵向扰动运动的影响可以分别独立求解，然后进行线性叠加。利用克莱姆定理，每一部分解可表示为

$$\Delta V = \frac{\Delta_v(s)}{\Delta(s)}, \quad \Delta \vartheta = \frac{\Delta_\vartheta(s)}{\Delta(s)}, \quad \Delta \theta = \frac{\Delta_\theta(s)}{\Delta(s)}, \quad \Delta \alpha = \frac{\Delta_\alpha(s)}{\Delta(s)} \quad (7-62)$$

式中 $\Delta(s)$ 为方程组(7-61)的主行列式； $\Delta_v(s)$ 、 $\Delta_\vartheta(s)$ 、 $\Delta_\theta(s)$ 和 $\Delta_\alpha(s)$ 为伴随行列式，是由方程组(7-61)右端所组成的各列代入主行列式中相应各列得到的行列式。

主行列式由齐次方程的系数组成，即

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} (s - a_{11}) & 0 & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & s(s - a_{22}) & 0 & -(a_{24} + a'_{24}s) \\ -a_{31} & 0 & s - a_{33} & -a_{34} \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (7-63)$$

它与(7-61)式左边矩阵排列形式相同，还与纵向自由扰动运动的特征行列式(7-19)形式相同。所以

$$\Delta(s) = s^4 + P_1 s^3 + P_2 s^2 + P_3 s + P_4 \quad (7-64)$$

系数 P_1 、 P_2 、 P_3 和 P_4 由式(7-21)决定。

将式(7-61)右端第一列数值代替主行列式的每一列，可得相应的伴随行列式

$$\Delta_v(s) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -a_{13} & -a_{14} \\ a_{25} & s(s - a_{22}) & 0 & -(a_{24} + a'_{24}s) \\ a_{35} & 0 & s - a_{33} & -a_{34} \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Delta \delta_z(s) \quad (7-65)$$

根据传递函数的定义，并由式(7-62)求出以升降舵偏角 $\Delta \delta_z(s)$ 为输入量，以 $\Delta V(s)$ 、 $\Delta \vartheta(s)$ 、 $\Delta \theta(s)$ 和 $\Delta \alpha(s)$ 为输出量的弹体纵向传递函数。书写传递函数时，以下标表示输入量，上标表示输出量。为了简便，略去标号中的“ Δ ”，则

$$\begin{aligned} W_{\delta_z}^V(s) &= \frac{\Delta V(s)}{\Delta \delta_z(s)} = \frac{\frac{\Delta_v(s)}{\Delta(s)}}{\Delta \delta_z(s)} = \frac{\Delta_v(s)}{\Delta(s) \Delta \delta_z(s)} \\ &= \frac{A_1 s^2 + A_2 s + A_3}{s^4 + P_1 s^3 + P_2 s^2 + P_3 s + P_4} \end{aligned} \quad (7-66)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= a_{35}(a_{13} - a_{14}) \\ A_2 &= a_{22}a_{35}(a_{14} - a_{13}) - a_{13}a_{35}a'_{24} + a_{25}a_{14} \\ A_3 &= a_{25}(a_{34}a_{13} - a_{14}a_{33}) - a_{24}a_{35}a_{13} \end{aligned} \right\} \quad (7-67)$$

同样方法可以求出其他传递函数如下

$$W_{\delta_z}^\vartheta(s) = \frac{\Delta \vartheta(s)}{\Delta \delta_z(s)} = \frac{B_1 s^2 + B_2 s + B_3}{s^4 + P_1 s^3 + P_2 s^2 + P_3 s + P_4} \quad (7-68)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= a_{25} - a_{35}a'_{24} \\ B_2 &= a_{35}(a_{11}a'_{24} - a_{24}) + a_{25}(a_{34} - a_{11} - a_{33}) \\ B_3 &= a_{35}(a_{11}a_{24} - a_{21})(a_{14} - a_{13}) + \\ &\quad a_{25}(a_{31}(a_{14} - a_{13}) - a_{11}(a_{34} - a_{33})) \end{aligned} \right\} \quad (7-69)$$

$$W_{\delta_z}^{\theta}(s) = \frac{\Delta\theta(s)}{\Delta\delta_z(s)} = \frac{C_1s^3 + C_2s^2 + C_3s + C_4}{s^4 + P_1s^3 + P_2s^2 + P_3s + P_4} \quad (7-70)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= a_{35} \\ C_2 &= -a_{35}(a_{11} + a_{22} + a'_{24}) \\ C_3 &= a_{35}[a_{11}(a_{22} + a'_{24}) - a_{24}] + a_{25}a_{34} \\ C_4 &= a_{35}(a_{11}a_{24} - a_{21}a_{14}) - a_{25}(a_{11}a_{34} - a_{14}a_{31}) \end{aligned} \right\} \quad (7-71)$$

$$W_{\delta_z}^{\alpha}(s) = \frac{\Delta\alpha(s)}{\Delta\delta_z(s)} = \frac{D_1s^3 + D_2s^2 + D_3s + D_4}{s^4 + P_1s^3 + P_2s^2 + P_3s + P_4} \quad (7-72)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= -a_{35} \\ D_2 &= a_{35}(a_{22} + a_{11}) + a_{25} \\ D_3 &= -a_{35}a_{11}a_{22} - a_{25}(a_{11} + a_{33}) \\ D_4 &= -a_{35}a_{21}a_{13} - a_{25}(a_{13}a_{31} - a_{11}a_{33}) \end{aligned} \right\} \quad (7-73)$$

以同样的方法,可以得到以经常干扰作用的力和力矩为输入量,以 $\Delta V(s)$ 、 $\Delta\vartheta(s)$ 、 $\Delta\theta(s)$ 和 $\Delta\alpha(s)$ 为输出量的弹体纵向传递函数 $W_{M_{gz}}^V(s)$ 、 $W_{M_{gz}}^{\vartheta}(s)$ 、 $W_{M_{gz}}^{\theta}(s)$ 、 $W_{M_{gz}}^{\alpha}(s)$ 、 $W_{F_{gy}}^V(s)$ 、 $W_{F_{gy}}^{\vartheta}(s)$ 、 $W_{F_{gx}}^V(s)$ 、 $W_{F_{gx}}^{\vartheta}(s)$ 和 $W_{F_{gx}}^{\alpha}(s)$

$$W_{M_{gz}}^V(s) = \frac{\Delta V(s)}{M_{gz}(s)} = \frac{A_{1M}s + A_{2M}}{s^4 + P_1s^3 + P_2s^2 + P_3s + P_4} \quad (7-74)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A_{1M} &= a_{26}a_{14} \\ A_{2M} &= a_{26}(a_{13}a_{34} - a_{33}a_{14}) \end{aligned} \right\} \quad (7-75)$$

$$W_{M_{gz}}^{\vartheta}(s) = \frac{\Delta\vartheta(s)}{M_{gz}(s)} = \frac{B_{1M}s^2 + B_{2M}s + B_{3M}}{s^4 + P_1s^3 + P_2s^2 + P_3s + P_4} \quad (7-76)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} B_{1M} &= a_{26} \\ B_{2M} &= a_{26}(a_{34} - a_{11} - a_{33}) \\ B_{3M} &= a_{26}a_{11}(a_{33} - a_{34}) + a_{26}a_{31}(a_{14} - a_{13}) \end{aligned} \right\} \quad (7-77)$$

$$W_{M_{gz}}^{\theta}(s) = \frac{\Delta\theta(s)}{M_{gz}(s)} = \frac{C_{1M}s + C_{2M}}{s^4 + P_1s^3 + P_2s^2 + P_3s + P_4} \quad (7-78)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} C_{1M} &= a_{26}a_{34} \\ C_{2M} &= a_{26}(a_{14}a_{31} - a_{11}a_{34}) \end{aligned} \right\} \quad (7-79)$$

$$W_{M_{gz}}^{\alpha}(s) = \frac{\Delta\alpha(s)}{M_{gz}(s)} = \frac{D_{1M}s^2 + D_{2M}s + D_{3M}}{s^4 + P_1s^3 + P_2s^2 + P_3s + P_4} \quad (7-80)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} D_{1M} &= a_{26} \\ D_{2M} &= -a_{26}(a_{11} + a_{33}) \\ D_{3M} &= a_{26}(a_{33}a_{11} - a_{31}a_{13}) \end{aligned} \right\} \quad (7-81)$$

当运动参数初始偏量为零时,可以得到纵向扰动运动参数偏量表达式,如俯仰角偏量表达式为

$$\Delta\vartheta = W_{\delta_z}^{\vartheta}(s)\Delta\delta_z(s) + W_{F_{gx}}^{\vartheta}(s)F_{gx}(s) + W_{F_{gy}}^{\vartheta}(s)F_{gy}(s) + W_{M_{gz}}^{\vartheta}(s)M_{gz}(s) \quad (7-82)$$

式中传递函数 $W_{\delta_z}^{\vartheta}(s)$ 、 $W_{F_{gx}}^{\vartheta}(s)$ 、 $W_{F_{gy}}^{\vartheta}(s)$ 和 $W_{M_{gz}}^{\vartheta}(s)$ 表示俯仰角对相应输入的反应。

建立导弹控制系统结构图时,干扰力矩可以通过相应的传递函数 $W_{M_{gz}}^{\vartheta}(s)$ 来表示,见图7-4(a)。也可以利用相应的传递函数 $W_{M_{gz}}^{\delta_{gx}}(s)$ 将干扰力矩 M_{gz} 折算为操纵面偏角 δ_{gx} ,见图

7-4(b)。

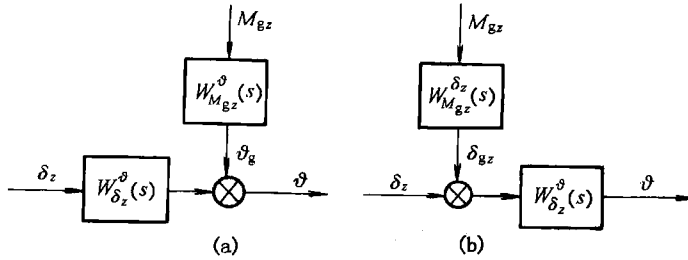


图 7-4 建立结构图时，干扰力矩的两种输入

$$\begin{aligned}
 W_{M_{gz}}^{\delta_z}(s) &= \frac{\Delta \delta_{gz}(s)}{M_{gz}(s)} = \frac{\Delta \vartheta(s) \Delta \delta_{gz}(s)}{M_{gz}(s) \Delta \vartheta(s)} = \frac{W_{M_{gz}}^{\vartheta}(s)}{W_{\delta_z}^{\vartheta}(s)} \\
 &= \frac{B_{1M}s^2 + B_{2M}s + B_{3M}}{B_1s^2 + B_2s + B_3}
 \end{aligned} \quad (7-83)$$

式中 δ_{gz} 称为等效干扰舵偏角。这样

$$W_{M_{gz}}^{\vartheta}(s) = W_{M_{gz}}^{\delta_z}(s) W_{\delta_z}^{\vartheta}(s)$$

其他由于干扰力矩引起的传递函数也可以变换成上面的形式。

二、用拉氏变换求自由扰动运动

对于自由扰动运动，通过拉氏变换求扰动运动参数偏量值是很方便的。这时运动参数初始偏量作为输入量，输出量为扰动运动参数偏量值 ΔV 、 $\Delta \vartheta$ 、 $\Delta \theta$ 和 $\Delta \alpha$ 。例如，导弹突然进入上升气流的区域（短暂的垂直风），这时它的 α 角和 θ 角瞬时改变了 $\Delta \alpha_0 = -\Delta \theta_0$ 。根据拉氏变换的微分法则，当初始条件不为零时，则有

$$\begin{aligned}
 L\left[\frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2}\right] &= s^2 \Delta \vartheta(s) \\
 L\left[\frac{d^2 \Delta \theta}{dt^2}\right] &= s^2 \Delta \theta(s) \\
 L\left[\frac{d \Delta \theta}{dt}\right] &= s \Delta \theta - \Delta \theta_0 \\
 L\left[\frac{d \Delta \alpha}{dt}\right] &= s \Delta \alpha - \Delta \alpha_0
 \end{aligned}$$

运动参数象函数的代数方程为

$$\begin{bmatrix} s - a_{11} & 0 & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & s(s - a_{22}) & 0 & -(a'_{24}s + a_{24}) \\ -a_{31} & 0 & s - a_{33} & -a_{34} \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V(s) \\ \Delta \vartheta(s) \\ \Delta \theta(s) \\ \Delta \alpha(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -a'_{24} \Delta \alpha_0 \\ \Delta \theta_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7-84)$$

伴随行列式为

$$\Delta_V(s) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -a_{13} & -a_{14} \\ -a'_{24}\Delta\alpha_0 & s(s-a_{22}) & 0 & -(a'_{24}s+a_{24}) \\ \Delta\theta_0 & 0 & s-a_{33} & -a_{34} \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (7-85)$$

$$\Delta V(s) = \frac{-a'_{24}\Delta_{V\alpha_0}(s)\Delta\alpha_0 + \Delta_{V\theta_0}(s)\Delta\theta_0}{\Delta(s)} \quad (7-86)$$

式中 $\Delta_{V\alpha_0}$, $\Delta_{V\theta_0}$ 为第一列各元对应的代数余子式

$$\Delta_{V\alpha_0}(s) = a_{14}s + a_{34}a_{13} - a_{33}a_{14}$$

$$\Delta_{V\theta_0}(s) = -(a_{14} - a_{13})s^2 - (a_{22}a_{13} - a_{22}a_{14} + a'_{24}a_{13})s - a_{24}a_{13}$$

同样的方法可得

$$\Delta\vartheta(s) = \frac{-a'_{24}\Delta_{\vartheta\alpha_0}(s)\Delta\alpha_0 + \Delta_{\vartheta\theta_0}(s)\Delta\theta_0}{\Delta(s)} \quad (7-87)$$

$$\Delta_{\vartheta\alpha_0}(s) = s^2 + (a_{34} - a_{33} - a_{11})s - a_{11}(a_{34} - a_{33}) - a_{31}(a_{13} - a_{14})$$

$$\Delta_{\vartheta\theta_0}(s) = -[a'_{24}s^2 + (a_{24} - a'_{24}a_{11})s - a_{24}a_{11} - a_{21}(a_{13} - a_{14})]$$

$$\Delta\theta(s) = \frac{-a'_{24}\Delta_{\theta\alpha_0}(s)\Delta\alpha_0 + \Delta_{\theta\theta_0}(s)\Delta\theta_0}{\Delta(s)} \quad (7-88)$$

$$\Delta_{\theta\alpha_0}(s) = a_{34}s - a_{34}a_{11} + a_{31}a_{14}$$

$$\Delta_{\theta\theta_0}(s) = s^3 - (a_{11} + a_{22} + a'_{24})s^2 - (a_{24} - a_{11}a_{22} - a'_{24}a_{11})s +$$

$$a_{24}a_{11} - a_{21}a_{14}$$

$$\Delta\alpha(s) = \frac{-a'_{24}\Delta_{\alpha\alpha_0}(s)\Delta\alpha_0 + \Delta_{\alpha\theta_0}(s)\Delta\theta_0}{\Delta(s)} \quad (7-89)$$

$$\Delta_{\alpha\alpha_0}(s) = s^2 - (a_{11} + a_{33})s + a_{33}a_{11} - a_{31}a_{13}$$

$$\Delta_{\alpha\theta_0}(s) = -s^3 + (a_{11} + a_{22})s^2 - a_{11}a_{22}s + a_{21}a_{13}$$

当求得 $\Delta V(s)$ 、 $\Delta\vartheta(s)$ 、 $\Delta\theta(s)$ 和 $\Delta\alpha(s)$ 后再进行反拉氏变换,即可求得 $\Delta V(t)$ 、 $\Delta\vartheta(t)$ 、 $\Delta\theta(t)$ 和 $\Delta\alpha(t)$ 。

三、短周期纵向扰动运动的传递函数

对短周期扰动运动方程组(7-56)进行拉氏变换,当运动参数偏量初始值为零时得

$$\begin{bmatrix} s(s-a_{22}) & 0 & -(a'_{24}s+a_{24}) \\ 0 & s-a_{33} & -a_{34} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\vartheta(s) \\ \Delta\theta(s) \\ \Delta\alpha(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{25} \\ a_{35} \\ 0 \end{bmatrix} \Delta\delta_z(s) + \begin{bmatrix} a_{26}M_{gz}(s) \\ a_{36}F_{gz}(s) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7-90)$$

采用上述方法,同样可以得到短周期运动的传递函数如下

$$W_{\delta_z}^{\vartheta}(s) = \frac{\Delta\vartheta(s)}{\Delta\delta_z(s)} = \frac{(-a_{35}a'_{24} + a_{25})s + a_{25}(a_{34} - a_{33}) - a_{35}a_{24}}{s^3 + P_1s^2 + P_2s + P_3} \quad (7-91)$$

$$W_{\delta_z}^{\theta}(s) = \frac{\Delta\theta(s)}{\Delta\delta_z(s)} = \frac{a_{35}s^2 - a_{35}(a_{22} + a'_{24})s + a_{25}a_{34} - a_{35}a_{24}}{s^3 + P_1s^2 + P_2s + P_3} \quad (7-92)$$

$$W_{\delta_z}^{\alpha}(s) = \frac{\Delta\alpha(s)}{\Delta\delta_z(s)} = \frac{-a_{35}s^2 + (a_{35}a_{22} + a_{25})s - a_{25}a_{33}}{s^3 + P_1s^2 + P_2s + P_3} \quad (7-93)$$

式中 P_1 、 P_2 、 P_3 表达式与式(7-58)相同。

根据上面所述,对于有翼式导弹,若不计重力影响,即 $a_{33}=0$,则可得短周期阶段经过简化的传递函数,并通过因子分解得到以典型基本环节表示的传递函数

$$\begin{aligned} W_{\delta_z}^g(s) &= \frac{\Delta\vartheta(s)}{\Delta\delta_z(s)} = \frac{(-a_{35}a'_{24} + a_{25})s + a_{25}a_{34} - a_{35}a_{24}}{s[s^2 + (a_{34} - a_{22} - a'_{24})s + (-a_{22}a_{34} - a_{24})]} \\ &= \frac{K_M(T_1s + 1)}{s(T_M^2s^2 + 2T_M\xi_Ms + 1)} \end{aligned} \quad (7-94)$$

式中 K_M ——导弹的传递系数, $K_M = \frac{-a_{25}a_{34} + a_{35}a_{24}}{a_{22}a_{34} + a_{24}} (s^{-1})$;

T_M ——导弹的时间常数, $T_M = \frac{1}{\sqrt{-a_{24} - a_{22}a_{34}}} (s)$;

ξ_M ——导弹的相对阻尼系数, $\xi_M = \frac{-a_{22} - a'_{24} + a_{34}}{2\sqrt{-a_{24} - a_{22}a_{34}}}$;

T_1 ——导弹气动力时间常数, $T_1 = \frac{-a_{35}a'_{24} + a_{25}}{a_{25}a_{34} - a_{35}a_{24}} (s)$

同样可以求得

$$\begin{aligned} W_{\delta_z}^g(s) &= \frac{\Delta\theta(s)}{\Delta\delta_z(s)} = \frac{a_{35}s^2 - a_{35}(a_{22} + a'_{24})s + a_{25}a_{34} - a_{35}a_{24}}{s[s^2 + (a_{34} - a_{22} - a'_{24})s + (-a_{22}a_{34} - a_{24})]} \\ &= \frac{K_M(T_{1\theta}s + 1)(T_{2\theta}s + 1)}{s(T_M^2s^2 + 2T_M\xi_Ms + 1)} \end{aligned} \quad (7-95)$$

式中

$$T_{1\theta}T_{2\theta} = \frac{a_{35}}{a_{25}a_{34} - a_{35}a_{24}}$$

$$T_{1\theta} + T_{2\theta} = \frac{-a_{35}(a_{22} + a'_{24})}{a_{25}a_{34} - a_{35}a_{24}}$$

$$\begin{aligned} W_{\delta_z}^a(s) &= \frac{\Delta\alpha(s)}{\Delta\delta_z(s)} = \frac{-a_{35}s^2 + (a_{35}a_{22} + a_{25})s}{s[s^2 + (a_{34} - a_{22} - a'_{24})s + (-a_{22}a_{34} - a_{24})]} \\ &= \frac{K_a(T_as + 1)}{T_M^2s^2 + 2T_M\xi_Ms + 1} \end{aligned} \quad (7-96)$$

式中 K_a ——导弹攻角传递系数, $K_a = \frac{-(a_{35}a_{22} + a_{25})}{a_{22}a_{34} + a_{24}}$

T_a ——导弹攻角时间常数, $T_a = \frac{-a_{35}}{a_{35}a_{22} + a_{25}} (s)$

如果下洗动力系数 a'_{24} 可以略去,上述传递函数又可进一步简化如下

$$W_{\delta_z}^g(s) = \frac{K_M(T_1s + 1)}{s(T_M^2s^2 + 2T_M\xi_Ms + 1)} \quad (7-97)$$

$$W_{\delta_z}^g(s) = \frac{K_M \left[1 + T_1 \frac{a_{35}}{a_{25}} s(s - a_{22}) \right]}{s(T_M^2s^2 + 2T_M\xi_Ms + 1)} \quad (7-98)$$

$$W_{\delta_z}^a(s) = \frac{K_M T_1 \left[1 - \frac{a_{35}}{a_{25}} (s - a_{22}) \right]}{T_M^2s^2 + 2T_M\xi_Ms + 1} \quad (7-99)$$

这时参数 ξ_M 和 T_1 的表达式中 $a'_{24}=0$ 。

法向过载 n_y 是导弹运动的重要参数之一。通常用过载来评定导弹的机动性,法向过载的变化情况对导弹的结构强度和制导系统的影响很大。下面来推导法向过载的传递函数。法向过载

$$n_y = \frac{V}{g} \frac{d\theta}{dt} + \cos\theta$$

线性化取偏量后

$$\Delta n_y = \frac{\Delta V}{g} \frac{d\theta_0}{dt} + \frac{V_0}{g} \frac{d\Delta\theta}{dt} - \sin\theta_0 \Delta\theta \quad (7-100)$$

略去二次微量 $\frac{\Delta V}{g} \frac{d\theta_0}{dt}$, 而 $\sin\theta_0 \Delta\theta$ 中 $\sin\theta_0 \leq 1$, $\Delta\theta$ 为小量, 所以 $\sin\theta_0 \Delta\theta$ 与 $\frac{V_0}{g} \frac{d\Delta\theta}{dt}$ 相比是小量, 可以略去, 这样

$$\Delta n_y \approx \frac{V_0}{g} \frac{d\Delta\theta}{dt} \quad (7-101)$$

所以法向过载传递函数

$$W_{\delta_z}^{n_y}(s) = \frac{\Delta n_y(s)}{\Delta \delta_z(s)} = \frac{V}{g} W_{\delta_z}^{\theta}(s) \quad (7-102)$$

导弹弹体纵向传递函数式(7-94)、(7-95)和(7-102)可用开环状态的方块图表示, 见图 7-5。图中

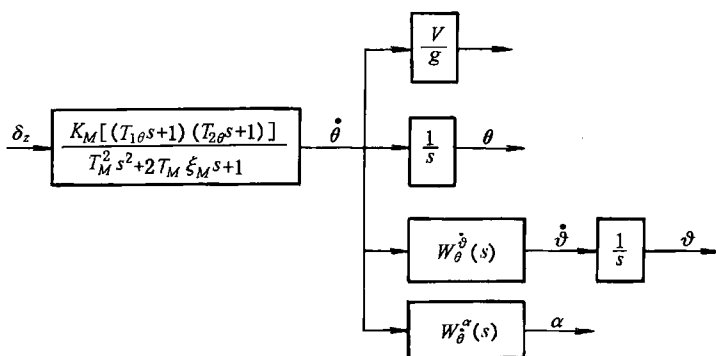


图 7-5 纵向传递函数结构图

$$W_{\dot{\theta}}^{\dot{\theta}}(s) = \frac{W_{\dot{\theta}}^{\dot{\theta}}(s)}{W_{\dot{\theta}}^{\dot{\theta}}(s)} = \frac{T_1 s + 1}{(T_{1\theta} s + 1)(T_{2\theta} s + 1)} \quad (7-103)$$

$$W_{\dot{\theta}}^{\alpha}(s) = \frac{W_{\dot{\theta}}^{\alpha}(s)}{W_{\dot{\theta}}^{\dot{\theta}}(s)} = \frac{K_a(T_a s + 1)}{K_M(T_{1\theta} s + 1)(T_{2\theta} s + 1)} \quad (7-104)$$

对于正常式导弹, 在一般情况下动力系数 $a_{35} \ll a_{34}$, 于是, 当时忽略 a_{33} 、 a'_{24} 和 a_{35} 时, 导弹弹体纵向传递函数可简化为

$$\left. \begin{aligned} W_{\delta_z}^{\dot{\theta}}(s) &= \frac{K_M(T_1 s + 1)}{s(T_M^2 s^2 + 2T_M \xi_M s + 1)} \\ W_{\delta_z}^{\theta}(s) &= \frac{K_M}{s(T_M^2 s^2 + 2T_M \xi_M s + 1)} \\ W_{\delta_z}^{\alpha}(s) &= \frac{K_M T_1}{T_M^2 s^2 + 2T_M \xi_M s + 1} \\ W_{\delta_z}^{n_y}(s) &= \frac{K_M \frac{V}{g}}{T_M^2 s^2 + 2T_M \xi_M s + 1} \end{aligned} \right\} \quad (7-105)$$

式中

$$K_M = -\frac{a_{25}a_{34}}{a_{24} + a_{22}a_{34}}, \quad T_1 = \frac{1}{a_{34}}$$

在这种情况下，图 7-5 中各式也要作相应的改变，其中运动参数的转换函数变为

$$W_{\delta}^a(s) = T_1, \quad W_{\delta}^{\dot{\theta}}(s) = T_1 s + 1 \quad (7-106)$$

由于干扰力矩 M_{gz} 产生的弹体纵向传递函数，当不考虑动力系数 a_{33} 和 a'_{24} 时，经推导得

$$W_{M_{gz}}^{\dot{\theta}}(s) = \frac{T_M^2 a_{26}(s + a_{34})}{s(T_M^2 s^2 + 2\xi_M T_M s + 1)} \quad (7-107)$$

$$W_{M_{gz}}^{\theta}(s) = \frac{T_M^2 a_{26} a_{34}}{s(T_M^2 s^2 + 2\xi_M T_M s + 1)} \quad (7-108)$$

$$W_{M_{gz}}^a(s) = \frac{T_M^2 a_{26}}{T_M^2 s^2 + 2\xi_M T_M s + 1} \quad (7-109)$$

$$W_{M_{gz}}^{\delta}(s) = a_{26}/a_{25} \quad (7-110)$$

即

$$\delta_{gz} = M_{gz}/M_{\dot{\theta}z}$$

则图 7-4(b)可画成图 7-6。对于干扰力矩 M_{gz} 的传递函数可写为

$$W_{M_{gz}}^{\dot{\theta}}(s) = W_{\delta_z}^{\dot{\theta}}(s) W_{M_{gz}}^{\delta_z}(s) = W_{\delta_z}^{\dot{\theta}}(s) \frac{1}{M_{\dot{\theta}z}}$$

$$W_{M_{gz}}^{\theta}(s) = W_{\delta_z}^{\theta}(s) W_{M_{gz}}^{\delta_z}(s) = W_{\delta_z}^{\theta}(s) \frac{1}{M_{\dot{\theta}z}}$$

$$W_{M_{gz}}^a(s) = W_{\delta_z}^a(s) W_{M_{gz}}^{\delta_z}(s) = W_{\delta_z}^a(s) \frac{1}{M_{\dot{\theta}z}}$$

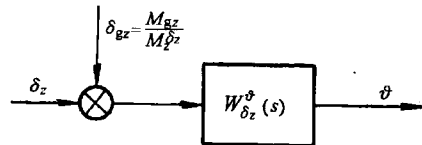


图 7-6 建立结构图时，干扰力矩输入的简化

反映导弹纵向短周期运动的结构方块图也可由方程组(7-56)直接描述，其组成如图 7-7 所示。

利用图 7-7 分析导弹弹体的气动布局、质心位置对动态特性的影响，进行模拟求解很方便。

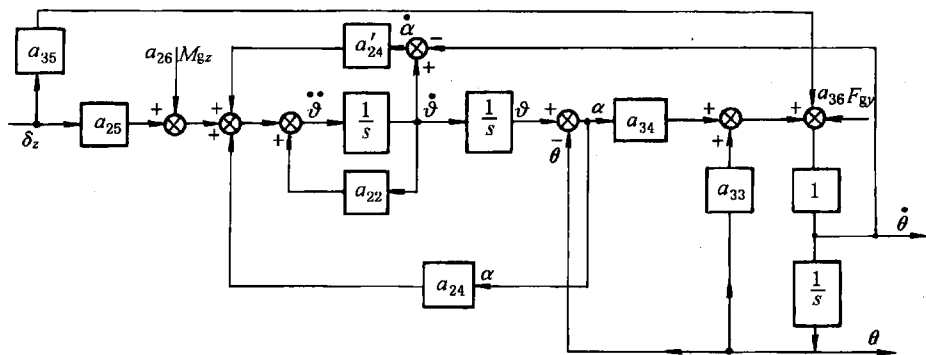


图 7-7 纵向短周期运动的结构图

§ 7-5 操纵机构阶跃偏转时纵向动态特性分析

下面采用短周期扰动运动方程组及由此推导的纵向传递函数,讨论短周期扰动运动阶段的纵向动态特性。

一、稳定性分析

1. 重力对稳定性的影响

对短周期扰动运动方程组(7-56)的特征方程式(7-57)求根的结果(见表7-4)可知,它是由一对具有负实部的大复根和一个小实根组成的。一对大复根与没有简化的纵向扰动运动方程组的特征方程根中的一对大复根很接近。一个小实根根据计算条件不同可为正小实根、负小实根或零根。

由式(7-57)和(7-58)可知,特征方程式为

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 + (a_{34} - a_{33} - a_{22} - a'_{24})\lambda^2 + [a_{22}(a_{33} - a_{34}) - a_{24} + a_{33}a'_{24}]\lambda + a_{24}a_{33} = 0$$

如果导弹具有静稳定性,则动力系数 $a_{24} < 0$ 。当导弹未扰动运动是定态爬高时,即弹道倾角 $\theta_0 > 0$,则动力系数 $a_{33} > 0$ 。所以,系数 $a_{24}a_{33} < 0$,不能满足霍尔维茨准则,特征方程根具有一个正小实根。因为特征方程系数 $P_3 = a_{24}a_{33}$ 和 P_1 、 P_2 相比很小,所以这个根值很小。当导弹未扰动运动是下滑飞行时,情况则完全相反,得到一个负小实根,其根值同样很小。当导弹未扰动运动是作水平直线飞行时,因 $\theta_0 = 0$,系数 $a_{33}a_{24} = 0$,特征方程有零根。但是这个小实根的正负值,并不完全反映导弹的实际情况。由表7-4可见,例7-2中不简化的特征方程根 $\lambda_{3,4}$ 是一对具有负实部的小复根,而短周期的特征方程根 λ_3 却是正根;例7-3特征方程根为一个负小实根和一个正小实根,而简化后为一个零根。这些都是由于简化误差所造成。但是,由于这个根值很小,无论正值还是负值,对短暂几秒钟的弹体动态特性影响极小。

当导弹未扰动运动是水平直线飞行时($\theta_0 = 0$),由短周期扰动运动的计算表明,在偶然干扰作用下短周期扰动运动结束时,俯仰角将保持一个常值偏量,而攻角则衰减到未受干扰前的状态。如例7-4中的飞行器,当它受到偶然干扰后,通过方程组(7-56)计算运动参数偏量的过渡过程,得到

$$\Delta\vartheta(t) = 1.98^\circ e^{-0.376t} \sin(139.054^\circ t - 1.22^\circ) + 1.956^\circ$$

$$\Delta\alpha(t) = 2.0021^\circ e^{-0.376t} \sin(139.064^\circ t + 87.76^\circ)$$

实际上,俯仰角的常值偏量项是由于简化了长周期运动所造成。如果考虑长周期运动,运动参数偏量应为

$$\Delta\vartheta(t) = 1.98^\circ e^{-0.376t} \sin(139.01^\circ t - 1.16^\circ) + 1.964^\circ e^{-0.003t} \sin(4.297t + 1.28^\circ)$$

$$\Delta\alpha(t) = 2.003^\circ e^{-0.376t} \sin(139.01^\circ t + 87.93^\circ) + 0.05^\circ e^{-0.003t} \sin(4.297t - 0.2^\circ)$$

因此,在进入长周期运动阶段后, $\Delta\vartheta$ 并不是一个常数,而是缓慢变小的。在短周期运动阶段,这一项也不是常数项,也是在缓慢变小,但是由于它的变化很微小,在短暂的几秒钟内,把它看做常数误差不大。

2. 动态稳定的极限条件

当不考虑重力影响, 即 $a_{24}a_{33}=0$ 时, 特征方程的一个小根近似为零, 但对其余两个大根影响不大, 见表 7-4。这时 $W_{\delta_z}^{\dot{\delta}}(s)$ 、 $W_{\delta_z}^{\dot{\theta}}(s)$ 和 $W_{\delta_z}^{\alpha}(s)$ 的特征方程式为

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 + (a_{34} - a_{22} - a'_{24})\lambda - (a_{22}a_{34} + a_{24}) = 0 \quad (7-111)$$

$$\text{或} \quad T_M^2 \lambda^2 + 2\xi_M T_M \lambda + 1 = 0 \quad (7-112)$$

它的根等于

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\xi_M \pm \sqrt{\xi_M^2 - 1}}{T_M} = \frac{-1}{2}(a_{34} - a_{22} - a'_{24}) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(a_{34} - a_{22} - a'_{24})^2 + (a_{22}a_{34} + a_{24})} \quad (7-113)$$

如果 $\frac{1}{4}(a_{34} - a_{22} - a'_{24})^2 + (a_{22}a_{34} + a_{24}) \geq 0$ (即 $\xi_M \geq 1$), 则 $\lambda_{1,2}$ 为两个实根; 当 $a_{22}a_{34} + a_{24} = 0$ 时, 则出现一个零根, 这时, 导弹的扰动运动将是中立稳定的; 当 $a_{22}a_{34} + a_{24} > 0$ 时, 因为 $a_{34} - a_{22} - a'_{24} > 0$, 则必然出现一个正实根, 导弹的未扰动运动是不稳定的。因此, 导弹具有纵向稳定性的条件为

$$a_{22}a_{34} + a_{24} < 0 \quad (7-114)$$

这个不等式称为动态稳定的极限条件。

特别指出, 这里讨论的是指两个大根所对应的 $\Delta\dot{\delta}$ 、 $\Delta\dot{\theta}$ 、 Δn_y 和 $\Delta\alpha$ 的动态稳定性。

将动力系数表达式代入式(7-114), 得到

$$\begin{aligned} \frac{M_z^a}{J_z} &< -\frac{M_z^{\omega_z}}{J_z} \frac{P + Y^a}{mV} \\ \text{或} \quad -M_z^a &> M_z^{\omega_z} \frac{P + Y^a}{mV} \end{aligned} \quad (7-115)$$

因为 $M_z^{\omega_z}$ 总是负值, 而 $(P + Y^a)/mV$ 则为正值, 所以不等式的右端是一个负数。因此, 如果导弹具有静稳定性, 即 $M_z^a < 0$, 那么式(7-115)一定成立, 也就是说, 导弹的运动一定是稳定的。如果导弹虽然是静不稳定的 ($M_z^a > 0$), 但是静不稳定度很小, 而导弹阻尼 $M_z^{\omega_z}$ 及法向力 $(P + Y^a)/mV$ 却很大, 也有可能满足式(7-115), 那么, 导弹的运动还是稳定的。但是实际上不等式(7-115)的右边数值是有限的, 而且, 由于飞行过程中速度、高度、质心等的变化, 使得 M_z^a 变化较大, 很难保证静不稳定导弹在飞行弹道上各特征点都满足式(7-115)。因此, 对于有翼式导弹, 一般都设计成静稳定的。例如, 例 7-1 某地空导弹动力系数变化范围为

$$\begin{aligned} a_{24} &= -14.47 \sim -158 \text{ s}^{-2} \\ a_{22} &= -0.109 \sim -1.755 \text{ s}^{-1} \\ a_{34} &= 0.1966 \sim 2.412 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

于是有

$$a_{24} + a_{22}a_{34} < 0$$

即此导弹在飞行过程中始终是稳定的。

3. 产生振荡过渡过程的条件

如果 $\frac{1}{4}(a_{34} - a_{22} - a'_{24})^2 + (a_{24} + a_{22}a_{34}) < 0$ (即 $\xi_M < 1$), 则 $\lambda_{1,2}$ 为一对共轭复根, 扰动运动是振荡运动, 这时

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\xi_M}{T_M} \pm i \frac{\sqrt{1 - \xi_M^2}}{T_M} = -\frac{1}{2}(a_{34} - a_{22} - a'_{24}) \pm$$

$$i \sqrt{-(a_{24} + a_{22}a_{34}) - \frac{1}{4}(a_{34} - a_{22} - a'_{24})^2} \quad (7-116)$$

$$\text{其中} \quad -\frac{\xi_M}{T_M} = -\frac{1}{2}(a_{34} - a_{22} - a'_{24}) < 0 \quad (7-117)$$

由式(7-116)可知,只要满足产生振荡过渡过程的条件,短周期扰动运动一定是稳定的。

当忽略下洗时,产生振荡过渡过程的条件为

$$\frac{1}{4}(a_{34} - a_{22})^2 + (a_{24} + a_{22}a_{34}) < 0$$

展开整理后得

$$-a_{24} > \left(\frac{a_{34} + a_{22}}{2} \right)^2 \quad (7-118)$$

将动力系数表达式代入上式后求得

$$-\frac{M_z^a}{J_z} > \left[\frac{P + Y^a}{mV} + \frac{M_z^{a_2}}{J_z} \right]^2 \quad (7-119)$$

这个不等式右端总是正值。不难看出,要使其产生振荡运动,就需要静稳定度足够大,以满足不等式(7-118),而且只要满足式(7-118),扰动运动一定是稳定的振荡运动。

由上述讨论可知,产生稳定的振荡运动对静稳定度 M_z^a 的要求比产生非周期稳定运动对静稳定度 M_z^a 的要求要严格得多。

对例7-1某地空导弹的动力系数变化范围进行计算结果表明,在飞行过程中总是满足不等式(7-118)。由此可见,该地空导弹的飞行过程不仅是稳定的,而且是稳定的振荡运动。

根据上面讨论,可以把传递函数式(7-94)~(7-96)的分母中的二次三项式的因式分解及其特征方程根总结成表7-5。

表 7-5 传递函数分母的因式分解及特征方程根

$a_{22}a_{34} + a_{24}$	ξ_M	$As^2 + Bs + 1$	特 征 方 程 根	
“<0”(稳定)	<1	$T_M^2 s^2 + 2\xi_M T_M s + 1$	$\lambda_{1,2} = \frac{1}{T_M}(-\xi_M \pm i\sqrt{1-\xi_M^2})$	共轭复根,实部为负
	=1	$(Ts+1)^2$	$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{T}$	二个负重根
	>1	$(T's+1)(T''s+1)$	$\lambda_1 = -\frac{1}{T'}, \lambda_2 = -\frac{1}{T''}$	二个负实根
“=0”(中立稳定)	—	$s(Ts+1)$	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\frac{1}{T}$	有一个零根
“>0”(不稳定)	—	$-(T's-1)(T''s+1)$	$\lambda_1 = \frac{1}{T'}, \lambda_2 = -\frac{1}{T''}$	有一个正实根

下面只限于讨论 $a_{24} + a_{22}a_{34} < 0$ 的情况。

4. 振荡运动的衰减程度和振荡频率

式(7-117)中 ξ_M/T_M 表示短周期运动的衰减程度,称为阻尼系数或衰减系数。 ξ_M/T_M 愈大,扰动运动衰减得越快。将各动力系数表达式代入式(7-117),求得

$$\begin{aligned}\frac{\xi_M}{T_M} &= \frac{1}{4} \left(\frac{2P/V + c_y^a \rho V S}{m} - \frac{m_z^{\omega} \rho V S b_A^2}{J_z} - \frac{m_z^i \rho V S b_A^2}{J_z} \right) \\ &\approx \frac{1}{4} \left(\frac{2P/V + c_y^a \rho V S}{m} - \frac{m_z^{\omega} \rho V S b_A}{J_z} \right)\end{aligned}\quad (7-120)$$

当速度 V 增加时, 马赫数 M_a 增加。当 $M_a > 1$ 时, M_z^{ω} 和 c_y^a 稍有降低, 对衰减系数 ξ_M/T_M 的影响没有速度直接影响大。所以, 增大速度 V 将增加衰减系数, 而使短周期扰动运动的衰减程度变大。

增加飞行高度 H , 空气密度 ρ 将减小, 如 $H=10$ km 时, 空气密度为海平面的 33.7%; $H=20$ km 时, 空气密度为海平面的 7.25%。因此, 导弹纵向短周期扰动运动衰减程度随着飞行高度 H 的增加而迅速减小, 也就是说导弹高空的稳定性要比低空稳定性差得多。

随着高度 H 的增加, 虽然降低了音速, 提高了马赫数, 当 $M_a > 1$ 时, M_a 的增加可能引起 m_z^{ω} 和 c_y^a 的下降, 但是由于音速下降不多, 不会使系数 m_z^{ω} 和 c_y^a 发生很大变化。

例如, 例 7-1 中的地空导弹, 对于攻击高空目标 ($H=22$ km) 的大发射角典型弹道, 随着飞行高度的增加, 阻尼系数下降 90.9% 左右, 这主要是由于 ρ 随着飞行高度的增加一直降到海平面的 5.2%, 虽然随飞行高度的增加 (即飞行时间增加), 飞行速度也有所增加, 但是空气密度的下降对阻尼系数 ξ_M/T_M 的下降将起主要作用。同一地空导弹, 对于攻击低空目标的 ($H=3$ km) 的小发射角典型弹道, 随着飞行时间的增加, 飞行速度增加, 飞行高度亦有增加, 阻尼系数则略有增加, ξ_M/T_M 由 1.79 增加到 1.88, 这是由于飞行速度的增加起了主要作用, 因为空气密度仅降到海平面的 74.2%。这个地空导弹阻尼系数总的变化为 $\xi_M/T_M=1.9 \sim 0.156$ 。

由式 (7-120) 可以看出, 静稳定度对导弹自由振荡的衰减并无影响。

由式 (7-116) 的虚部可得振荡角频率

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{-(a_{24} + a_{22}a_{34}) - \frac{1}{4}(a_{34} - a_{22} - a'_{24})^2} \approx \sqrt{-(a_{24} + a_{22}a_{34}) - \frac{1}{4}(a_{34} - a_{22})^2} \\ &= \sqrt{-a_{24} - \frac{1}{4}(a_{34} + a_{22})^2}\end{aligned}\quad (7-121)$$

把动力系数表达式代入上式, 求得

$$\omega = 0.707 \sqrt{-\frac{m_z^a \rho V^2 S b_A}{J} - \frac{1}{8} \left(\frac{2P/V + c_y^a \rho V S}{m} + \frac{m_z^{\omega} \rho V S b_A^2}{J_z} \right)} \quad (\text{rad/s}) \quad (7-122)$$

飞行速度和高度对振荡角频率的影响与对衰减程度的影响一样, 增大速度将提高振荡角频率, 增加高度则要降低振荡角频率。

影响导弹自由振荡频率主要是静稳定系数 a_{24} , 当 $|a_{24}|$ 值增大, 振荡频率增高。

当阻尼系数

$$\frac{\xi_M}{T_M} = \frac{1}{2}(a_{34} - a_{22} - a'_{24}) = 0$$

则在过渡过程中振荡频率等于

$$\omega_c = \sqrt{-(a_{24} + a_{22}a_{34})} = \frac{1}{T_M} \quad (\text{rad/s}) \quad (7-123)$$

没有阻尼时自由振荡频率 ω_c 称为振荡的固有角频率。以赫兹为单位的固有频率为

$$f = \frac{\omega_c}{2\pi} \quad (\text{Hz})$$

由于 $a_{22}a_{34} \ll a_{24}$, 所以

$$\omega_c \approx \sqrt{-a_{24}} = \sqrt{\frac{-m_z^a \rho V^2 S b_A}{2J_x}} \quad (7-124)$$

由上式可见, 导弹的固有频率主要取决于惯性矩、静稳定性和速压。

随着飞行速度和高度以及导弹质心位置的变化, 导弹固有频率可能变化若干倍, 例如某地空导弹在攻击高空目标的典型弹道上, 其固有频率变化范围为 $\omega_c \approx 4 \sim 11 (\text{rad/s})$ 。

二、操纵机构阶跃偏转时的过渡过程

当俯仰操纵机构阶跃偏转时, 导弹由一种飞行状态过渡到另一种飞行状态。如果不考虑惯性, 则该过渡过程瞬时完成。实际上, 由于导弹的惯性, 参数 $\dot{\vartheta}$ 、 $\dot{\theta}$ 、 n_y 和 α 是在某一时间间隔内变化的, 这个变化过程称为过渡过程。在过渡过程结束时, 参数 $\dot{\vartheta}$ 、 $\dot{\theta}$ 、 n_y 和 α 稳定在与操纵机构新位置相对应的数值上。

下面研究当忽略 a_{33} 、 a_{35} 和 a'_{24} 等动力系数时导弹的过渡过程。

表达式(7-105)就输出量 $\dot{\theta}$ 、 n_y 和 α 而言, 是一个二阶环节, 其传递函数可以写为

$$\frac{\Delta X(s)}{\Delta \delta_z(s)} = \frac{K}{T_M^2 s^2 + 2\xi_M T_M s + 1} \quad (7-125)$$

式中 ΔX —— $\Delta \dot{\theta}$ 、 Δn_y 和 $\Delta \alpha$ 中任何一个值;

K ——与 ΔX 相应的传递系数 K_M 、 $K_M V/g$ 和 $K_M T_1$ 。

于是

$$\Delta X(s) = \frac{K}{T_M^2 s^2 + 2\xi_M T_M s + 1} \Delta \delta_z(s)$$

当 $\xi_M > 1$ 时, 用反拉氏变换法求出过渡过程 $\Delta X(t)$ (过渡过程求解方法见 §7-6) 为

$$\Delta X(t) = \left[1 - \frac{1}{2\xi_M (\sqrt{\xi_M^2 - 1} - \xi_M) + 2} e^{-\left(\frac{\xi_M - \sqrt{\xi_M^2 - 1}}{T_M}\right)t} + \frac{1}{2\xi_M (\sqrt{\xi_M^2 - 1} + \xi_M) - 2} e^{-\left(\frac{\xi_M + \sqrt{\xi_M^2 - 1}}{T_M}\right)t} \right] K \Delta \delta_z \quad (7-126)$$

这时过渡过程是由两个衰减的非周期运动所组成。

当 $\xi_M < 1$ 时, 用反拉氏变换法求出过渡过程 $\Delta X(t)$ 为

$$\Delta X(t) = \left[1 - \frac{e^{-\frac{\xi_M}{T_M}t}}{\sqrt{1 - \xi_M^2}} \cos \left[\frac{\sqrt{1 - \xi_M^2}}{T_M} t - \varphi_1 \right] \right] K \Delta \delta_z \quad (7-127)$$

式中

$$\tan \varphi_1 = \frac{\xi_M}{\sqrt{1 - \xi_M^2}}$$

俯仰角速度 $\Delta \dot{\vartheta}(t)$ 的过渡函数由式(7-105)第一式和式(7-127)可得

$$\frac{\Delta \dot{\vartheta}(t)}{K \Delta \delta_z} = 1 - e^{-\frac{\xi_M}{T_M}t} \sqrt{\frac{1 - 2\xi_M \frac{T_1}{T_M} + \left(\frac{T_1}{T_M}\right)^2}{1 - \xi_M^2}} \cos \left[\frac{\sqrt{1 - \xi_M^2}}{T_M} t + \varphi_1 + \varphi_2 \right] \quad (7-128)$$

式中

$$\tan(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\frac{T_1}{T_M} - \xi_M}{\sqrt{1 - \xi_M^2}}$$

积分式(7-128)和(7-127)可得 $\xi_M < 1$ 时俯仰角 $\Delta\vartheta$ 和弹道倾角 $\Delta\theta$ 的过渡函数如下

$$\frac{\Delta\vartheta}{K\Delta\delta_z} = T_M \left[\frac{t}{T_M} - 2\xi_M + \frac{T_1}{T_M} - e^{-\frac{\xi_M}{T_M}t} \sqrt{\frac{1 - 2\xi_M \frac{T_1}{T_M} + \left(\frac{T_1}{T_M}\right)^2}{1 - \xi_M^2}} \sin \left[\frac{\sqrt{1 - \xi_M^2}}{T} t + \varphi_2 \right] \right] \quad (7-129)$$

$$\tan\varphi_2 = \frac{\sqrt{1 - \xi_M^2} \left(\frac{T_1}{T_M} - 2\xi_M \right)}{1 - 2\xi_M^2 + \xi_M \frac{T_1}{T_M}}$$

关系式(7-128)和(7-129)所描述的过渡过程图线绘于图 7-8 中。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta\theta}{K\Delta\delta_z} &= T_M \left[\frac{t}{T_M} - 2\xi_M - \frac{e^{-\frac{\xi_M}{T_M}t}}{\sqrt{1 - \xi_M^2}} \sin \left[\frac{\sqrt{1 - \xi_M^2}}{T_M} t - 2\varphi_1 \right] \right] \\ \tan 2\varphi_1 &= \frac{2\xi_M \sqrt{1 - \xi_M^2}}{1 - 2\xi_M^2} \end{aligned} \right\} \quad (7-130)$$

相应的过渡过程表示在图 7-9 中。

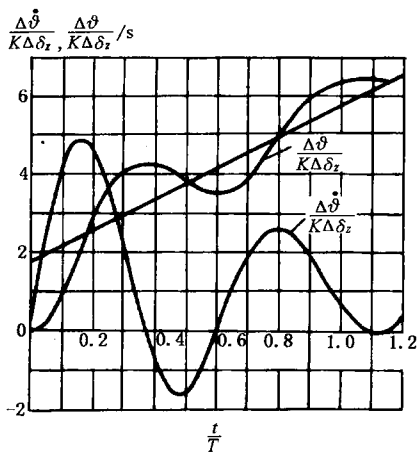


图 7-8 $\Delta\vartheta$ 和 $\Delta\theta$ 在过渡过程中的变化

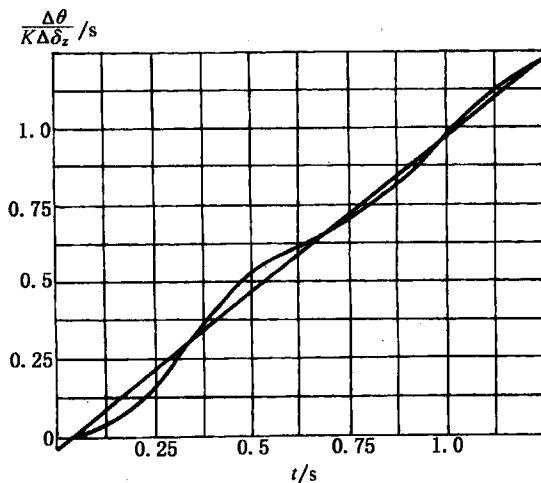


图 7-9 $\Delta\theta$ 在过渡过程中的变化

下面比较 $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\theta$ 角振荡项的振幅。攻角的振荡过程用公式(7-127)来描述,而公式中 K 应代入攻角的传递系数 $K_M T_1$ 。比较式(7-130)和(7-127)后可以看出,弹道倾角的振荡项振幅比攻角振荡项振幅小 T_1/T_M 倍。对于大多数固定弹翼式导弹来说,数值

$$\frac{T_1}{T_M} = \frac{\sqrt{-(a_{24} + a_{22}a_{34})}}{a_{34}}$$

是很大的，以至于纵轴的振动实质上可以归结于攻角的振动。

由图 7-8、7-9 可见，导弹操纵机构在阶跃偏转后如不变化，只能使攻角、俯仰角速度和弹道倾角角速度达到稳定状态、而俯仰角和弹道倾角则是随时间而增大的。

在自动控制理论中，对阶跃作用下的过渡过程的主要品质指标有：传递系数、过渡过程的时间、过渡过程中输出量的最大偏量、超调量和振荡次数等。下面分别进行讨论。

三、导弹的传递系数

1. 导弹传递系数的表达式及其简化

传递系数（即放大系数）为稳态时输出变量与输入变量之比值。对于给定的传递函数 $W(s)$ ，传递系数 K 由如下关系式确定，即

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} W(s) \quad (7-131)$$

导弹纵向传递系数 K 为过渡过程结束时导弹纵向运动参数偏量的稳态值与舵偏角之比。根据式(7-131)可直接由式(7-94)~(7-96)得到导弹传递系数

$$K_M = \frac{\Delta \dot{\vartheta}_s}{\Delta \delta_z} = \frac{\Delta \dot{\theta}_s}{\Delta \delta_z} = -\frac{a_{25}a_{34} + a_{24}a_{35}}{a_{24} + a_{22}a_{34}} \quad (7-132)$$

当 $|a_{22}a_{34}| \ll |a_{24}|$ ， $|a_{35}a_{24}| \ll |a_{25}a_{34}|$ 时有

$$K_M \approx -\frac{a_{25}}{a_{24}}a_{34} = -\frac{m_z^{\delta_z}}{m_z^a} \frac{P + Y^a}{mV} \quad (7-133)$$

例如某地空导弹，攻击高空目标($H=22 \text{ km}$)的典型弹道，经计算得到动力系数值如表 7-6 所示。导弹纵向传递系数 K_M 分别用式(7-132)和(7-133)进行计算，其结果如表中所列。所得近似值与精确值差别不大，说明用近似公式(7-133)来进行初步讨论是可行的。

表 7-6 某地空导弹传递系数精确值与近似值的比较

H/m	1 067.7	4 526	8 210	14 288	220 38
$V/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	546.9	609.2	701.5	880.3	1 090.9
a_{22}/s^{-1}	-1.488	-0.132	-0.774 8	-0.352 8	0.112 7
a'_{24}/s^{-1}	-0.270 9	-0.175 4	-0.097 8	-0.030 0	0.006 4
a_{25}/s^{-2}	-66.54	-54.93	-41.52	-21.59	7.967
a_{34}/s^{-1}	1.296	1.126	0.900	0.514	0.206
a_{24}/s^{-2}	-104.7	-91.97	-76.51	-46.44	17.70
a_{35}/s^{-1}	0.129	0.106	0.076	0.036	0.012
K_M/s^{-1} (精确值)	0.681 5	0.559 3	0.408 8	0.202 4	0.080 5
K_M/s^{-1} (近似值)	0.823 6	0.6725	0.488 4	0.239 0	0.092 6

导弹法向过载的传递系数

$$K_{n_y} = \frac{\Delta n_{ys}}{\Delta \delta_z} = \frac{V}{g} \left(\frac{\Delta \dot{\theta}_s}{\Delta \delta_z} \right) = \frac{V}{g} K_M = \frac{-a_{25}a_{34} + a_{24}a_{35}}{a_{24} + a_{22}a_{34}} \frac{V}{g}$$

$$\approx -\frac{a_{25}a_{34}}{a_{24}} \frac{V}{g} \quad (7-134)$$

导弹攻角传递系数

$$K_\alpha = \frac{\Delta \alpha_s}{\Delta \delta_z} = -\frac{a_{25} + a_{22}a_{35}}{a_{24} + a_{22}a_{34}} \quad (7-135)$$

当 $|a_{22}a_{35}| \ll |a_{25}|$, $|a_{22}a_{34}| \ll |a_{24}|$ 时, 有

$$K_\alpha \approx -\frac{a_{25}}{a_{24}} = -\frac{m_z^{\delta_s}}{m_z^a} \quad (7-136)$$

$$\frac{\Delta \dot{\theta}_s}{\Delta \alpha_s} = \frac{\Delta \dot{\theta}_s}{\Delta \alpha_s} = \frac{-a_{24}a_{35} + a_{25}a_{34}}{a_{25} + a_{22}a_{35}} \approx a_{34} = \frac{P + Y^a}{mV} \quad (1/s) \quad (7-137)$$

对于具有静稳定性的正常式或无尾式导弹, 因为 $a_{24} < 0$, $a_{25} < 0$, 而 $a_{34} > 0$, 且 $|a_{25} a_{34}| > |a_{24} a_{35}|$, 所以传递系数 K_M 、 K_{n_y} 和 K_α 为负。对于具有静稳定性的鸭式和旋转弹翼式导弹, 因为 $a_{25} > 0$, 这些传递系数均为正。

2. 传递系数的物理意义

传递系数 K_M 表示操纵机构偏转角与弹道倾角角速度变化之间的关系, 即

$$\Delta \dot{\theta}_s = K_M \Delta \delta_z \quad (7-138)$$

K_M 越大, 则 $\Delta \dot{\theta}_s$ 越大, 导弹的机动性能越好。

当操纵机构偏转 $\Delta \delta_z$ 角时, 则过渡过程结束后稳态法向过载为

$$\Delta n_{ys} = K_M \frac{V}{g} \Delta \delta_z \quad (7-139)$$

显然, 最大可能的稳态过载, 即可用过载为

$$n_{yp} = K_M \frac{V}{g} \delta_{z\max} + (n_{ys})_{\delta_z=0}$$

式中 n_{yp} ——法向可用过载;

$(n_{ys})_{\delta_z=0}$ —— $\delta_z=0$ 时产生的法向过载。

对气动轴对称型导弹, $(n_{ys})_{\delta_z=0}$ 为零; 对于面对称型导弹, 其值或者等于零, 或者很小, 一般可不考虑。

过载传递系数 $K_M V/g$ 的值应当足够大, 以便使任意弹道上每一点的可用过载都超过需用过载, 并具有必需的裕量。

操纵机构偏转 $\Delta \delta_z$ 角使攻角改变的值为

$$\Delta \alpha_s = K_\alpha \Delta \delta_z$$

攻角传递系数 K_α 表征着操纵机构的效率, 也就是操纵机构改变攻角的能力。

由式(7-137)说明, 过渡过程结束后, 攻角稳态值与弹道倾角角速度稳态值之比取决于动力系数 a_{34} 。换言之, 如果力矩系数之比 $m_z^a/m_z^{\delta_s}$ 已定, 在同样舵偏角下, 虽然攻角稳态值不变, 但是随着动力系数 a_{34} 的增大, 弹道倾角角速度稳态值增加, 也就是导弹的机动性增加。

3. 传递系数与飞行高度、速度及质心位置等关系

对于同一导弹, 如果飞行情况不同, 它的传递系数 K_M 也会有很大变化。由表 7-6 可见,

导弹在低空飞行时, $H=1\,067.7\text{ m}$, 传递系数 $K_M=0.6815$ 。而在高空飞行时, 当 $H=22\,038\text{ m}$, 则 $K_M=0.0805$, 传递系数 K_M 下降了 88.2% , 可见传递系数随飞行状态的变化很大。

传递系数 K_M 随着飞行状态的变化原因可由式(7-133)进行分析。考虑到多数有翼式导弹, 推力 P 要比升力导数 Y^a 小得多, 可将传递系数进一步简化为

$$K_M \approx \frac{-m_{z^*}^a}{m_z^a} \frac{Y^a}{mV} = \frac{-m_{z^*}^a}{m_z^a} \frac{\rho V c_y^a S}{2m} \quad (7-140)$$

由上式可见, 当飞行高度增加时, 因空气密度 ρ 减小, 使得 Y^a 下降, 当其他参数都不发生变化时, 则传递系数 K_M 下降。这意味着飞行高度增加, 导弹的操纵性能变坏。

当飞行速度 V 增加, 而其他参数不发生变化时, 传递系数 K_M 增加。

当静稳定度 $|m_{z^*}^a|$ 增加时, 使得传递系数下降, 这意味着静稳定性的增加会使导弹的操纵性能变坏。为了保证导弹具有一定的操纵性和稳定性, 就必须把 $m_{z^*}^a$ 限制在一定的范围之内, 即限制导弹质心在一定范围内。质心的后限是为了保证导弹具有一定的静稳定性; 质心的前限应满足必要的操纵性能。

由表 7-6 可见, 某地空导弹随着飞行时间的增加, 飞行高度和速度增加, 导弹质量减小, 而导弹传递系数 K_M 则降低。这是因为空气密度 ρ 的减小对传递系数的影响大大超过飞行速度的增加和质量的减小对 K_M 的影响。但是, 在攻击低空目标($H=3\text{ km}$)的典型弹道上, 传递系数却随飞行高度的增加, 由 $K_M=0.6883$ 增加到 $K_M=0.9607$ 。这是因为随着飞行时间的增加, 飞行高度增加, 但空气密度 ρ 下降较少, 而 V 增加起主要作用。

传递系数 K_M 决定导弹的机动性能, 一般要求在飞行弹道上 K_M 变化不要太大。通常可以采取以下两种方法来满足:

(1) 对弹体进行部位安排时, 使质心位置 x_G 和焦点 x_F 的位置变化以抵消飞行速度和高度的影响。因为式(7-140)可以写成

$$K_M \approx \frac{-m_{z^*}^a}{\bar{x}_G - \bar{x}_F} \frac{\rho V S}{2m} \quad (7-141)$$

如果所设计的导弹在飞行过程中能使比值 $\rho V(\bar{x}_G - \bar{x}_F)$ 变化不大, 则可减小传递系数 K_M 的变动范围, 从而有利于提高操纵性。

(2) 在飞行过程中改变弹翼的形状和位置, 以便调节导弹焦点 $\bar{x}_F$ 来适应飞行速度和高度的改变, 从而减小传递系数 K_M 的变化。如“奥利康”地空导弹在主动段飞行时, 弹翼可以沿弹体纵轴移动。当然也可采用自适应控制系统, 使系统自动修正以适应被控对象性能的变化。

四、过渡过程时间

由描述过渡过程式(7-126)和(7-127)不难看出, 固有频率 $\omega_c=1/T_M$ 为独立变量 t 的一个系数。因此, 可以改变时间的比例尺度, 并引入相对时间 $\bar{t}=t/T_M$, 于是方程(7-125)可以写为

$$(s^2 + 2\xi_M s + 1)\Delta X(s) = K\Delta\delta_z(s) \quad (7-142)$$

由方程看出, 过渡过程的特性仅由相对阻尼系数 ξ_M 决定, 而过渡过程时间轴的比例尺则由固有频率 ω_c 来决定。图 7-10 给出由该方程求出的各种不同 ξ_M 值时的过渡过程曲线。由曲线 $\frac{\Delta X}{K\Delta\delta} = f\left(\frac{t}{T_M}\right)$ 看出, 当 $\xi_M=0.75$ 时, 得到的过渡过程最短(以无量纲时间计)。在这种情况下

下, 过渡过程的延续时间等于 $t_p \approx 3T_M = 3/\omega_c$ 。当给定 ξ_M 值时, 过渡过程时间与振荡的固有频率 ω_c 成反比, 或者说与时间常数 T_M 成正比。而

$$T_M = \frac{1}{\sqrt{-(a_{24} + a_{22}a_{34})}} \quad (7-143)$$

上式表明, 增大 $|a_{22}|$ 、 $|a_{24}|$ 和 a_{34} , 将使 T_M 减小 ($|a_{24}|$ 影响是主要的), 从而有利于缩短过渡过程的时间而提高操纵性。但是增加动力系数 $|a_{24}|$, 则要降低传递系数 K_M , 这对操纵性又是不利的。因此, 设计导弹和制导系统时, 必须合理地确定导弹静稳定度。

由式 (7-123) 知时间常数 T_M 与导弹固有频率的关系为

$$\omega_c = \frac{1}{T_M} \approx \sqrt{-a_{24}}$$

以赫兹为单位的导弹固有频率

$$f_c \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{-m_z^* q S b_A}{J_z}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{-(\bar{x}_G - \bar{x}_F) c_y^* q S b_A}{J_z}} \quad (7-144)$$

上式说明, 导弹静稳定性大小决定了它的固有频率。增加静稳定性可以减小时间常数, 而增大固有频率。在设计导弹时, 对固有频率的要求将在 § 10-3 中进行阐述。

时间常数 T_M 和固有频率 f_c 还与飞行状态有关。随着飞行高度的增加, f_c 要减小; 随着飞行速度的增加, f_c 要增大。为了减小 f_c 和 T_M 的变化范围, 要求 $(\bar{x}_G - \bar{x}_F)$ 的差值与速压 q 成反比; 但是这一要求与传递系数 K_M 的要求, 即 $(\bar{x}_G - \bar{x}_F)$ 和 ρV 成正比相反。因此, 设计弹体与控制系统时, 只能采取折中方案, 综合照顾对各传递参数的要求。

五、最大偏差和超调量

利用以上所得结论来求操纵机构阶跃偏转后参数 $\Delta\theta$ 、 $\Delta\alpha$ 、 Δn_y 的最大值。如上所述, 过渡过程特性仅由相对阻尼系数 ξ_M 决定。即:

当 $\xi_M > 1$ 时, 运动参数 X 的最大偏差等于它的稳态值, 即

$$\Delta X_{\max} = \Delta X_s = K \Delta \delta \quad (7-145)$$

当 $\xi_M < 1$ 时, 利用式 (7-127) 写出

$$\Delta X = \Delta X_s \left[1 - \frac{e^{-\frac{\xi_M}{T_M} t}}{\sqrt{1 - \xi_M^2}} \cos \left(\frac{\sqrt{1 - \xi_M^2}}{T_M} t - \varphi_1 \right) \right] \quad (7-146)$$

在过渡过程中, ΔX 达到最大值的时刻是由条件 $\Delta \dot{X} = 0$ 所确定的时刻, 即

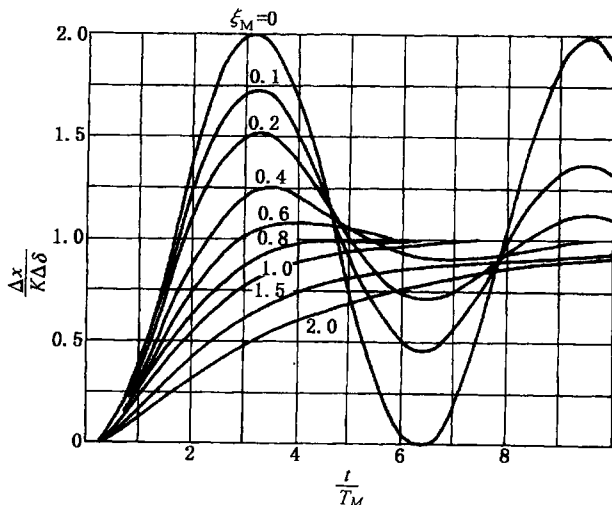


图 7-10 $\Delta\theta(t)$ 、 Δn_y 和 $\Delta\alpha(t)$ 的过渡过程特性与相对阻尼系数的关系

$$t_p = \frac{\pi}{\omega} \quad (7-147)$$

这是过渡过程开始经过半个周期的时刻。这时, ΔX 的最大值等于

$$\Delta X_{\max} = \Delta X_s \left(1 + e^{\frac{-\xi_M \pi}{T_M \omega}} \right) \quad (7-148)$$

运动参数(过载、攻角等)超过稳态值的增量通常称为超调量, 即

$$\Delta X_p = \Delta X_{\max} - \Delta X_s \quad (7-149)$$

相对超调量 σ 等于超调量与稳态值之比

$$\sigma = \frac{\Delta X_{\max} - \Delta X_s}{\Delta X_s} \quad (7-150)$$

则

$$\Delta X_{\max} = (1 + \sigma) \Delta X_s \quad (7-151)$$

显然, 当舵作阶跃偏转时

$$\sigma = e^{\frac{-\xi_M \pi}{T_M \omega}} = e^{\frac{-\pi \xi_M}{\sqrt{1-\xi_M^2}}} \quad (7-152)$$

由此可见, 在操纵机构阶跃偏转时, 相对超调量只取决于相对阻尼系数 ξ_M 。通常导弹的 ξ_M 很小, 尤其是在高空飞行时 ξ_M 更小, 因此相对超调量 σ 是很大的。 $\Delta X_{\max}$ 是导弹在所研究的弹道点上操纵机构瞬时偏转 $\Delta \delta_z$ 角后产生的。在一般情况下, σ 值取决于操纵机构的偏转规律 $\delta(t)$, 特别取决于操纵机构的偏转速度。

导弹在飞行过程中的最大过载是导弹结构强度设计中需要考虑的一个重要参数。对于攻击活动目标的导弹, 常有可能要求操纵机构急剧偏转到极限位置的控制信号。在弹体响应的过渡过程中, 会使导弹产生很大的攻角或侧滑角, 从而产生大的过载。利用式(7-151)可以确定过渡过程中的最大过载。一般来说, 导弹过载的相对超调量取决于导弹-自动驾驶仪系统的阻尼特性和操纵机构的偏转速度。相对超调量的大小可以通过计算或由模拟的结果确定或从飞行试验数据中取得。

作为第一次近似, 导弹过载的相对超调量可按公式(7-152)计算, 这时假设操纵机构偏转速度为无限大(操纵机构偏转速度约达 $100 \sim 150(^{\circ})/s$ 时, 偏转速度可以看做是无限大)。相对阻尼系数值可以通过典型弹道上的特征点计算求出。于是过渡过程中最大过载偏量为

$$\Delta n_{y\max} = \Delta n_{ys}(1 + \sigma) = \frac{V}{g} K_M \Delta \delta_z (1 + \sigma) \quad (7-153)$$

如果未扰动运动是在可用过载下飞行, 那么导弹在飞行过渡过程中最大法向过载值应为

$$n_{y\max} = n_{yP} + \Delta n_{ys}(1 + \sigma) \quad (7-154)$$

式中

$$n_{yP} = \frac{P\alpha + Y}{G} = - \left(\frac{P + c_y q S}{G} \frac{m_z^{\delta_z}}{m_z^2} \right) \delta_{\max} \quad (7-155)$$

最严重的情况是: 当导弹在可用过载下飞行时, 舵偏角由一个极限位置突然偏转到另一个极限位置, 即由原来 $-\delta_{z\max}$ 变为 $+\delta_{z\max}$, 或由 $+\delta_{z\max}$ 变为 $-\delta_{z\max}$, 这时, 舵偏角相当于突然偏转了两倍最大值, 即

$$\Delta \delta_z = \pm 2\delta_{\max}$$

最大过载偏量为

$$\Delta n_{y\max} = \pm 2n_{yP}(1 + \sigma) \quad (7-156)$$

最大过载为

$$n_{y\max} = \pm n_{yP} \mp 2n_{yP}(1 + \sigma) = \mp n_{yP}(1 + 2\sigma) \quad (7-157)$$

或

$$n_{y\max} = n_{yP} \left(1 + 2e^{-\pi\xi_M} / \sqrt{1 - \xi_M^2} \right) \quad (7-158)$$

这时过渡过程中的超调量将增大一倍。

由于 σ 值可能达到比较大的数值,因此,在上述情况下,相应的最大过载比可用过载要大得多。

当操纵机构以不大的速度偏转时,出现的过载超调量要小得多。根据操纵机构偏转速度的不同,对于同一导弹,在飞行弹道的某一点上可以得到不同的过载与时间的关系。图7-11所示为舵偏转角由零偏转到最大值时,不同偏转速度对过载超调量的影响。

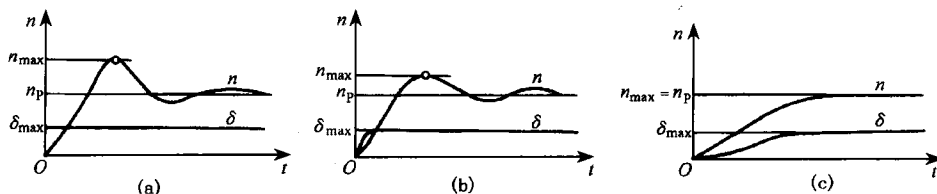


图 7-11 操纵机构偏转速度对过载超调量的影响

在设计导弹及其控制系统时,希望尽可能减小过载超调量,以使强度计算时所依据的过载值较低。一般来说,减小舵的偏转速度可以减小超调量。但是从制导系统的精确度要求,操纵机构的偏转应当没有延迟,并且偏转是非常迅速的,这对于地空导弹尤其如此。

为了减小过载的最大值,希望导弹具有比较大的相对阻尼系数 ξ_M ,阻尼系数

$$\xi_M = \frac{a_{34} - a_{22} - a'_{24}}{2\sqrt{-(a_{24} + a_{22}a_{34})}} \approx \frac{a_{34} - a_{22}}{2\sqrt{-a_{24}}} \quad (7-159)$$

上式说明,增大动力系数 $|a_{22}|$ 和 a_{34} 对提高 ξ_M 值是有利的,而 $|a_{24}|$ 却不能太大。这与传递系数 K_M 对 $|a_{24}|$ 的要求相同。但是 $|a_{24}|$ 太小时,将使时间常数 T_M 增大,这又会使过渡过程时间增加。将相应的动力系数表达式代入式(7-159)后得到

$$\xi_M = \frac{\frac{1}{2J_z} m_z^{\omega_z} \rho V S b_A^2 + \frac{P}{mV} + \frac{1}{2m} c_y^a \rho V S}{2\sqrt{\frac{1}{2J_z} m_z^a \rho V^2 S b_A}} \quad (7-160)$$

式中 P/mV 值与其他项相比可以略去,则可进一步简化成

$$\xi_M \approx \frac{\left(-m_z^{\omega_z} \sqrt{\rho S b_A^2 / J_z} \right) + \left(c_y^a \sqrt{\rho S / m} \right)}{2\sqrt{-2m_z^a b_A / J_z}} \quad (7-161)$$

由式(7-161)看出,导弹因受气动外形布局的限制以及不可能选择过大的弹翼面积,相对阻尼系数 ξ_M 的数值不可能接近0.75。如某地空导弹 $\xi_M = 0.04 \sim 0.13$,某反坦克导弹 $\xi_M = 0.12 \sim 0.19$ 。

相对阻尼系数 ξ_M 与飞行速度无直接关系,所以超调量 σ 也不随飞行速度的变化而发生明显的改变。但是 ξ_M 与空气密度有关,随着飞行高度的增加,它将明显地下降。如例7-1的地空导弹相对阻尼系数随高度的变化列于表7-7。

表 7-7 某地空导弹相对阻尼系数 ξ_M 随高度 H 的变化

H/km	5.03	9.19	13.1	16.17	19.67	22.0
ξ_M	0.121	0.095	0.072	0.056	0.044	0.035

由表可见,虽然随着飞行时间的增加,飞行高度增加,空气密度 ρ 下降,静稳定度 m_z^a 减小,但是空气密度 ρ 的影响是主要的。

为了提高导弹的相对阻尼系数 ξ_M ,改善过渡过程品质,特别是为了减小超调量,多数导弹都是通过自动驾驶仪的作用来补偿弹体阻尼的不足。

§ 7-6 用拉氏变换法求解过渡过程

在 § 7-2 中对于如何确定特征方程式的根进行了讨论,但是要解出扰动运动的过渡过程还得确定表达式(7-23)

$$\left. \begin{aligned} \Delta V(t) &= A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + A_3 e^{\lambda_3 t} + A_4 e^{\lambda_4 t} \\ \Delta \vartheta(t) &= B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} + B_3 e^{\lambda_3 t} + B_4 e^{\lambda_4 t} \\ \Delta \theta(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t} + C_4 e^{\lambda_4 t} \\ \Delta \alpha(t) &= D_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 e^{\lambda_2 t} + D_3 e^{\lambda_3 t} + D_4 e^{\lambda_4 t} \end{aligned} \right\} \quad (7-23)$$

中的系数 A_i 、 B_i 、 C_i 和 D_i ($i=1\sim 4$)。

求解过渡过程可以采用不同的方法,例如对于幂次比较高的方程式,可以采用频率法,这是一种近似的方法。对于幂次不太高的方程,在求得特征方程式的根后,可以采用定系数法及拉氏变换法。定系数法是一种比较古典的方法,计算起来比较麻烦,而通过拉氏变换来确定这些系数就比较简单。这里所研究的导弹运动方程,在一般的情况下,幂次都不太高,所以用拉氏变换法确定系数更为方便。下面介绍如何通过已求得的传递函数 $W_{\delta_z}^V(s)$ 、 $W_{\delta_z}^\vartheta(s)$ 、 $W_{\delta_z}^\theta(s)$ 和 $W_{\delta_z}^\alpha(s)$ 、或者是 $\Delta V(s)$ 、 $\Delta \vartheta(s)$ 、 $\Delta \theta(s)$ 和 $\Delta \alpha(s)$ 来求过渡过程 $\Delta V(t)$ 、 $\Delta \vartheta(t)$ 、 $\Delta \theta(t)$ 和 $\Delta \alpha(t)$ 。

一、用拉氏变换法求解过渡过程

如果已确定了某运动参数的拉氏变换式 $X(s)$,并将它表示成为

$$X(s) = I(s)/D(s) \quad (7-162)$$

分母 $D(s)$ 的根为 s_1 、 s_2 、 s_3 、 $\dots$ 、 s_n ,则可以将上式写为

$$X(s) = \frac{I(s)}{D(s)} = \frac{I(s)}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)\dots(s-s_n)} \quad (7-163)$$

进一步又可以分解为

$$X(s) = \frac{I(s)}{D(s)} = \frac{I_1(s)}{(s-s_1)} + \frac{I_2(s)}{(s-s_2)} + \dots + \frac{I_n(s)}{(s-s_n)} \quad (7-164)$$

这样,分子上的 $I_1(s)$ 、 $I_2(s)$ 、 $\dots$ 、 $I_n(s)$ 都需要加以确定。将方程式(7-163)两端各乘以 $(s-s_n)$,则得

$$\frac{I(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_{n-1})} = \left[\frac{I_1(s)}{s-s_1} + \frac{I_2(s)}{s-s_2} + \dots + \frac{I_{n-1}(s)}{s-s_{n-1}} \right] (s-s_n) + I_n \quad (7-165)$$

再将 $s=s_n$ 代入上式就可以得到

$$I_n(s_n) = \frac{I(s_n)}{(s_n - s_1)(s_n - s_2) \cdots (s_n - s_{n-1})} \quad (7-166)$$

不难证明

$$\begin{aligned} (s_n - s_1)(s_n - s_2) \cdots (s_n - s_{n-1}) &= \left. \frac{d(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_{n-1})(s - s_n)}{ds} \right|_{s=s_n} \\ &= \left. \frac{dD(s)}{ds} \right|_{s=s_n} = D'(s_n) \end{aligned} \quad (7-167)$$

所以式(7-166)可以写成

$$I_n(s_n) = \frac{I(s_n)}{D'(s_n)} \quad (7-168)$$

把 s_n 变换为 $s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}$, 并以同样的方法可以得到

$$I_k(s_k) = I(s_k)/D'(s_k) \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \quad (7-169)$$

将上式代入式(7-164)则得

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{I(s)}{D(s)} = \frac{1}{s - s_1} \frac{I(s_1)}{D'(s_1)} + \frac{1}{s - s_2} \frac{I(s_2)}{D'(s_2)} + \cdots + \frac{1}{s - s_n} \frac{I(s_n)}{D'(s_n)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{s - s_k} \frac{I(s_k)}{D'(s_k)} \end{aligned} \quad (7-170)$$

将上式进行拉氏反变换, 就得到过渡过程的表达式

$$X(t) = \sum_{k=1}^n \frac{I(s_k)}{D'(s_k)} e^{s_k t} \quad (7-171)$$

不难看出, $I(s_k)/D'(s_k)$ 就是所需要确定的 $e^{s_k t}$ 的系数。

当阶跃输入作用时, 参数拉氏变换式的分母有一个零根, 这时某参量拉氏变换式可以表示为

$$X(s) = I(s)/sD_1(s) \quad (7-172)$$

求过渡过程的方法同前, 所不同之处是第一项变为

$$I_1(s) = I(0)/D_1(0) \quad (7-173)$$

而其余各项可以按下式

$$I_k(s) = I(s_k)/s_k D'_1(s_k) \quad (7-174)$$

确定。这样

$$X(s) = \frac{I(0)}{sD_1(0)} + \sum_{k=2}^n \frac{I(s_k)}{s_k D'_1(s_k)} \frac{1}{s - s_k} \quad (7-175)$$

经拉氏反变换后得

$$X(t) = \frac{I(0)}{D_1(0)} + \sum_{k=2}^n \frac{I(s_k)}{s_k D'_1(s_k)} e^{s_k t} \quad (7-176)$$

用拉反变换确定过渡过程的步骤归纳如下:

- (1) 确定扰动运动方程组, 并写出特征方程式, 求出其根;
- (2) 根据初始条件将扰动运动方程组进行拉氏变换, 求得拉氏变换的表达式;
- (3) 用解代数方程的方法, 求得各参数的拉氏变换式或传递函数;
- (4) 求出系数;

(5) 进行拉氏反变换求得原函数 $X(t)$;

(6) 进行检验, 是否满足初始条件。如果检验中发现不能满足初始条件, 这就表明计算中有错误。

二、举例

例 7-9 求自由扰动运动。

某反坦克导弹在起飞后 12 s 弹道点上, 以贴近地面接近水平飞行, 飞行速度 $V=118$ m/s, 若导弹受到偶然干扰作用, 引起攻角初始偏差 $\Delta\alpha_0=2^\circ$, 弹道偏角初始偏量 $\Delta\theta_0=-2^\circ$ ($\Delta\alpha_0=-\Delta\theta_0=0.0349$ rad)。该点动力系数为: $a_{11}=-0.1102\text{ s}^{-1}$, $a_{13}=-9.786\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $a_{14}=-17.256\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $a_{21}=-0.000487\text{ m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$, $a_{22}=-1.3415\text{ s}^{-1}$, $a_{24}=-126.78\text{ s}^{-1}$, $a'_{24}=0$, $a_{25}=-16.508\text{ s}^{-2}$, $a_{31}=0.00162\text{ s}^{-1}$, $a_{33}=0.00582\text{ s}^{-1}$, $a_{34}=1.4764\text{ s}^{-1}$, $a_{35}=0.01935\text{ s}^{-1}$ 。求自由扰动运动的过渡过程。

根据式(7-20)、(7-21)求得特征方程式

$$\lambda^4 + 2.922\lambda^3 + 129.07\lambda^2 + 13.426\lambda + 1.922 = 0$$

按照 § 7-2-7 中方法求得特征方程根(见例 7-6)

$$\lambda_{1,2} = -1.409 \pm i11.26, \quad \lambda_{3,4} = -0.052 \pm i0.1106$$

因动力系数 $a'_{24}=0$, 由式(7-86)~(7-89)可知纵向自由扰动运动偏量为

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{\Delta_{V\theta_0}(s)}{\Delta(s)} \Delta\theta_0, \quad \Delta\vartheta = \frac{\Delta_{\vartheta\theta_0}(s)}{\Delta(s)} \Delta\theta_0 \\ \Delta\theta &= \frac{\Delta_{\theta\theta_0}(s)}{\Delta(s)} \Delta\theta_0, \quad \Delta\alpha = \frac{\Delta_{\alpha\theta_0}(s)}{\Delta(s)} \Delta\theta_0 \\ \Delta V(s) &= \frac{[(a_{13} - a_{14})s^2 - (a_{22}a_{13} - a_{22}a_{14})s - a_{24}a_{13}]\Delta\theta_0}{s^4 + P_1s^3 + P_2s^2 + P_3s + P_4} \\ &= \frac{(7.47s^2 + 10.02s - 1240.67)(-0.0349)}{s^4 + 2.922s^3 + 129.07s^2 + 13.426s + 1.922} \\ \Delta\vartheta(s) &= \frac{[-a_{24}s + a_{24}a_{11} + a_{21}(a_{13} - a_{14})]\Delta\theta_0}{s^4 + 2.922s^3 + 129.07s^2 + 13.426s + 1.922} \\ &= \frac{(126.78s + 13.97)(-0.0349)}{s^4 + 2.922s^3 + 129.07s^2 + 13.426s + 1.922} \\ \Delta\theta(s) &= \frac{[s^3 - (a_{11} + a_{22})s^2 - (a_{24} - a_{11}a_{22})s + a_{24}a_{11} - a_{21}a_{14}]\Delta\theta_0}{s^4 + 2.922s^3 + 129.07s^2 + 13.426s + 1.922} \\ &= \frac{(s^3 + 1.4517s^2 + 126.93s + 13.96)(-0.0349)}{s^4 + 2.922s^3 + 129.07s^2 + 13.426s + 1.922} \\ \Delta\alpha(s) &= \frac{[-s^3 + (a_{11} + a_{22})s^2 - a_{11}a_{22}s + a_{21}a_{13}]\Delta\theta_0}{s^4 + 2.922s^3 + 129.07s^2 + 13.426s + 1.922} \\ &= \frac{(-s^3 - 1.4517s^2 - 0.148s + 0.0048)(-0.0349)}{s^4 + 2.922s^3 + 129.07s^2 + 13.426s + 1.922} \end{aligned}$$

由 $\Delta V(s)$ 求 $\Delta V(t)$ 。因分母多项式没有零根, 求解过渡过程运用式(7-171)。其中

$$I(s) = (7.47s^2 + 10.02s - 1240.67)(-0.0349) \quad (7-177)$$

$$D'(s) = 4s^3 + 8.766s^2 + 258.14s + 13.426 \quad (7-178)$$

将特征方程不同根 $\lambda_{1,2}$ 、 $\lambda_{3,4}$ 代入式(7-177)和(7-178), 则得到

$$\begin{aligned}\frac{I(\lambda_1)}{D'(\lambda_1)} &= \frac{76.37 + i4.34}{686.38 - i2813.5} = 0.0048 + i0.026 \\ \frac{I(\lambda_2)}{D'(\lambda_2)} &= 0.0048 - i0.026 \\ \frac{I(\lambda_3)}{D'(\lambda_3)} &= \frac{43.32 - i0.0356}{-0.0729 + i28.297} = -0.0056 - i1.528 \\ \frac{I(\lambda_4)}{D'(\lambda_4)} &= -0.0056 + i1.528\end{aligned}$$

将系数值和根值代入式(7-171), 就可以得到 $\Delta V(t)$

$$\begin{aligned}\Delta V(t) &= \sum_{k=1}^4 \frac{I(s_k)}{D'(s_k)} e^{s_k t} = (0.0048 + i0.026)e^{(-1.409 + i11.26)t} + \\ &\quad (0.0048 - i0.026)e^{(-1.409 - i11.26)t} + \\ &\quad (-0.0056 - i1.528)e^{(-0.052 + i0.1106)t} + \\ &\quad (-0.0056 + i1.528)e^{(-0.052 - i0.1106)t}\end{aligned}$$

将上式化为三角函数

$$\begin{aligned}A' &= 2\sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{0.0048^2 + 0.026^2} = 0.052 \\ \nu &= 11.26 \times 57.3 = 645.2(^{\circ})/s \\ \psi &= \arctan \frac{a}{b} = \arctan \frac{0.0048}{0.026} = 180^{\circ} - 10.46^{\circ} = 169.54^{\circ} \\ \Delta V_{1,2}(t) &= 0.052e^{-1.409t} \sin(645.2t + 169.54^{\circ})\end{aligned}$$

同样方法可以得到对应 $\lambda_{3,4}$ 的速度偏量值

$$\begin{aligned}\Delta V_{3,4}(t) &= 3.056e^{-0.052t} \sin(6.337t - 0.21^{\circ}) \\ \Delta V(t) &= 0.052e^{-1.409t} \sin(645.2t + 169.54^{\circ}) + \\ &\quad 3.056e^{-0.052t} \sin(6.337t - 0.21^{\circ})\end{aligned}$$

按照上述同样步骤, 也可分别求出 $\Delta\vartheta(t)$ 、 $\Delta\theta(t)$ 和 $\Delta\alpha(t)$ 。

$$\begin{aligned}\Delta\vartheta(t) &= 1.994^{\circ}e^{1.409t} \sin(645.2t + 82.8^{\circ}) - \\ &\quad 2.229^{\circ}e^{-0.052t} \sin(6.337t + 62.52^{\circ}) \\ \Delta\theta(t) &= 0.265^{\circ}e^{-1.409t} \sin(645.2t - 6.7^{\circ}) - \\ &\quad 2.212^{\circ}e^{-0.052t} \sin(6.337t + 62.2^{\circ}) \\ \Delta\alpha(t) &= 1.9998^{\circ}e^{-1.409t} \sin(645.2t + 89.66^{\circ}) - \\ &\quad 0.0034^{\circ}e^{-0.052t} \sin(6.337t + 1.53^{\circ})\end{aligned}$$

上述方程所用单位 ΔV 为(m/s), $\Delta\vartheta$ 、 $\Delta\theta$ 和 $\Delta\alpha$ 为($^{\circ}$)。

将 $t=0$ 代入上列各式进行验算, 则

$$\begin{aligned}\Delta V(0) &= -0.00176 \approx 0, \quad \Delta\vartheta(0) = 0.0008 \approx 0 \\ \Delta\theta(0) &= -1.9803^{\circ} \approx -2^{\circ}, \quad \Delta\alpha(0) = 1.9997 \approx 2^{\circ}\end{aligned}$$

符合初始条件。

把各运动参数偏量的计算结果画成曲线见图 7-2 和 7-3。

例 7-10 求操纵机构阶跃偏转时的过渡过程。

例 7-9 中反坦克导弹操纵机构产生阶跃俯仰指令系数 $\Delta K_y = 0.1$ 时的过渡过程。

采用短周期扰动运动方程，其特征方程为

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda(\lambda - a_{22}) & 0 & -(a'_{24}\lambda + a_{24}) \\ 0 & \lambda - a_{33} & -a_{34} \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

即

$$\lambda^3 + 2.812\lambda^2 + 126.78\lambda - 0.738 = 0$$

其根为

$$\lambda_{1,2} = -1.406 \pm i11.23, \quad \lambda_3 = 0.00582$$

操纵机构产生阶跃俯仰指令系数 $\Delta K_y = 0.1$ ，其拉氏变换式为

$$\Delta K_y(s) = \frac{0.1}{s}$$

$$\Delta \vartheta(s) = W_{K_y}^{\vartheta}(s) \Delta K_y(s) = \frac{0.1[(-a_{35}a'_{24} + a_{25})s + a_{25}(a_{34} - a_{33}) - a_{35}a_{24}]}{s(s^3 + 2.812s^2 + 126.78s - 0.738)}$$

$$= \frac{0.1(-16.51s - 21.83)}{s(s^3 + 2.812s^2 + 126.78s - 0.738)}$$

$$\Delta \theta(s) = W_{K_y}^{\theta}(s) \Delta K_y(s) = \frac{0.1[a_{35}s^2 - a_{35}(a_{22} + a'_{24})s + a_{25}a_{34} - a_{35}a_{24}]}{s(s^3 + 2.812s^2 + 126.78s - 0.738)}$$

$$= \frac{0.1[0.1935s^2 + 0.026s - 21.92]}{s(s^3 + 2.812s^2 + 126.78s - 0.738)}$$

$$\Delta \alpha(s) = W_{K_y}^{\alpha}(s) \Delta K_y(s) = \frac{0.1[-a_{35}s^2 + (a_{35}a_{22} + a_{25})s - a_{25}a_{33}]}{s(s^3 + 2.812s^2 + 126.78s - 0.738)}$$

$$= \frac{0.1(0.01935s^2 - 17.83s + 0.096)}{s(s^3 + 2.812s^2 + 126.78s - 0.738)}$$

则应用式(7-176)进行求解得

$$X(t) = \frac{I(0)}{D_1(0)} + \sum_{k=2}^4 \frac{I(s_k)}{s_k D_1'(s_k)} e^{s_k t}$$

类似例 7-9 中的求法得

$$\begin{aligned} \Delta \vartheta(t) &= 2.96 + (0.00623 - i0.0015)e^{(-1.406 + i11.23)t} + \\ &\quad (0.00623 + i0.0015)e^{(-1.406 - i11.23)t} - 2.972e^{0.00582t} \\ &= 169.6^\circ + 0.733^\circ e^{-1.406t} \sin(643.47t + 76.2^\circ) - 170.296^\circ e^{0.00582t} \\ \Delta \theta(t) &= 2.97 + (-0.000218 - i0.00021)e^{(-1.406 + i11.23)t} + \\ &\quad (-0.000218 + i0.00021)e^{(-1.406 - i11.23)t} - 2.97e^{0.00582t} \\ &= 170.18^\circ + 0.0437^\circ e^{-1.406t} \sin(643.47t - 46^\circ) - 170.18^\circ e^{0.00582t} \\ \Delta \alpha(t) &= -0.013 + (0.00692 - i0.00077)e^{(-1.406 + i11.23)t} + \\ &\quad (0.00692 + i0.00077)e^{(-1.406 - i11.23)t} - 0.0000285e^{0.00582t} \\ &= -0.7449^\circ + 0.796^\circ e^{-1.406t} \sin(643.47t + 83.65^\circ) - 0.00163^\circ e^{0.00582t} \end{aligned}$$

各运动参数偏量随时间的变化曲线见图 7-12。

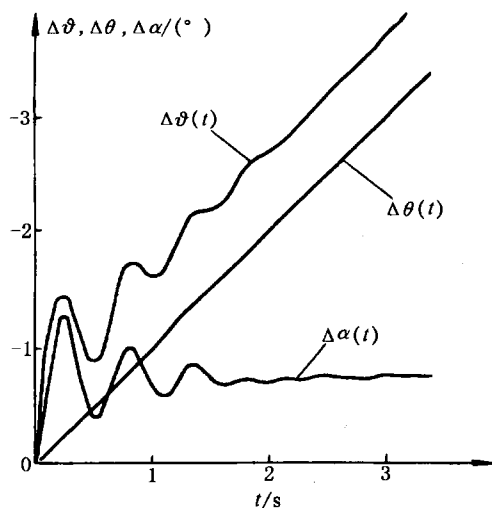


图 7-12 反坦克导弹运动参数偏量随时间的变化(当俯仰指令系数阶跃变化 $\Delta K_y = 0.1$ 时)

三、应用计算机解扰动运动方程组

扰动运动方程组的求解,运用电子数字计算机进行计算和绘图是很方便的,可以节省人工。这里用 C 语言编写解自由扰动运动的计算程序(见附录二)。为了简明,所写的程序仅针对特征方程为两对共轭复根组合的情况。在实际使用时,应编写成适用于特征方程根的各种不同组合情况。

计算的原始数据及要求同例 7-9。计算结果为

$$\begin{aligned}\Delta V(t) &= 0.0525e^{-1.461t}\sin(645.524t + 168.44^\circ) + \\ &\quad 3.052e^{-0.052t}\sin(6.325t - 0.201^\circ) \\ \Delta\vartheta(t) &= 1.976e^{-1.461t}\sin(645.524t + 81.81^\circ) - \\ &\quad 2.229e^{-0.052t}\sin(6.325t + 62.07^\circ) \\ \Delta\theta(t) &= 0.278e^{-1.461t}\sin(645.524t - 8.072^\circ) - \\ &\quad 2.227e^{-0.052t}\sin(6.325t + 62.147^\circ) \\ \Delta\alpha(t) &= 1.995e^{-1.461t}\sin(645.524t + 89.808^\circ) - \\ &\quad 0.00345e^{-0.052t}\sin(6.325t + 1.725^\circ)\end{aligned}$$

由此可见,与例 7-9 的计算结果是很接近的。

用计算机求解过渡过程的优点是十分明显的,只要用高级语言编出一个通用的求解扰动运动的计算程序,并给定初值与计算参数,就能按程序自动地进行计算,直至最后打印出结果并绘制成曲线输出。

$\Delta V(t)$ 、 $\Delta\vartheta(t)$ 、 $\Delta\theta(t)$ 和 $\Delta\alpha(t)$ 由绘图仪绘制的曲线见图 7-13。

除了应用电子数字计算机求解过渡过程外,还可以利用电子模拟计算机来研究各动力系数对扰动运动的影响。它同样能够解出各运动参量随时间的变化。

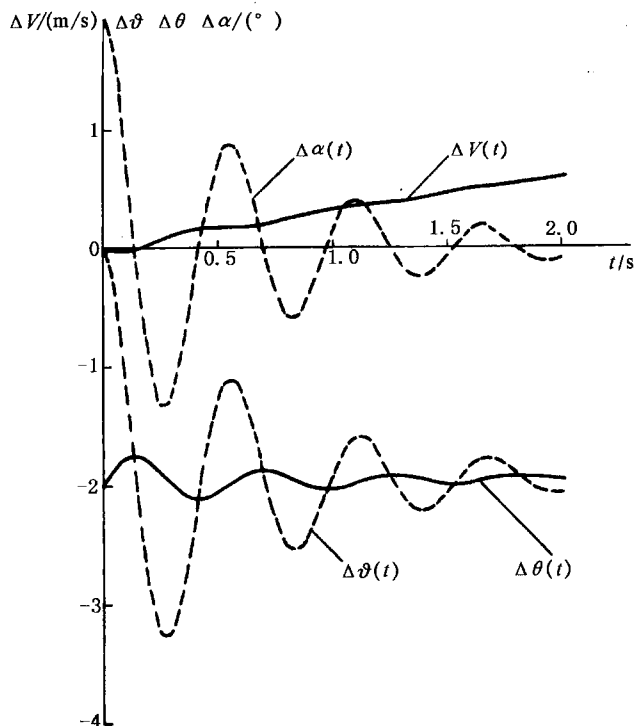


图 7-13 导弹纵向自由扰动运动 (运动的前两秒)

§ 7-7 导弹弹体的频率特性

导弹弹体的频率特性和传递函数一样是弹体动态特性的一种表示方法。

求出输入为操纵机构阶跃偏转的传递函数后, 就可以进一步求出弹体的频率特性。导弹弹体是作为控制对象这一环节出现在制导回路中。因此, 如果用频率法进行制导回路设计及分析时, 必须先作出弹体的频率特性曲线。

所谓弹体频率特性, 其物理意义是: 当舵作谐波规律振动时, 导弹运动参数的响应特性, 有时也称为导弹对于操纵机构偏转的跟随特性。

假设操纵机构按谐波规律偏转, 则

$$\delta(t) = \delta_0 \sin \omega_B t$$

式中 δ_0 ——操纵机构偏转振幅(°);

ω_B ——操纵机构振荡的角频率(°/s)。

导弹的扰动运动是由自由运动和强迫振荡叠加而成。自由运动可以是非周期的, 也可以是振荡的, 强迫振荡的频率与操纵机构振荡频率 ω_B 相同。例如在操纵机构谐波偏转情况下, 运动参数偏量 $\Delta \dot{\theta}$ 、 Δn_y 和 $\Delta \alpha$ 的变化用如下方程来描述

$$T_M^2 \ddot{x} + 2\xi_M T_M \dot{x} + x = K \delta_0 \sin \omega_B t \quad (7-179)$$

该方程的通解可以表示为

$$X = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + D \delta_0 \sin(\omega_B t + \varphi) \quad (7-180)$$

D 和 φ 值用下列公式确定

$$D(\omega_B) = \frac{K}{\sqrt{(1 - \omega_B^2 T_M^2)^2 + 4\xi_M^2 \omega_B^2 T_M^2}} \quad (7-181)$$

$$\varphi(\omega_B) = -\arctan \frac{2\xi_M \omega_B T_M}{1 - \omega_B^2 T_M^2} \quad (7-182)$$

从式(7-180)看出, 参数 $\Delta\dot{\theta}$ 、 Δn_y 和 $\Delta\alpha$ 相对于操纵机构的振荡具有相位延迟。例如, 按绝对值而言, $\Delta\dot{\theta}$ 、 Δn_y 和 $\Delta\alpha$ 的最大值在 δ_x 最大值之后才出现。

如果 $\xi_M < 1$, 则根 λ_1 和 λ_2 为共轭复根, 这时方程(7-179)的通解可以表示为

$$X = C \frac{e^{-\frac{\xi_M}{T_M} t}}{\sqrt{1 - \xi_M^2}} \cos \left[\frac{\sqrt{1 - \xi_M^2}}{T_M} t - \varphi_1 \right] + D \delta_0 \sin(\omega_B t + \varphi) \quad (7-183)$$

式中 C 和 φ_1 ——根据初始条件确定的任意常数。

在通解(7-180)和(7-183)中, 表达式

$$X_f = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (7-184)$$

和

$$X_f = C \frac{e^{-\frac{\xi_M}{T_M} t}}{\sqrt{1 - \xi_M^2}} \cos \left[\frac{\sqrt{1 - \xi_M^2}}{T_M} t - \varphi_1 \right] \quad (7-185)$$

为齐次方程式的通解, 对应于导弹的自由扰动运动。表达式

$$X_B = D \delta_0 \sin(\omega_B t + \varphi) \quad (7-186)$$

为方程(7-179)的特解, 对应于导弹的强迫振荡。

当初始条件 $t=0$ 时, $X(0)=0$, 强迫振荡过程开始, X_f 和 X_B 绝对值相等, 但正负号相反, 即

$$X = X_f + X_B = 0$$

接着, 自由运动比较快地衰减掉, 经过一定的时间间隔后, 导弹的扰动运动就只剩下强迫运动, 见图 7-14。

结构参数和气动参数对于导弹自由运动的影响前面已经讨论过, 这里和自动控制理论中的一样, 仅限于研究导弹的强迫运动。这样, 导弹的频率特性就可以理解为: 舵按不同频率的谐波规律振动时, 导弹的强迫运动响应特性。

幅频特性 $D(\omega_B)$ 给出了强迫振荡的振幅 $D\delta_0$ 对操纵机构振幅 δ_0 的比值随操纵机构的频率 ω_B 而变化的关系。表达式(7-181)和根据该表达式在图 7-15 上作出的图线是幅频特性的一个例子。这是对应于振荡环节的幅频特性。

相频特性 $\varphi(\omega_B)$ 是强迫振荡的相位相对于操纵机构振荡相位的偏移随操纵机构的频率 ω_B 而变化的关系。根据公式(7-182), 在图 7-16 上作出了各种相对阻尼系数 ξ_M 情况下的相位移 φ 与频率比 ω_B/ω_c 的关系曲线。这是对应于振荡环节的相频特性。

频率特性的作图方法, 可参看自动控制理论有关书籍。开环系统输出端的强迫谐波振荡振幅对输入端的谐波振荡振幅的比值等于该系统传递函数 $W(s)$ 在 $s=i\omega$ 时的模值, 即

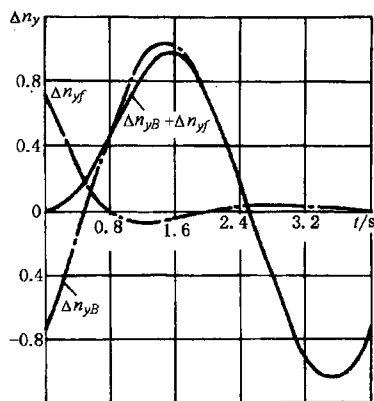


图 7-14 导弹强迫振荡运动开始时过载偏差的变化

$$D(\omega) = |W(i\omega)| \quad (7-187)$$

当 $s=i\omega$ 时, 该传递函数的相角等于输出端强迫振荡相对于输入端谐波振荡的相位移, 即

$$\varphi(\omega) = \arg W(i\omega) \quad (7-188)$$

从表达式(7-105)可见, 如果输出参数为 $\Delta\theta$, Δn_y 和 $\Delta\alpha$, 导弹的动态特性可用振荡环节的传递函数来描述。而振荡环节的频率特性表示在图 7-15 和图 7-16 上。

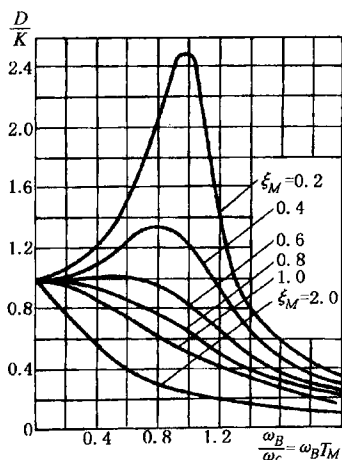


图 7-15 振荡环节的幅频特性

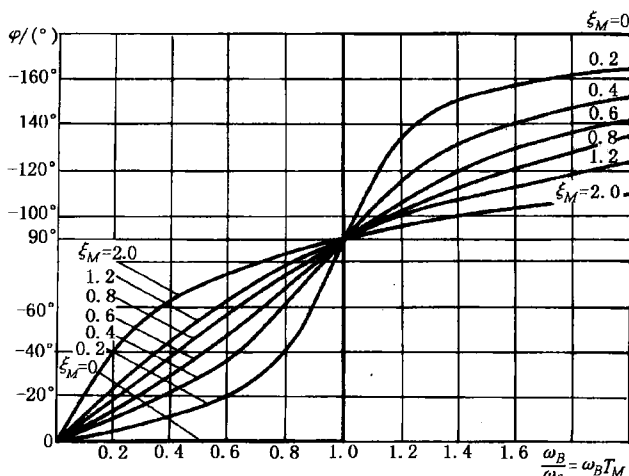


图 7-16 振荡环节的相频特性

由图 7-15 看出, 当阻尼很小, 而且操纵机构偏转频率 ω_B 接近于振荡固有频率 ω_c 时, 则出现共振现象。此时导弹运动参数的振幅大于过渡过程结束稳态时所产生的振幅, 即

$$D\delta_0 > K\delta_0$$

当

$$\frac{\omega_B}{\omega_c} = \sqrt{1 - 2\xi_M^2} \quad (7-189)$$

时, 得到振幅最大值。

当 $\omega_B/\omega_c=1$ 时, 操纵机构偏转频率与固有频率一致, 而固有频率就是没有阻尼($\xi_M=0$)情况下的自由振荡频率。

当 $\omega_B/\omega_c=\sqrt{1-\xi_M^2}$ 时, 舵偏转的频率与有阻尼情况下的自由振荡频率一致。因此, 发生最大振幅的频率比有阻尼情况下的自由振荡频率稍低些。

由于 ξ_M 值很小时出现的共振现象最为严重, 所以通常将固有频率 ω_c 当作共振频率, 即

$$\omega_c = \sqrt{-(a_{24} + a_{22}a_{34})} \quad (7-190)$$

总之, 固有频率 ω_c (或时间常数 $T_M=1/\omega_c$) 对弹体动态特性的影响仅次于传递系数 K 。

如果使舵以频率 ω_c 或与之接近的频率偏转, 则在阻尼很小时, 可以使导弹得到很大的过载和攻角。为了避免共振, 控制系统应当使操纵机构频率不要接近于导弹的固有频率。

现在研究导弹的相频特性。由方程(7-179)~(7-182)可见, $\Delta\theta$ 、 $\Delta\alpha$ 和 Δn_y 的振荡相位相同。当 $K>0$ 时, $\Delta\theta$ 、 Δn_y 和 $\Delta\alpha$ 的强迫振荡相位

$$\varphi = -\arctan \frac{2\xi_M T_M \omega_B}{1 - T_M^2 \omega_B^2} \quad (7-191)$$

滞后于操纵机构谐波振荡的相位。见图 7-16。公式中的“-”号说明产生了相位滞后。

随着 $\omega_B/\omega_c = T_M \omega_B$ 的增大, 相位移也增大。当 $\omega_B/\omega_c = 0$ 时, $\varphi = 0$; 当 $\omega_B = \omega_c$, 即当共振时, 相位移 $\varphi = -90^\circ$; 当 $\omega_B/\omega_c = \infty$ 时, $\varphi = -180^\circ$ 。从图 7-16 可见, 除了 $\xi_M = 0$ 的情况外, $\Delta\dot{\theta}$ 、 Δn_y 和 $\Delta\alpha$ 的振荡在相位上经常滞后于操纵机构的振荡。当没有阻尼($\xi_M = 0$)时, 在频率 ω_B 从零到固有频率 ω_c 的范围内没有相位移, 而当超过固有频率($\omega_B > \omega_c$)时, 相位移等于 -180° 。在这两种情况下($\varphi = 0$ 或 $\varphi = -180^\circ$), 参数 $\Delta\dot{\theta}$ 、 Δn_y 和 $\Delta\alpha$ 的绝对值与操纵机构的偏转角成正比, 即导弹无延迟地跟随着操纵机构偏转。因此, 导弹理想地跟随操纵机构只有在没有阻尼($\xi_M = 0$)时才能达到。

在设计控制系统时, 总是把导弹的频率特性绘成图线。由自动控制理论中知道, 采用对数频率特性曲线, 可以使运算大大简化。这主要是因为将传递函数分为简单的典型环节后, 利用对数就可以将各环节的振幅和相位分别相加得出总的频率特性曲线, 因此实用时经常采用这种方法。

例 7-11 某型地空导弹在飞行 18 s 时, 弹体传递函数为

$$W_{\delta_z}^g(s) = \frac{4.15(0.392s + 1)}{s(0.1342s^2 + 2 \times 0.274 \times 0.1342s + 1)}$$

由上式可以看出, 传递函数是由下列四个典型环节组成:

1. 放大环节

$$W_1(s) = 4.15$$

2. 一阶微分环节

$$W_2(s) = 0.392s + 1$$

3. 积分环节

$$W_3(s) = \frac{1}{s}$$

4. 振荡环节

$$W_4(s) = \frac{1}{0.1342s^2 + 2 \times 0.274 \times 0.1342s + 1}$$

各典型环节以及总的对数频率特性曲线绘于图 7-17。

例 7-12 某型导弹根据动力系数求得的参数为 $|K| = 1.4$, $T_M = 0.1$, $\xi_M = 0.15$, $T_1 = 0.42$ 。这时弹体的传递函数应为

$$W_{\delta_z}^g(s) = \frac{1.4}{0.1^2s^2 + 2 \times 0.15 \times 0.1s + 1}$$

$$W_{\delta_z}^a(s) = \frac{1.4 \times 0.42}{0.1^2s^2 + 2 \times 0.15 \times 0.1s + 1}$$

$$W_{\delta_z}^g(s) = \frac{1.4}{s(0.1^2s^2 + 2 \times 0.15 \times 0.1s + 1)}$$

$$W_{\theta}^g(s) = W_{\theta}^g(s) = T_1s + 1 = 0.42s + 1$$

这四个传递函数的对数频率特性, 分别如图 7-18、7-19 和 7-20 所示。

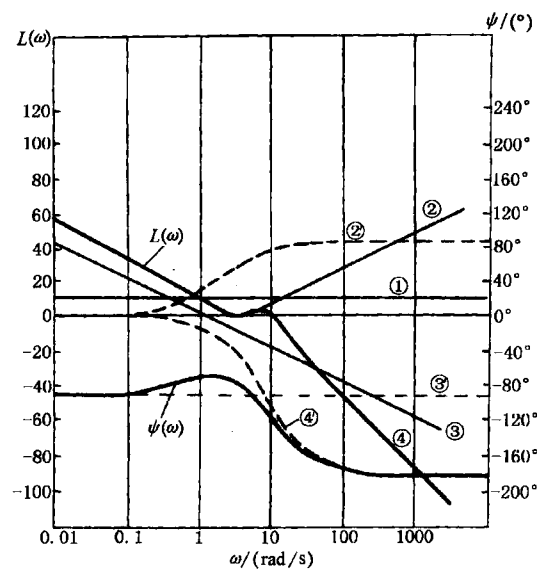


图 7-17 某型地空导弹 $W_{\delta_z}^s(s)$ 的对数频率特性

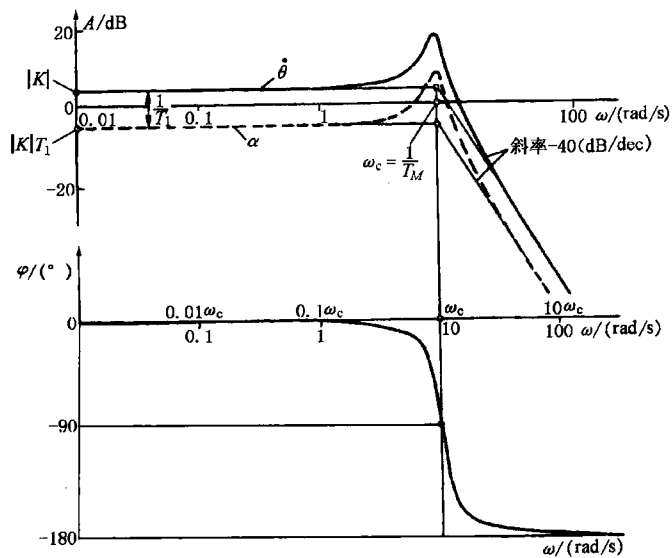


图 7-18 $W_{\delta_z}^{\dot{\theta}}(s)$ 、 $W_{\delta_z}^s(s)$ 的对数频率特性

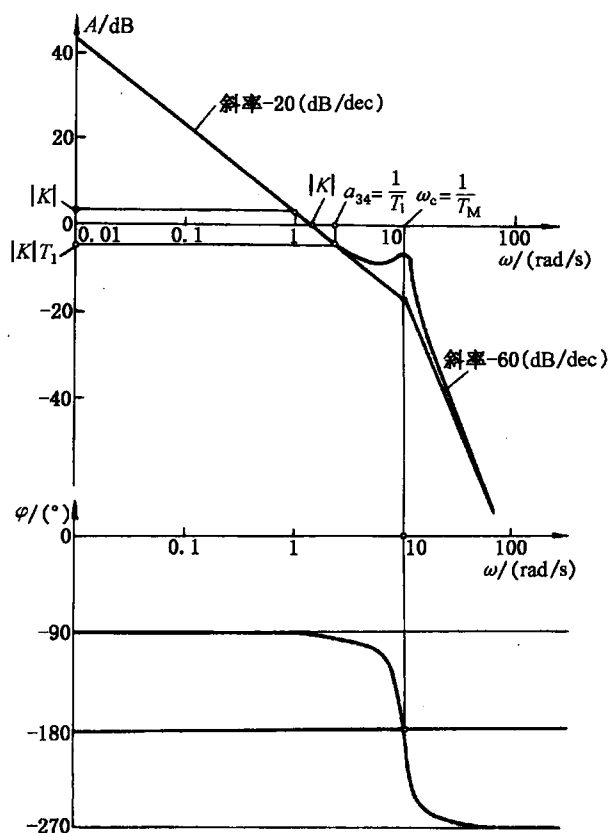


图 7-19 $W_{\Sigma}^g(s)$ 的对数频率特性

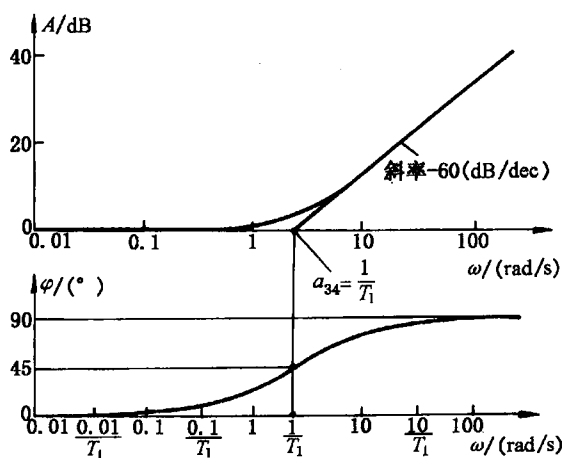


图 7-20 $W_{\theta}^g(s)$ 或 $W_{\delta}^g(s)$ 的对数频率特性

从上面的例子中可以看出，只要知道了传递函数的形式以及参数 $|K|$ 、 T_M 、 ξ_M 和 T_1 ，传递函数的频率特性就可以求出。

§ 7-8 典型弹道及其特征点的选择原则

前面已经提到在导弹制导系统的初步设计阶段,一般只需研究某些具有代表性质的弹道点即特征点的系统特性。用线性化和系数冻结法,使系统简化为常系数的线性系统。这种近似处理的方法的合理性是由于导弹的制导系统(尤其是自动驾驶仪)反应过程比系数的变化来得快,因此在自动驾驶仪设计中,通常可以采用特征点进行设计。这样,系统设计的好坏,除了设计方法正确以外,还决定于所选典型弹道及特征点的合理性,即要使特征点所反映的系统品质能代表导弹各种可能飞行弹道的任意点的品质;同时尽可能地减少所选特征点的数目,以便于设计。对于一般导弹,常把加速器分离前后,续航发动机停止工作前后,最小和最大飞行高度,最大动压和最小动压,最大需用过载和最大攻角等飞行时刻作为特征点。

一、典型弹道的选择

某地空导弹在攻击区内的飞行弹道,根据导引方法不同有三点法和前置点法飞行弹道,按目标的来向分有垂直平面弹道和倾斜平面弹道。由弹道计算结果表明,各动力系数变化范围最大的是三点法导引的垂直平面弹道。而三点法导引的倾斜平面的弹道或前置点导引的弹道,在相同发射角下,其动力系数变化范围均较小,因此,只需研究三点法导引的垂直平面弹道,并从中选取特征点。

由第七章中知道,各动力系数均是气动参数、结构参数、发动机参数、飞行高度和速度的函数。气动参数除了在跨音速范围内变化急剧外,在超音速范围内($Ma=1.5\sim 4.5$),一般只变化两倍左右。转动惯量、质量、推力的变化均不超过两倍。空气密度 ρ 随高度增加而显著下降(高空 $H=22\text{ km}$ 的 ρ 值仅为海平面的 5.2%)。而飞行速度随高度增加而增大。

根据某地空导弹的可能攻击区,按目标高度可分为高空、中空、低空三种情况,以命中点看有远界、近界之分。这种分法是为了便于叙述不同弹道所具有的特点。

1. 高空近界弹道

在攻击区的最大高度上($H=22\text{ km}$),空气密度最小,它对导弹的气动性能具有显著的影响。因为导弹在主动段加速度总是正的,所以,在同一高度上近界弹道点的速度总是比远界的小。这样,在大发射角下高空近界弹道包含了可用过载最小的特征点。这由式(7-134)可知,即

$$n_y \approx \frac{-a_{25}a_{34}}{a_{24}} \frac{V}{g} \delta_z \approx \frac{-m_z^{\delta_z}}{m_z^a} \frac{\rho V^2}{g} \left(\frac{c_y^a S}{2m} + \frac{P}{mV^2 \rho} \right) \delta_z$$

$$\text{即 } n_{yp} = \frac{-m_z^{\delta_z}}{m_z^a} \frac{\rho V^2}{g} \left(\frac{c_y^a S}{2m} + \frac{P}{mV^2 \rho} \right) \delta_{\max}$$

同时,由于高空空气稀薄,弹体的气动阻尼显得不足,因此,弹体在高空的动态品质是很差的。包含这种特征点的典型弹道,不论是检验过载的大小是否足够,还是检验制导系统动态品质指标是否满足,都是必须的。因此,高空近界弹道应被选为典型弹道。

2. 低空远界弹道

低空时空气密度最大,且远界点飞行速度最大(因续航飞行段加速),因此动压 $q=\frac{1}{2}\rho V^2$

具有最大值, 导弹由此而获得最大可用过载。但是, 导弹结构强度允许的过载是受限制的, 在大速压时, 必须使舵偏转所造成的过载不超过允许值。所以, 设计时应该考虑这种典型弹道。

3. 需用过载最大的弹道

在高空近界弹道上, 虽然可用过载达最小值, 但需用过载并不是最大值。计算表明, 出现最大需用过载是中空近界弹道。某地空导弹中空($H=10\text{ km}$)近界弹道上需用过载达 $5g$, 而在该高度上的可用过载则在近界最小, 所以应对此点进行检验。根据对系统精确度分析, 此弹道点动态误差较大。

4. 干扰力和干扰力矩最大的弹道

地空导弹在大气层内飞行时, 大气风是飞行中外干扰的一个主要因素。由于风引起的干扰力和干扰力矩对导弹运动的影响取决于导弹本身的特性、风速的大小及其变化规律, 而风的流动特性是随地点、高度、季节而变化的。对导弹进行设计时, 要考虑到导弹的结构和控制系统能够承受飞行区域中可能出现的最强烈的风值。某地空导弹所攻击的目标高度在 30 km 以下, 而在 $9\sim 12\text{ km}$ 内风的影响最大。特别是需用过载最大的弹道, 同时又受到风的干扰作用, 这时导弹承受的过载最大, 需要作为典型弹道来考虑。

根据以上分析得到对某地空导弹选择典型弹道的原则为: 包含可用过载最小的弹道; 包含可用过载最大的弹道; 包含需用过载最大的弹道; 干扰力和干扰力矩最大的弹道。而其他弹道上的气动特性、弹道特性等将介于这些典型弹道之间。

二、特征点的选择

有了典型弹道, 使得分析问题简化。但是具体的每条弹道都是由无穷多个点组成的, 在选择参数、分析动态品质时, 不可能将所有点都进行分析, 所以要选择能代表飞行特性的典型点, 也就是特征点。这样不但能节省计算工作量, 且易于抓住问题的本质, 掌握其变化规律。例如, 对某地空导弹, 下列各点可选为特征点:

1. 助推器脱落点

助推器把Ⅱ级导弹送到一定高度, 以便使其越过跨音速区, 达到易于操纵的正常飞行速度值(一般在 $400\sim 500\text{ m/s}$ 以上, 飞行时间约 $3\sim 5\text{ s}$, 飞行距离超过 1 km)。无论采用轴向助推器或是侧向助推器, 当Ⅰ、Ⅱ级分离时, 导弹将受到很大的扰动, 对装有轴向助推器的某地空导弹分离过程的初步研究表明: 分离后Ⅱ级的攻角和侧滑角很大, 可达 20° 左右, 而Ⅰ、Ⅱ级的相互作用力可达到约 20 kN 。

在设计时, 不仅要保证Ⅰ级分离时的稳定性, 而且对Ⅱ级结构的确定, 也要满足飞行时有良好的操纵性和足够的稳定性。所以对导弹动态特性进行分析时, 必须要考虑助推器脱落点的影响, 因为脱落干扰直接影响引入段的散布。

2. 控制段始点

导弹在引入段前是不受地面导引站控制的, 因此, 外界或本身干扰作用可能使导弹射入波束偏差很大, 甚至不能引入波束进行控制, 所以控制段始点应作为特征点。

3. 速压最小点(可用过载最小点)

由前所述, 高空近界弹道(大发射角)包含了可用过载的最小点。计算表明: 高空近界弹道末点是速压最小点, 这点动力系数 a_{22} 、 a_{24} 、 a_{25} 、 a_{34} 及传递系数公式中的 K_M 、 ξ_M 的绝对值均达最小值, 而时间常数 T_1 、 T_M 则达最大值, 所以该点弹体放大系数最小, 可用过载最小,

阻尼系数最小，而时间常数最大，因此，动态品质最差。选这一点为特征点，一方面检验可用过载是否大于需用过载，另一方面要分析动态品质是否满足指标要求。

4. 速压最大点（可用过载最大点）

由前所述，低空远界弹道（小发射角）的空气密度变化不大，其弹道末点的飞行速度最大，因此低空远界弹道末点速压具有最大值。计算表明，这点动力系数 a_{22} 、 a_{24} 、 a_{34} 及放大系数 K_M 和阻尼系数 ξ_M 均达到最大值，动态品质最好。因为此点可用过载最大，所以必须分析是否超过过载的允许值。

总之，用速压最小点及速压最大点来找出 $K_M V$ 的变化范围，如果要提高高空的可用过载，在低空的可用过载就有可能超过允许值，弹体的强度和飞行攻角的范围都不允许。有的导弹解决这个问题是利用速压传感器，根据速压的变化，不断改变陀螺仪的电位计上的电压，使电路的传递系数随速压的变化而改变。

5. 需用过载最大点以及干扰力和干扰力矩较大的点

需用过载的大小与弹道曲率半径有关。曲率半径愈小，需用过载愈大。因此需用过载在弹道末点最大，一般是中空近界弹道末点。在中空 10 km 左右，风的干扰较大，动态误差大，导引准确度最差，但此点可用过载并不是最大值，而需用过载为最大，所以要检验机动能力是否够，动态品质是否满足要求，应作为一个特征点。

总之，特征点的确定是在可能飞行弹道特性分析的基础上，选择具有特征意义的动力系数为极值的点。对于不同类型的导弹，特征点是不完全相同的，而应根据具体条件进行确定。

第八章 导弹弹体侧向动态特性分析

在第六章中,已经讨论了在一定的条件下,导弹的扰动运动可以分为纵向和侧向两个互相独立的扰动运动。这样就可以分别地研究纵向和侧向扰动运动。这种处理问题的方法,实践证明是可行的。

在这一章中,要研究导弹侧向扰动运动的规律,分析侧向扰动运动的组成及其动态特性。对于具有气动轴对称型和倾斜自动稳定的导弹,当重力影响可以忽略不计时,侧向扰动运动又可以分为偏航与倾斜两个互相独立的扰动运动,而偏航扰动运动的特性完全与纵向扰动运动一致。但是,在研究具有面对称导弹(如飞机型导弹)的侧向扰动运动时,导弹的偏航扰动运动和倾斜扰动运动就不能分开研究。在这种情况下,研究侧向动态特性是比较复杂的问题。因此,本章重点是讨论具有面对称型导弹的侧向动态特性。

§ 8-1 侧向扰动运动方程组

由方程组(6-42)得到面对称型导弹侧向扰动运动方程组为

$$\left. \begin{aligned} \cos\theta \frac{d\Delta\psi_v}{dt} &= \frac{P - Z^\beta}{mV} \Delta\beta - \frac{P\alpha + Y}{mV} \Delta\gamma_v - \frac{Z^{\delta_y}}{mV} \Delta\delta_y - \frac{F_{g_z}}{mV} \\ \frac{d\Delta\omega_x}{dt} &= \frac{M_x^\beta}{J_x} \Delta\beta + \frac{M_x^{\omega_x}}{J_x} \Delta\omega_x + \frac{M_x^{\omega_y}}{J_x} \Delta\omega_y + \frac{M_x^{\delta_x}}{J_x} \Delta\delta_x + \frac{M_x^{\delta_y}}{J_x} \Delta\delta_y + \frac{M_{g_x}}{J_x} \\ \frac{d\Delta\omega_y}{dt} &= \frac{M_y^\beta}{J_y} \Delta\beta + \frac{M_y^{\omega_x}}{J_y} \Delta\omega_x + \frac{M_y^{\omega_y}}{J_y} \Delta\omega_y + \frac{M_y^{\delta_x}}{J_y} \Delta\delta_x + \frac{M_y^{\delta_y}}{J_y} \Delta\delta_y + \frac{M_{g_y}}{J_y} \\ \frac{d\Delta\psi}{dt} &= \frac{1}{\cos\theta} \Delta\omega_y \\ \frac{d\Delta\gamma}{dt} &= \Delta\omega_x - \tan\theta \Delta\omega_y \\ \frac{d\Delta z}{dt} &= -V \cos\theta \Delta\psi_v \\ \Delta\beta &= \cos\theta \Delta\psi - \cos\theta \Delta\psi_v + \alpha \Delta\gamma \\ \Delta\gamma_v &= \tan\theta \Delta\beta + \frac{\cos\theta}{\cos\theta} \Delta\gamma \end{aligned} \right\} \quad (8-1)$$

在方程组(8-1)中, $d\Delta z/dt = -V \cos\theta \Delta\psi_v$ 式可以单独求解。方程组的第一式可消去偏量 $\Delta\gamma_v$ 。为此,变换 $\frac{P\alpha + Y}{mV} \Delta\gamma_v$ 项,其中 $\frac{P\alpha + Y}{mV}$ 是未扰动运动的参数。如果以方程组(6-3)描述未扰动运动,则其中的第二式为

$$mV \frac{d\theta}{dt} = P(\sin\alpha \cos\gamma_v + \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma_v) + Y \cos\gamma_v - Z \sin\gamma_v - G \cos\theta$$

前面已假定在未扰动飞行中,侧向参数是足够小,因此,可以忽略这些参数的乘积;例如 $\sin\beta \sin\gamma_v \approx \beta \gamma_v \approx 0$,同时,令 $\sin\alpha \approx \alpha$, $\cos\gamma_v \approx 1$ 。这样,可得到侧向参数为小量的、空间的未扰动飞行的简化方程

$$mV \frac{d\theta}{dt} = P\alpha + Y - G\sin\theta$$

利用此方程，以及方程组（8-1）中 $\Delta\gamma_v$ 的表达式，可得到

$$\left(\frac{P\alpha + Y}{mV}\right) \Delta\gamma_v = \left(\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{V}\cos\theta\right) \left(\tan\theta\Delta\beta + \frac{\cos\vartheta}{\cos\theta}\Delta\gamma\right)$$

再忽略小量乘积，并如以前所假定的，即认为未扰动飞行中的导数 $\dot{\theta} = \dot{\vartheta} - \dot{\alpha}$ 为小量。于是得到

$$\left(\frac{P\alpha + Y}{mV}\right) \Delta\gamma_v = \frac{g}{V}(\sin\theta\Delta\beta + \cos\vartheta\Delta\gamma)$$

于是方程组（8-1）可以改写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Delta\omega_x}{dt} &= \frac{M_x^\beta}{J_x}\Delta\beta + \frac{M_x^{\omega_x}}{J_x}\Delta\omega_x + \frac{M_x^{\omega_y}}{J_x}\Delta\omega_y + \frac{M_x^{\delta_x}}{J_x}\Delta\delta_x + \frac{M_x^{\delta_y}}{J_x}\Delta\delta_y + \frac{M_{gx}}{J_x} \\ \frac{d\Delta\omega_y}{dt} &= \frac{M_y^\beta}{J_y}\Delta\beta + \frac{M_y^{\omega_x}}{J_y}\Delta\omega_x + \frac{M_y^{\omega_y}}{J_y}\Delta\omega_y + \frac{M_y^{\delta_x}}{J_y}\Delta\delta_x + \frac{M_y^{\delta_y}}{J_y}\Delta\delta_y + \frac{M_{gy}}{J_y} \\ \cos\theta \frac{d\Delta\psi_v}{dt} &= \left(\frac{P - Z^\beta}{mV} - \frac{g}{V}\sin\theta\right)\Delta\beta - \frac{g}{V}\cos\vartheta\Delta\gamma - \frac{Z^{\delta_y}}{mV}\Delta\delta_y - \frac{F_{gz}}{mV} \\ \frac{d\Delta\psi}{dt} &= \frac{1}{\cos\vartheta}\Delta\omega_y \\ \frac{d\Delta\gamma}{dt} &= \Delta\omega_x - \tan\vartheta\Delta\omega_y \\ \cos\theta\Delta\psi_v &= \cos\theta\Delta\psi - \Delta\beta + \alpha\gamma \end{aligned} \right\} \quad (8-2)$$

由此可见，导弹的侧向扰动运动是由五个一阶微分方程和一个几何关系式所组成的方程组来描述。该方程组包含六个未知数： $\Delta\omega_x$ 、 $\Delta\omega_y$ 、 $\Delta\psi_v$ 、 $\Delta\psi$ 、 $\Delta\beta$ 、 $\Delta\gamma$ 。

为了使方程组（8-2）书写简便，引入方程系数的简化表示，即用符号 b_{ij} 表示侧向动力系数，注脚 i 表示方程式序号，注脚 j 表示运动参数偏量序号。表 8-1 所列为运动参数偏量的编号，表 8-2 为动力系数 b_{ij} 的表达式。这样，侧向扰动运动方程组就可写成如下的形式

表 8-1 侧向运动参数偏量的编号

运动参数偏量序号 j	1	2	3	4
运动参数偏量	$\Delta\omega_x$	$\Delta\omega_y$	$\Delta\psi_v$	$\Delta\beta$
运动参数偏量序号 j	5	6	7	8
运动参数偏量	$\Delta\delta_y$	$\Delta\gamma$	$\Delta\delta_x$	M_{gx}, M_{gy}, M_{gz}

表 8-2 导弹侧向扰动运动方程中的动力系数 b_{ij} 的符号和表达式

运动方程式序号 i	运动参数偏量的序号 j							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$b_{11} = \frac{M_{x^{\omega_x}}}{J_x}$ (s^{-1})	$b_{12} = \frac{M_{x^{\omega_y}}}{J_x}$ (s^{-1})	$b_{13} = 0$	$b_{14} = \frac{M_{x^\beta}}{J_x}$ (s^{-2})	$b_{15} = \frac{M_{x^{\delta_y}}}{J_x}$ (s^{-2})	$b_{16} = 0$	$b_{17} = \frac{M_{x^{\delta_x}}}{J_x}$ (s^{-2})	$b_{18} = \frac{1}{J_x}$ ($kg^{-1} \cdot m^{-2}$)

续表

运动方程序号 i	运 动 参 数 偏 量 的 序 号 j							
	1	2	3	4	5	6	7	8
2	$b_{21} = \frac{M_y^{\omega_x}}{J_y}$ (s ⁻¹)	$b_{22} = \frac{M_y^{\omega_y}}{J_y}$ (s ⁻¹)	$b_{23} = 0$	$b_{24} = \frac{M_y^{\beta}}{J_y}$ (s ⁻²) $b'_{24} = \frac{M_y^{\dot{\beta}}}{J_y}$ (s ⁻¹)	$b_{25} = \frac{M_y^{\delta_y}}{J_y}$ (s ⁻²) $b'_{25} = \frac{M_y^{\dot{\delta}_y}}{J_y}$ (s ⁻¹)	$b_{26} = 0$	$b_{27} = 0$	$b_{28} = \frac{1}{J_y}$ (kg ⁻¹ · m ⁻²)
3	$b_{31} = 0$	$b_{32} = \frac{-\cos\theta}{\cos\vartheta}$	$b_{33} = 0$	$b_{34} = \frac{P-Z^{\beta}}{mV}$ (s ⁻¹)	$b_{35} = \frac{-Z^{\delta_y}}{mV}$ (s ⁻¹)	$b_{36} = \frac{-g\cos\vartheta}{V}$ (s ⁻¹)	$b_{37} = 0$	$b_{38} = -\frac{1}{mV}$ (s · kg ⁻¹ · m ⁻¹)

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d\Delta\omega_x}{dt} &= b_{11}\Delta\omega_x + b_{12}\Delta\omega_y + b_{14}\Delta\beta + b_{15}\Delta\delta_y + b_{17}\Delta\delta_x + b_{18}M_{gx} \\
 \frac{d\Delta\omega_y}{dt} &= b_{21}\Delta\omega_x + b_{22}\Delta\omega_y + b_{24}\Delta\beta + b'_{24}\Delta\dot{\beta} + b_{25}\Delta\delta_y + b_{28}M_{gy} \\
 \cos\theta \frac{d\Delta\psi_V}{dt} &= (b_{34} - a_{33})\Delta\beta + b_{36}\Delta\gamma + b_{35}\Delta\delta_y + b_{38}F_{gx} \\
 \frac{d\Delta\psi}{dt} &= \frac{1}{\cos\vartheta}\Delta\omega_y \\
 \frac{d\Delta\gamma}{dt} &= \Delta\omega_x - \tan\vartheta\Delta\omega_y \\
 \cos\theta\Delta\psi_V &= \cos\theta\Delta\psi - \Delta\beta + \alpha\Delta\gamma
 \end{aligned} \right\} \quad (8-3)$$

还可以把方程组 (8-3) 简化, 使其降为四阶。利用关系式

$$\cos\theta\Delta\psi_V = \cos\theta\Delta\psi - \Delta\beta + \alpha\Delta\gamma$$

消去方程组 (8-3) 中未知数 $\Delta\psi_V$ 。先微分该等式并去掉小量的乘积 $\frac{d\theta}{dt}\Delta\psi_V$ 、 $\frac{d\theta}{dt}\Delta\psi$ 、 $\frac{d\alpha}{dt}\Delta\gamma$, 再利用方程组 (8-3) 的第四式, 则得到

$$\begin{aligned}
 \cos\theta \frac{d\Delta\psi_V}{dt} &= \cos\theta \frac{d\Delta\psi}{dt} - \frac{d\Delta\beta}{dt} + \alpha \frac{d\Delta\gamma}{dt} \\
 &= \frac{\cos\theta}{\cos\vartheta}\Delta\omega_y - \frac{d\Delta\beta}{dt} + \alpha \frac{d\Delta\gamma}{dt}
 \end{aligned}$$

这样, 方程组 (8-3) 的第三式可以改写为

$$\begin{aligned}
 b_{32}\Delta\omega_y + (b_{34} - a_{33})\Delta\beta + \frac{d\Delta\beta}{dt} - \alpha \frac{d\Delta\gamma}{dt} + b_{36}\Delta\gamma \\
 = -b_{35}\Delta\delta_y - b_{38}F_{gx}
 \end{aligned} \quad (8-4)$$

式中

$$b_{32} = \frac{-\cos\theta}{\cos\vartheta}$$

方程组 (8-3) 中第四式在解出基本方程组后, 可直接求出增量 $\Delta\psi$

$$\Delta\psi = \frac{1}{\cos\vartheta} \int_0^t \Delta\omega_y(t) dt + \Delta\psi_0 \quad (8-5)$$

于是扰动运动方程组为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Delta\omega_x}{dt} - b_{11}\Delta\omega_x - b_{12}\Delta\omega_y - b_{14}\Delta\beta &= b_{15}\Delta\delta_y + b_{17}\Delta\delta_x + b_{18}M_{gx} \\ \frac{d\Delta\omega_y}{dt} - b_{21}\Delta\omega_x - b_{22}\Delta\omega_y - b_{24}\Delta\beta - b'_{24}\Delta\dot{\beta} &= b_{25}\Delta\delta_y + b_{28}M_{gy} \\ b_{32}\Delta\omega_y + (b_{34} - a_{33})\Delta\beta + \frac{d\Delta\beta}{dt} - \alpha \frac{d\Delta\gamma}{dt} + b_{36}\Delta\gamma \\ &= -b_{35}\Delta\delta_y - b_{38}F_{gx} \\ \Delta\omega_x - \tan\vartheta\Delta\omega_y - \frac{d\Delta\gamma}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8-6)$$

将第二式中 $\Delta\dot{\beta}$ 用第三式代替, 第三式中 $\Delta\dot{\gamma}$ 用第四式代替, 方程组可以写成如下矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\omega}_x \\ \Delta\dot{\omega}_y \\ \Delta\dot{\beta} \\ \Delta\dot{\gamma} \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} \Delta\omega_x \\ \Delta\omega_y \\ \Delta\beta \\ \Delta\gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{17} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta\delta_x + \begin{bmatrix} b_{15} \\ b_{25} - b'_{24}b_{35} \\ -b_{35} \\ 0 \end{bmatrix} \Delta\delta_y + \begin{bmatrix} b_{18}M_{gx} \\ -b_{38}b'_{24}F_{gx} + b_{28}M_{gy} \\ -b_{38}F_{gx} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8-7)$$

式中动力系数四阶方阵

$$N = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{14} & 0 \\ b_{21} + b'_{24}\alpha & b_{22} - b'_{24}b_{32} - b'_{24}\alpha\tan\vartheta & b_{24} - b'_{24}(b_{34} - a_{33}) & -b_{38}b'_{24} \\ \alpha & -(\alpha\tan\vartheta + b_{32}) & -(b_{34} - a_{33}) & -b_{36} \\ 1 & -\tan\vartheta & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8-8)$$

在式 (8-7) 中, 若等式右端舵偏角和干扰力矩、干扰力的列矩阵等于零, 则该矩阵方程描述侧向自由扰动运动。如果舵偏角和干扰力矩、干扰力的列矩阵不为零, 则矩阵方程描述侧向强迫扰动运动。

§ 8-2 侧向自由扰动运动分析

一、特征方程式及其根的形态

与纵向扰动运动一样, 式 (8-6) 的齐次方程组的特解为

$$\Delta\omega_x = Ae^{\lambda t}, \quad \Delta\omega_y = Be^{\lambda t}, \quad \Delta\beta = Ce^{\lambda t}, \quad \Delta\gamma = De^{\lambda t}$$

式中 A, B, C, D ——常数。

将这些特解代入式 (8-6) 的齐次方程组中, 并消去因子 $e^{\lambda t}$, 则得到由四个相对于未知数 A, B, C, D 的线次齐次方程所组成的方程组。如果特征行列式等于零, 即

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - b_{11} & -b_{12} & -b_{14} & 0 \\ -b_{21} & \lambda - b_{22} & -(b'_{24}\lambda + b_{24}) & 0 \\ 0 & b_{32} & \lambda + b_{34} - a_{33} & -\alpha\lambda + b_{36} \\ 1 & -\tan\vartheta & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (8-9)$$

则该方程组具有非零解。展开此行列式, 得到方程组 (8-6) 的特征方程

$$\lambda^4 + P_1\lambda^3 + P_2\lambda^2 + P_3\lambda + P_4 = 0 \quad (8-10)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= -a_{33} - b_{22} + b_{34} - b_{11} + \alpha \tan \vartheta b'_{24} + b_{32} b'_{24} \\ P_2 &= -b_{22} b_{34} + a_{33} b_{22} + b_{22} b_{11} - b_{34} b_{11} + b_{11} a_{33} + b_{24} b_{32} - \\ &\quad b'_{24} b_{32} b_{11} - b_{21} b_{12} + (-b_{14} + b_{24} \tan \vartheta - b'_{24} b_{11} \tan \vartheta - \\ &\quad b'_{24} b_{12}) \alpha - b'_{24} b_{36} \tan \vartheta \\ P_3 &= \alpha (b_{22} b_{14} + b_{21} b_{14} \tan \vartheta - b_{24} \tan \vartheta b_{11} - b_{24} b_{12}) - \\ &\quad b_{36} (b_{24} \tan \vartheta - b'_{24} b_{11} \tan \vartheta - b'_{24} b_{12} - b_{14}) + b_{11} b_{34} b_{22} - \\ &\quad a_{33} b_{22} b_{11} + b_{21} b_{32} b_{14} + a_{33} b_{21} b_{12} - b_{34} b_{21} b_{12} - \\ &\quad b_{24} b_{32} b_{11} \\ P_4 &= -b_{36} (b_{22} b_{14} + b_{21} b_{14} \tan \vartheta - b_{24} b_{11} \tan \vartheta - b_{24} b_{12}) \end{aligned} \right\} \quad (8-11)$$

特征方程的根决定了导弹自由扰动运动的特性。如果根 λ 为实数, 则它相应的特解为非周期运动, 至于运动是发散的还是衰减的, 则取决于根 λ 的正负号。在复根 $\lambda_1 = \chi + i\nu$ 情况下, 特征方程有与之共轭的复根 $\lambda_2 = \chi - i\nu$ 。一对共轭复根相当于周期 $T = 2\pi/\nu$ 和衰减系数为 χ 的振荡运动。振幅随时间的增加是增大或缩小取决于 χ 的正负号。

在研究导弹的侧向扰动运动时, 经常遇到的情况是特征方程 (8-10) 具有一对共轭复根 $\chi \pm i\nu$ 和两个实根。这时式 (8-6) 的齐次方程组的通解具有以下形式

$$\begin{aligned} \Delta \omega_x &= A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + A' e^{\chi t} \sin(\nu t + \psi_1) \\ \Delta \omega_y &= B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} + B' e^{\chi t} \sin(\nu t + \psi_2) \\ \Delta \beta &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C' e^{\chi t} \sin(\nu t + \psi_3) \\ \Delta \gamma &= D_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 e^{\lambda_2 t} + D' e^{\chi t} \sin(\nu t + \psi_4) \end{aligned} \quad (8-12)$$

侧向自由扰动由三个运动叠加而成, 两个是非周期的, 一个是振荡的。通常, 按绝对值来说, 两个实根中一个很大, 另一个很小, 复根的实部则处于两者之间。

例 8-1 已知某飞机型飞行器在高度 $H = 12\,000\text{ m}$, 以速度 $V = 222\text{ m/s}$ ($Ma = 0.75$), $\theta \approx 0$ 飞行时, 方程组 (8-6) 的系数

$$\begin{aligned} b_{11} &= -1.66\text{ s}^{-1}, & b_{12} &= -0.56\text{ s}^{-1}, & b_{14} &= -6.2\text{ s}^{-2}, & b_{15} &= -0.75\text{ s}^{-2}, \\ b_{17} &= -5.7\text{ s}^{-2}, & b_{21} &= -0.0198\text{ s}^{-1}, & b_{22} &= -0.19\text{ s}^{-1}, & b'_{24} &= 0, \\ b_{24} &= -2.28\text{ s}^{-2}, & b_{25} &= -0.835\text{ s}^{-2}, & b'_{23} &= -1, & b_{34} &= 0.059\text{ s}^{-1}, \\ b_{35} &= 0.0152\text{ s}^{-1}, & b_{36} &= -0.0442\text{ s}^{-1}, & a_{33} &= 0. \end{aligned}$$

将这些系数代入式 (8-11) 求得

$$P_1 = 1.909, P_2 = 2.69, P_3 = 3.95, P_4 = -0.003\,47$$

从而得到特征方程式为

$$\lambda^4 + 1.909\lambda^3 + 2.69\lambda^2 + 3.95\lambda - 0.003\,47 = 0$$

所得系数 P_4 为负。因此, 所研究的飞机型飞行器在侧向运动中是不稳定的, 解出特征方程的根如下

$$\lambda_1 = -1.695, \lambda_2 = 0.001\,105, \lambda_{3,4} = -0.107 \pm 1.525i$$

由此可见, 飞行器侧向自由运动是以两个实根 (λ_1 为特征方程的大根, λ_2 为特征方程的小根) 和一对复根 $\lambda_{3,4}$ 所组成。

在初始条件 $t=0$ 时, $\Delta\omega_x=\Delta\omega_y=\Delta\beta=\Delta\gamma=0$ 和 $\Delta\delta_y=5.73^\circ$, $\Delta\delta_x=0$, 则扰动运动方程组的解如下:

$$\begin{aligned}\Delta\omega_x &= -0.0085e^{-1.695t} + 0.0881e^{0.001105t} + \\ &\quad 0.1026e^{-0.1075t}\cos(87.5t + 140.8^\circ) \\ \Delta\omega_y &= 3.502 - 0.00015e^{-1.695t} - 3.51e^{0.001105t} + \\ &\quad 0.0364e^{-0.1076t}\cos(87.5 + 92.5^\circ) \\ \Delta\beta &= -0.3261 + 0.2923e^{0.001105t} + 0.0353e^{-0.1075t}\cos(87.5t - 3.1^\circ) \\ \Delta\gamma &= -79.95 + 0.005e^{-1.695t} + 79.85e^{0.001105t} + \\ &\quad 0.0668e^{-0.1075t}\cos(87.5t + 47.5^\circ)\end{aligned}$$

计算结果曲线见图 8-1。

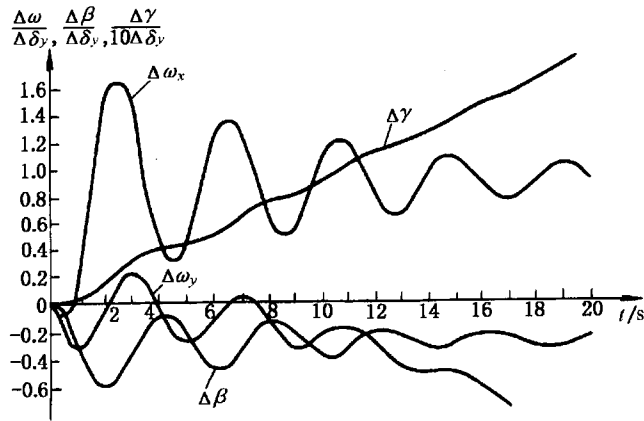


图 8-1 方向舵单位阶跃偏转时的过渡过程

二、侧向自由扰动运动的一般性质

通过上例的分析, 可以了解到侧向自由扰动运动的一般性质, 也就是特征方程根和系数的规律性。

(1) 对应于大实根 λ_1 (指 λ_i 中绝对值最大的) 的运动称为倾斜运动, 这是非周期运动。 λ_1 主要取决于动力系数 $b_{11}=M_x^{\omega_x}/J_x$ 的数值, 因为由式 (8-11) 中知

$$P_1 = -a_{33} - b_{22} + b_{34} - b_{11} + \alpha \tan \vartheta b'_{24} + b_{32} b'_{24}$$

代入动力系数的表达式得出

$$\begin{aligned}P_1 &= -\frac{g}{V} \sin \theta - \frac{M_y^{\omega_y}}{J_y} + \frac{P - Z^\beta}{mV} - \frac{M_x^{\omega_x}}{J_x} + \alpha \tan \vartheta \frac{M_x^{\dot{\beta}}}{J_y} + \\ &\quad \left(-\frac{\cos \theta}{\cos \vartheta} \right) \left(\frac{M_y^{\dot{\beta}}}{J_y} \right)\end{aligned}$$

由于式中 $M_y^{\omega_y} > M_y^{\dot{\beta}}$, $J_y \gg J_x$, 而 α 以弧度表示, 故 α 值很小, 而高速飞行时导弹的 V 值很大, 即其倒数很小, 所以上式中 $|M_x^{\omega_x}/J_x|$ 与其他项相比是大项, 故 P_1 可近似表示为

$$P_1 \approx -M_x^{\omega_x}/J_x \quad (8-13)$$

对于大实根 (通常大于 1), 下列关系式总是成立的, 即

$$|\lambda_1|^4 > |\lambda_1|^3 > |\lambda_1|^2 > |\lambda_1|$$

而

$$P_4 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$$

由于其中有小根 λ_2 ，因此 P_4 亦很小。这样，后三项与前两项相比可以忽略不计，于是有

$$\lambda_1^4 + P_1 \lambda_1^3 + P_2 \lambda_1^2 + P_3 \lambda_1 + P_4 \approx \lambda_1^4 + P_1 \lambda_1^3 \approx 0$$

$$\lambda_1 + P_1 \approx 0$$

$$\lambda_1 \approx -P_1 = b_{11} = M_{x^x}^w/J_x \quad (8-14)$$

一般按此公式求得的近似解误差不大，如例 8-1 中 $\lambda_1 = -1.695$ ， $b_{11} = -1.66$ ， $\lambda_1 \approx b_{11} = -1.66$ ，误差只有 2%。

一般在正常攻角下， $b_{11} = M_{x^x}^w/J_x$ 较大，所以 $|\lambda_1|$ 较大，故大实根所对应的非周期运动很快衰减，通常延续时间不到 1s。如例 8-1 中，衰减一半的时间只有 0.41s。

从 $M_{x^x}^w = m_x^w q S l^2 / 2V$ 中知道，当飞行高度 H 增加时，空气密度减小， q 随之减小， $|M_{x^x}^w|$ 减小，收敛的程度减慢；当飞行速度增加时， q/V 增加， $|M_{x^x}^w|$ 增加，收敛程度加快。

大实根 λ_1 所对应的非周期运动只对倾斜运动 $\Delta\omega_x$ 有显著影响，而对 $\Delta\omega_y$ 、 $\Delta\beta$ 则影响不大，这由例 8-1 中侧向扰动运动偏量解的系数值

$$|A_1| = 0.0085, |A_2| = 0.0881, |A'| = 0.1026$$

$$|B_1| = 0.00015, |B_2| = 3.51, |B'| = 0.0364$$

$$|C_1| = 0, |C_2| = 0.2923, |C'| = 0.0353$$

可见 $|B_1| \ll |B_2|$ ， $|C_1| \ll |C_2|$ 。可以看出，大根 λ_1 对 $\Delta\omega_y$ 、 $\Delta\beta$ 的影响是很小的。

(2) 对应于小实根 λ_2 的运动称为螺旋运动。这是因为当 λ_2 为正时，侧向参数 $\Delta\omega_x$ 、 $\Delta\omega_y$ 、 $\Delta\beta$ 、 $\Delta\gamma$ 均随时间而缓慢地增加，飞行器沿螺旋线运动。这种运动形态是由三种飞行状态叠加而形成的，即倾斜角 γ 随时间较快地增加；当 $(P\alpha + Y) \cos\gamma$ 不能和导弹本身的重量 G 平衡时，导弹便开始下坠； $\Delta\omega_y$ 亦随时间增加而增加。由小实根 λ_2 的正值所决定的这种不稳定性称为螺旋不稳定性。

对于这个绝对值很小的根，也可以用近似方法迅速求出。因为通常 λ_2 总是远小于 1，所以

$$\lambda_2^4 < \lambda_2^3 < \lambda_2^2 < \lambda_2$$

于是

$$\lambda_2^4 + P_1 \lambda_2^3 + P_2 \lambda_2^2 + P_3 \lambda_2 + P_4 \approx P_3 \lambda_2 + P_4 \approx 0$$

$$\lambda_2 \approx -P_4/P_3 \quad (8-15)$$

通常 $P_3 \gg P_4$ ，所以在一般情况下，按上式求得的近似解误差也不大，如例 8-1 中 $\lambda_2 = 0.001105$ ， $\lambda_2 \approx -P_4/P_3 = 0.0011$ ，误差只有 0.45%。

(3) 对应于一对复根的运动称为振荡运动。在这种运动中，导弹时而向这一方，时而又向另一方倾斜和偏航，类似于滑冰运动中“荷兰滚”花式动作，因此，也有称为“荷兰滚”运动。由于它的振荡频率比较高，如果不稳定，难以纠正，因此，要求必须是稳定的，并希望很快地衰减。

对于复根的近似求法，由于已近似求出 λ_1 和 λ_2 ，四次特征方程式就很容易化为二次方程式，因此，求解非常简单。如例 8-1

$$\lambda^4 + 1.909\lambda^3 + 2.69\lambda^2 + 3.95\lambda - 0.00437$$

$$= (\lambda + 1.66)(\lambda - 0.0011)(\lambda^2 + A\lambda + B) = 0$$

即

$$\lambda^2 + 0.2501\lambda + 2.39 = 0$$

$$\lambda_{3,4} = -0.125 \pm i1.54$$

与精确根 $\lambda_{3,4} = -0.107 \pm i1.525$ 比较, 结果相当接近。

由于导弹以较高的速度飞行时, 弹翼面积和展弦比都比较小, 所以 $|b_{11}|$ 值相对于 P_1 中其它各项的数值可能大得不多, 这时, 采用近似求根方法会产生较大的误差。但是, 为了迅速地估计出导弹的侧向动态特性, 这样的方法还是可行的。

综上所述可以看出, 具有面对称飞机型导弹的侧向自由扰动运动是由两个非周期和一个振荡运动状态叠加而成的。例 8-1 中 $\Delta\omega_x$ 的三部分运动分别表示在图 8-2 上。

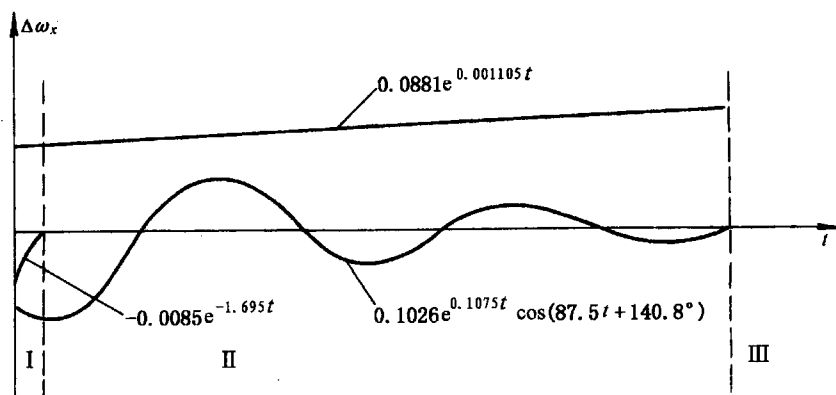


图 8-2 侧向扰动运动偏差 $\Delta\omega_x$ 的三部分组成

若按时间划分, 侧向自由扰动运动可以分为三个阶段。

第一阶段对应于大实根快衰减时间。在这一阶段, 三个部分的运动都是存在的, 但主要是大实根对应的倾斜扰动运动, 它很快衰减而消失。由于这一阶段延续时间很短, 另两部分的扰动运动变化还不大。

第二阶段因大根对应的倾斜运动已基本消失, 只剩下振荡运动和螺旋运动。此阶段主要为振荡运动, 当偏航静稳定性较大时, 延续时间约为几秒钟。此后即进入第三阶段, 只剩下对应于小实根的螺旋运动。该运动出现的时间很长, 虽然是螺旋不稳定运动, 但只需将方向舵或副翼偏转很小的角度, 就能使飞机型导弹脱离螺旋运动。

§ 8-3 侧向稳定边界图

判别侧向稳定性和纵向一样, 可以采用霍尔维茨准则。侧向扰动运动特性主要取决于偏航静稳定度 m_y^β 和横向静稳定度 m_x^β 。在设计过程中为了便于了解它们对侧向稳定性的影响, 最方便的方法是绘制侧向稳定边界图。

侧向稳定边界图是以 $-b_{24} = -M_y^\beta/J_y$ 和 $-b_{14} = -M_x^\beta/J_x$ 作为坐标轴绘出的, 如图 8-3 所示。

根据霍尔维茨准则, 要使其运动是稳定的, 则要求下述不等式同时满足

$$\left. \begin{aligned} P_1 > 0, \quad P_2 > 0, \quad P_3 > 0, \quad P_4 > 0 \\ R = P_1 P_2 P_3 - P_1^2 P_4 - P_3^2 > 0 \end{aligned} \right\} \quad (8-16)$$

由式(8-11)中 P_1 的表达式知道, P_1 与 b_{24} 和 b_{14} 无关, 且由式(8-13)知道

$$P_1 \approx -M_{xz}^{\omega_x}/J_x > 0$$

因此 $P_1 > 0$ 的条件总是可以满足的。故此条件不在讨论之列。这样, 要使导弹侧向运动满足稳定的临界条件为

$$\left. \begin{aligned} P_2 = 0, \quad P_3 = 0, \quad P_4 = 0 \\ R = P_1 P_2 P_3 - P_1^2 P_4 - P_3^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8-17)$$

由式(8-11)中可以看出, 在 $P_2 = 0, P_3 = 0, P_4 = 0$ 这些稳定边界方程式中 $-b_{24}$ 和 $-b_{14}$ 之间是线性关系, 而在稳定边界方程式 $R = 0$ 中 $-b_{24}$ 和 $-b_{14}$ 之间关系则为二次方程。

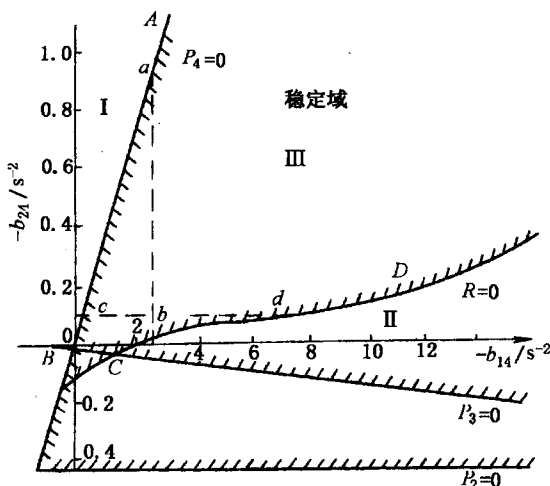


图 8-3 侧向稳定边界图

这里, 用例 8-1 给出的飞机型飞行器的侧向动力系数来绘制侧向扰动运动的稳定域。将各侧向动力系数代入式(8-11)求得

$$\begin{aligned} P_1 &= 1.909 \\ P_2 &= 0.4242 - b_{24} \\ P_3 &= -0.0244b_{14} - 1.66b_{24} + 0.0179 \\ P_4 &= -0.0084b_{14} + 0.0248b_{24} \end{aligned}$$

将上述结果代入 $R = P_1 P_2 P_3 - P_1^2 P_4 - P_3^2$, 求得

$$\begin{aligned} R &= 0.4133b_{24}^2 - 0.0005954b_{14}^2 - 0.03442b_{14}b_{24} + 0.01172b_{24} - \\ &\quad 1.4094b_{24} + 0.014175 \end{aligned}$$

将 P_1, P_2, P_3, P_4 和 R 的计算结果代入式(8-17), 求得稳定的边界条件为

$$\begin{aligned} b_{24} &= 0.4242 \quad (P_2 = 0) \\ b_{24} &= -0.0147b_{14} + 0.01078 \quad (P_3 = 0) \\ b_{24} &= 0.3387b_{14} \quad (P_4 = 0) \\ b_{24}^2 &- 0.00144b_{14}^2 - 0.0833b_{14}b_{24} + 0.02836b_{14} - \\ &\quad 3.4107b_{24} + 0.0343 = 0 \quad (R = 0) \end{aligned}$$

前三个式子分别表示三个直线方程, 对应于图 8-3 中的 $P_2 = 0, P_3 = 0$ 和 $P_4 = 0$ 的三条边界线; 第四个方程为一般的二次曲线方程, 可以由它求出不同的 $-b_{14}$ 值满足 $R = 0$ 条件的一 $-b_{24}$ 的解, 图中只画出它的一半。带有阴影线的一侧分别满足 $P_1 > 0, P_2 > 0, P_3 > 0$ 和 $R > 0$ 。这个区域称为侧向稳定域。只要导弹的 $-b_{14}$ 和 $-b_{24}$ 的组合落入此区内, 导弹的侧向扰动运动就是稳定的。

由于进行简化后的特征方程式为

$$(\lambda - b_{11}) \left(\lambda + \frac{P_4}{P_3} \right) (\lambda^2 + A\lambda + B) = 0$$

则在 $P_3 > 0, P_4 > 0$ 的阴影区之内, 就保证了小实根为负值, 即保证螺旋运动是一个稳定的运

动。 $P_3=0$, $P_4=0$ 称之为螺旋不稳定边界。由图可以看出, $R=0$ 的边界 $\lambda^2+A\lambda+B=0$ 所对应的侧向扰动运动边界, 即振荡运动的稳定边界。

应当指出, 霍尔维茨准则只能确定系统是否稳定, 却不能确定稳定程度。同样, 在稳定边界图上, 也不能判别导弹侧向稳定的程度。如果导弹的外形略加改变, 例如加大垂直尾翼或减小导弹上反角, 则可以使 $-b_{14}$ 和 $-b_{24}$ 有较大的变化, 其他的侧向动力系数虽然相应地也有变化, 但是实践证明, 图上稳定边界线变化并不显著。在飞行弹道上每一点都有一定的 $-b_{14}$ 和 $-b_{24}$ 值, 它们对应于稳定边界图的一个点, 根据这个点的位置就可以判断导弹在该弹道特征点上是否稳定。因此, 在初步设计中确定导弹外形时, 侧向稳定边界图十分有用。例如, 图 8-3 中虚线 ab 代表 $-b_{14}$ 不变时, $-b_{24}$ 改变多大就达到了稳定的边界; cd 线代表 $-b_{24}$ 不变时, $-b_{14}$ 改变多大就达到了稳定的边界。此外, 考虑到计算和风洞实验所得的 m_x^β 和 m_y^β 值总是有一定误差, 通过稳定边界图可以估计误差对导弹侧向稳定性的影响。

通过对侧向稳定边界图的讨论, 可以得到一些重要的结论。

一、侧向运动的稳定性

由稳定边界图可以看出, 飞机型导弹虽然具有偏航静稳定性 ($m_y^\beta < 0$) 和横向静稳定性 ($m_x^\beta < 0$), 但并不一定具有侧向稳定性。由图 8-3 可见, 在 I 区, $-b_{14}$ 和 $-b_{24}$ 同时大于零, 由于 $-b_{24} \gg -b_{14}$, 就有可能出现螺旋不稳定。在 II 区, 因 $-b_{14} \gg -b_{24}$, 就有可能发生振荡不稳定。这些情况可以通过运动的物理过程加以说明。

在第 I 区内, $-b_{24} \gg -b_{14}$, 即

$$\frac{-M_y^\beta}{J_y} \gg \frac{-M_x^\beta}{J_x}$$

假设导弹在纵向平面运动, 受到偶然干扰作用, 具有初始倾斜角 γ_0 , 这时 $\gamma_0 \approx \gamma_v$ 。由于 $P\alpha + Y$ 在 Oz_2 轴上的投影使得 $d\psi_v/dt < 0$, 导弹向右侧滑, 即 $\beta > 0$, 于是产生 $M_x^\beta \beta < 0$, 它力图使倾斜角 γ 减少, 见图 8-4。与此同时, 由于 $\beta > 0$, 还产生力矩 $M_y^\beta \beta < 0$, 使导弹绕 y 轴向右旋转, 即角速度 $\omega_y < 0$ 。在这种情况下, 由于交叉力矩 $M_{xy}^{\omega_y} > 0$, 又使倾斜角 γ 增大, 综合上述两个因素, 又考虑到

$$\left| \frac{M_y^\beta}{J_y} \beta \right| \gg \left| \frac{M_x^\beta}{J_x} \beta \right|$$

使得

$$|M_{xy}^{\omega_y}| > |M_x^\beta \beta|$$

所以, 倾斜角将越来越大, 导弹的重量将大于平衡它

的举力在垂直面内的投影, 于是导弹便开始下降, 并缓慢增大倾斜角和旋转角速度。

在第 II 区内, $-b_{14} \gg -b_{24}$, 即

$$\frac{-M_x^\beta}{J_x} \gg \frac{-M_y^\beta}{J_y}$$

如果导弹的 $|b_{24}|$ 的数值较小或者 $-b_{24}$ 数值为负时, 则在第二阶段螺旋运动就会衰减, 而振荡运动在第三阶段仍继续进行。在这种情况下, 导弹在倾斜后的侧滑会引起很大的力矩 $M_x^\beta \beta < 0$, 该力矩迅速地消除了导弹的倾斜, 并使导弹向另一方向倾斜。这一倾斜又出现负的侧滑角, 导

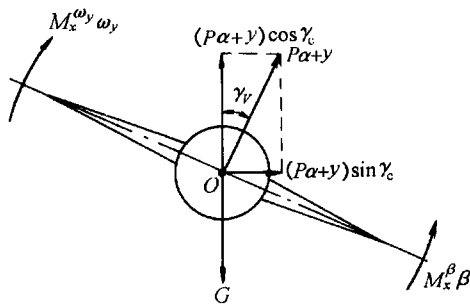


图 8-4 具有初始扰动角 γ 时, 作用于导弹上的力和力矩

弹又向右倾斜,继而向右侧滑。如此往复循环,使导弹一会儿向右,一会儿向左而作交替的倾斜,即使导弹产生不稳定的振荡运动。

设计时应设法使动力系数 $-b_{24}$ 和 $-b_{14}$ 位于Ⅲ区,即稳定域内。对于即使是装有稳定自动器的导弹,过于缓慢衰减或发散的振荡运动,都是不希望产生的。

还应该指出,如果偏航静稳定性太小,横向静稳定性太大,还可能出现对操纵不利的“副翼反逆”效应。这是因为当副翼偏转时,假如 $\delta_x < 0$,于是 $M_x^\delta \delta_x > 0$,导弹滚转产生倾斜角 $\gamma > 0$ 。由于右侧滑产生 $\beta > 0$,因为偏航静稳定性比较小,所以侧滑角 β 会比较大;再由于横向静稳定性很大,因此产生很大的反时针方向的倾斜力矩($M_x^\beta \beta < 0$)。它与力矩 $M_x^\delta \delta_x$ 方向相反,因而降低了副翼效率。在严重情况下,甚至可能使导弹发生方向相反的滚转,即所谓“副翼反逆”效应。因此,在横向静稳定性比较大的情况下,为了克服副翼反逆效应,在偏转副翼的同时,要相应地偏转方向舵。

二、气动外形对侧向稳定性的影响

根据以上分析可知,在选择飞机型导弹气动外形时,为了保证侧向稳定性,导弹除了具有横向稳定性外,还必须具备较大的偏航静稳定性。但是,对于超音速飞机型导弹来说,有足够的偏航静稳定性并不容易,这是因为:

(1) 飞机型导弹偏航静稳定度是由垂直尾翼形成的静稳定度和弹身静不稳定度之和所组成。由于高速导弹的质心一般都离弹身头部较远,所以弹身的静不稳定度很大。

(2) 侧力系数 C_z^β 随 Ma 数的增大而减小,因此,垂直尾翼的静稳定度也将随 Ma 数的增大而减小。

(3) 为了避免垂直尾翼跨音速气动特性的剧烈变化,以及减小声速时的波阻,垂直尾翼总是采用相对厚度较小的薄翼型。但是,在高速飞行时,由于气动载荷而形成的弹性变形可能很大,又将进一步降低垂直尾翼的效率。

由于上述原因,以及下面将要涉及的攻角影响,对偏航静稳定性都是不利的。因此,为了在各种速度、高度和攻角条件下都能有必要的偏航静稳定性,只能采用后掠角很大,面积很大的垂直尾翼。但是,这样的尾翼所产生的横向稳定性也会比较大。为了减小横向静稳定性,就应该将弹翼上反角减小,甚至做成下反角。有的导弹在弹身的尾部的下方装有小的腹鳍,这样可以同时达到增加偏航静稳定性和减小横向静稳定性的目的。

三、飞行状态对侧向稳定性的影响

1. 攻角的影响

许多侧向动力系数都与攻角有关,例如采用大后掠弹翼时,当增大攻角,则横向静稳定性将显著增大,而偏航静稳定性则可能减小。这是由于小展弦比和大根梢比弹翼形成的尾流、细长弹身产生的漩涡对垂直尾翼产生了不利的影响。在大攻角下,由弹翼、弹身或发动机舱所产生的干扰气流,在侧滑情况下产生侧洗效应,也会降低垂直尾翼的效率。因此,如果飞机型导弹在小攻角时是螺旋不稳定的,而在大攻角有可能是稳定的。

2. 弹道倾角的影响

假若未扰动飞行攻角不大,则 $\vartheta \approx \theta$, $b_{32} = -1$ 。因此,改变弹道倾角 θ ,只引起下列动力系数发生变化

$$a_{33} = \frac{g}{V} \sin \theta, \quad a_{36} = \frac{-g \cos \theta}{V}, \quad \tan \vartheta$$

而由方程 (8-11) 的第四式中可见, 当交叉动力系数 b_{21} 可以不计及时, 则 P_4 可以改写成

$$P_4 \approx -b_{36}(b_{22}b_{14} - b_{24}b_{11}\tan\vartheta - b_{24}b_{12}) = 0 \quad (8-18)$$

因此

$$\frac{b_{24}}{b_{14}} = \frac{b_{22}}{b_{11}\tan\vartheta + b_{12}} \quad (8-19)$$

由上式可以看出, 俯仰角 ϑ 直接影响 $P_4=0$ 的斜率。当 ϑ 处在 $0 \sim \pi/2$ 之间时, 随着 ϑ 角的增加, 使得 $P_4=0$ 这条边界线的斜率越来越小, 因而稳定域越小; ϑ 角越小, 则稳定域越大, 甚至有可能出现 $b_{24}/b_{14} < 0$, 即 $P_4=0$ 所决定的稳定边界线落入 II-IV 象限内。所以, 在其他飞行参数相同的条件下, 弹道倾角 θ 最大时, 螺旋运动是稳定的, 则在其他弹道倾角时, 也一定是稳定的。

改变弹道倾角 θ 对 $R=0$ 边界线的影响, 可以由系数 P_1 、 P_2 、 P_3 和 P_4 式看出, 其中有若干小项在初步近似中可以略去不计, 最后得出

$$P_1 \approx -b_{11}$$

$$P_2 \approx b_{22}b_{11}$$

$$P_3 \approx b_{22}b_{11}b_{34} + b_{11}b_{24} + (-b_{21} + b_{36} + ab_{22})b_{14}$$

$$P_4 \approx -b_{36}[b_{22}b_{14} + (-\tan\vartheta b_{11} - b_{12})b_{24}]$$

从上式可以看出, 弹道倾角的变化只是通过 b_{36} 影响 P_3 , 通过 b_{36} 、 $\tan\vartheta$ 影响 P_4 。考虑到 $-b_{36}b_{14}$ 这一项对 P_3 的影响并不显著, 而 P_4 本身又非常小, 可以认为

$$R = P_1P_2P_3 - P_3^2 - P_1P_4 \approx P_1P_2P_3 - P_3^2$$

因此 θ 和 ϑ 的变化, 对于 $R=0$ 这条稳定边界曲线的移动影响不大。

3. 推力的影响

在加速发动机点火或熄火的瞬间, 推力有突然变化, 从而影响动力系数 b_{34} 。在其他飞行条件不变的情况下, 研究推力对稳定域的影响是具有实际意义的。由于特征方程系数 $P_4=0$ 中不包含 b_{34} , 所以推力的改变对于 $P_4=0$ 的边界线并无影响。 b_{34} 的变化对于 $R=0$ 的边界线是有显著影响的。通过繁复的分析, 可以得出, b_{34} 增大将使稳定域随之增大。因此, 如果其他飞行条件相同或接近时, 应当考虑的危险情况是推力较小的情况。

四、对侧向稳定性的要求

前面已经提及用霍尔维茨准则或稳定边界图只能确定导弹弹体是否具有稳定性, 但是不能确定稳定的程度。若要较精确地评定几个设计方案的稳定性, 应当通过解出各典型弹道上若干特征点的自由扰动的过渡过程, 这需要花费相当多的时间和人力。为了初步评定稳定程度, 可以提出几点参考要求。

1. 快收敛的倾斜运动

对于这个运动形态, 一般要求衰减得快一些, 这样, 一方面可以有较好的倾斜稳定性, 另一方面可以改善导弹对副翼偏转的操纵性能。这一运动形态的指标, 一般用 $T_1 = 1/|\lambda_1|$ 来表示。

2. 慢发散的螺旋不稳定运动

对于慢发散运动, 侧向稳定自动器完全有能力将它纠正过来。因此, 一般并不严格要求

它一定是稳定的，而只要求发散得不太快。这一运动形态的指标，一般用 $T_2=1/|\lambda_2|$ 来表示。

3. 稳定的荷兰滚运动

荷兰滚运动是特征方程中共轭复根 $\lambda_{3,4}=a \pm ib$ 所对应的振荡运动。此运动的半衰期为 $t_2-t_1=-0.693/a$ ，振荡周期为 $T=2\pi/b$ 。要求 t_2-t_1 和 T 都小些，以保证导弹的振荡运动能较快地稳定下来。

对荷兰滚运动，有时还要求倾斜角速度的最大振幅值 $\omega_{x\max}$ 和偏航角速度的最大振幅值 $\omega_{y\max}$ 之比

$$\varepsilon = |\omega_{x\max}|/|\omega_{y\max}|$$

不大于某一数值。

根据上述要求，对于飞机型导弹，为了获得比较好的侧向动态特性，在稳定边界图上代表点的位置往往靠近 $P_4=0$ 的线，甚至可以允许位于 P_4 稍小于零的区域。这是因为微小的螺旋不稳定运动发展很缓慢，对自动驾驶仪的工作没有任何不利的影响，而它却可以改善荷兰滚运动的动态特性。

§ 8-4 侧向扰动运动方程组的简化

一、侧向扰动运动方程组的简化

假定未扰动运动的俯仰角 ϑ 、弹道倾角 θ 和攻角 α 足够小，取 $\cos\vartheta \approx \cos\theta \approx 1$ ，并去掉小量的乘积 $\alpha\Delta\gamma$ 和 $\tan\vartheta\Delta\omega_y$ 后，侧向扰动运动方程组 (8-3) 可以大为简化，最后三式简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Delta\psi}{dt} &= \Delta\omega_y \\ \frac{d\Delta\gamma}{dt} &= \Delta\omega_x \\ \Delta\psi_v &= \Delta\psi - \Delta\beta \end{aligned} \right\} \quad (8-20)$$

在方程组 (8-3) 的前两式中，将 $\Delta\omega_x$ 和 $\Delta\omega_y$ 代换成 $\dot{\Delta\gamma}$ 和 $\dot{\Delta\psi}$ ，并在第三式中去掉乘积 $\sin\theta\Delta\beta$ (即 $a_{33}\Delta\beta=0$)，得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\Delta\gamma}{dt^2} - b_{11}\frac{d\Delta\gamma}{dt} - b_{12}\frac{d\Delta\psi}{dt} - b_{14}\Delta\beta &= b_{15}\Delta\delta_y + b_{17}\Delta\delta_x + b_{18}M_{gx} \\ \frac{d^2\Delta\psi}{dt^2} - b_{21}\frac{d\Delta\gamma}{dt} - b_{22}\frac{d\Delta\psi}{dt} - b_{24}\Delta\beta - b'_{24}\dot{\Delta\beta} &= b_{25}\Delta\delta_y + b_{28}M_{gy} \\ \frac{d\Delta\psi_v}{dt} - b_{34}\Delta\beta - b_{36}\Delta\gamma &= b_{35}\Delta\delta_y + b_{38}F_{gz} \\ \Delta\psi - \Delta\psi_v - \Delta\beta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8-21)$$

此方程组包含四个未知数 ψ_v 、 ψ 、 β 和 γ 。通常用来研究飞机型导弹作接近水平飞行时的侧向稳定性。

上述方程组的进一步简化则取决于导弹的气动布局和操纵机构类型。

二、轴对称型导弹接近水平飞行时侧向扰动运动简化方程组

对于气动轴对称型导弹，系数 $b_{12}=M_{x^y}/J_x$ 和 $b_{21}=M_{y^x}/J_y$ 与其他系数相比是很小的，因此与它们相对应的 $b_{12}\dot{\Delta\psi}$ 和 $b_{21}\dot{\Delta\gamma}$ 项可以略去。

如果导弹在自动驾驶仪偏转副翼的作用下,具有良好的倾斜稳定性,能够使倾斜角 γ 很小,则可以略去重力的侧向分量 $b_{36}\Delta\gamma$ 。此时,侧向扰动运动方程组可以分为偏航扰动运动方程组和倾斜扰动运动方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\Delta\psi}{dt^2} - b_{22}\frac{d\Delta\psi}{dt} - b_{24}\Delta\beta - b'_{24}\Delta\dot{\beta} &= b_{25}\Delta\delta_y + b_{28}M_{gy} \\ \frac{d\Delta\psi_v}{dt} - b_{34}\Delta\beta &= b_{35}\Delta\delta_y + b_{38}F_{gz} \\ \Delta\psi - \Delta\psi_v - \Delta\beta &= 0 \\ \frac{d^2\Delta\gamma}{dt^2} - b_{11}\frac{d\Delta\gamma}{dt} &= b_{14}\Delta\beta + b_{15}\Delta\delta_y + b_{17}\Delta\delta_x + b_{18}M_{gx} \end{aligned} \right\} \quad (8-22)$$

$$(8-23)$$

方程组 (8-22) 和 (8-23) 用于研究偏航和倾斜扰动运动是很方便的。偏航扰动运动方程组是独立的,它与描述纵向短周期扰动运动的方程组 (7-56) 完全相对应 (忽略重力项 a_{33}), 即偏航运动参数的偏量 ψ 、 ψ_v 和 β 对应与纵向运动参数偏量 ϑ 、 θ 和 α , 动力系数也一一对应。对于气动轴对称型导弹, 动力系数

$$\begin{aligned} a_{22} &= b_{22}, \quad a_{24} = b_{24}, \quad a'_{24} = b'_{24}, \quad a_{25} = b_{25}, \\ a_{26} &= b_{28}, \quad a_{34} = b_{34}, \quad a_{35} = b_{35}, \quad a_{36} = b_{38}。 \end{aligned}$$

因此,研究纵向扰动运动所得到的结论,包括干扰作用和控制作用下的动态特性,对于偏航扰动运动也是适合的,所以不再重述。

倾斜扰动运动方程 (8-23) 可以在偏航扰动运动方程组 (8-22) 求解后单独求解。右边两项 $b_{14}\Delta\beta$ 和 $b_{15}\Delta\delta_y$ 是偏航扰动运动对倾斜扰动运动的影响,可以看做为已知干扰力矩,如果忽略此两项,则方程 (8-23) 可以写为

$$\frac{d^2\Delta\gamma}{dt^2} - b_{11}\frac{d\Delta\gamma}{dt} = b_{17}\Delta\delta_x + b_{18}M_{gx} \quad (8-24)$$

这样,偏航扰动运动和倾斜扰动运动就相互完全独立。对气动轴对称导弹,这样的近似处理具有相当好的精确性,可以满足初步设计的要求。

§ 8-5 侧向传递函数

对方程组 (8-6) 进行拉氏变换后得到

$$\left. \begin{aligned} (s - b_{11})\Delta\omega_x - b_{12}\Delta\omega_y - b_{14}\Delta\beta &= b_{15}\Delta\delta_y + b_{17}\Delta\delta_x + b_{18}M_{gx} \\ -b_{21}\Delta\omega_x + (s - b_{22})\Delta\omega_y - (b'_{24}s + b_{24})\Delta\beta &= b_{25}\Delta\delta_y + b_{28}M_{gy} \\ b_{32}\Delta\omega_y + (s + b_{34} - a_{33})\Delta\beta + (\alpha s + b_{36})\Delta\gamma &= -b_{35}\Delta\delta_y - b_{38}F_{gz} \\ \Delta\omega_x - \tan\vartheta\Delta\omega_y - s\Delta\gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8-25)$$

用求纵向传递函数相同的方法,可以求得侧向传递函数。方向舵偏转的传递函数如下:

$$\left. \begin{aligned} W_{\delta_y}^{\omega_x}(s) &= \frac{A_1s^3 + A_2s^2 + A_3s + A_4}{s^4 + P_1s^3 + P_2s^2 + P_3s + P_4} \\ W_{\delta_y}^{\omega_y}(s) &= \frac{B_1s^3 + B_2s^2 + B_3s + B_4}{s^4 + P_1s^3 + P_2s^2 + P_3s + P_4} \end{aligned} \right\} \quad (8-26)$$

$$\left. \begin{aligned} W_{\delta_y}^{\beta}(s) &= \frac{D_1 s^3 + D_2 s^2 + D_3 s + D_4}{s^4 + P_1 s^3 + P_2 s^2 + P_3 s + P_4} \\ W_{\delta_y}^{\gamma}(s) &= \frac{E_2 s^2 + E_3 s + E_4}{s^4 + P_1 s^3 + P_2 s^2 + P_3 s + P_4} \end{aligned} \right\} \quad \text{续(8-26)}$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -b_{15} \\ A_2 &= -b_{15}(b_{34} - a_{33}) - b_{22} - b'_{24}(-\alpha \tan \theta - b_{32}) - \\ &\quad b_{12}(-b'_{24}b_{35} + b_{25}) + b_{35}b_{14} \\ A_3 &= -b_{15}[-b_{22}(b_{34} - a_{33}) - b'_{24}b_{36}\tan \vartheta + \alpha b_{24}\tan \vartheta] + \\ &\quad b_{24}b_{32} - b_{12}[-b_{24}b_{35} + b_{25}(b_{34} - a_{33})] - \\ &\quad b_{14}[b_{22}b_{35} + b_{25}(-\alpha \tan \vartheta - b_{32})] \\ A_4 &= b_{24}b_{38}\tan \vartheta b_{15} + b_{25}b_{36}\tan \vartheta b_{14} \end{aligned} \right\} \quad (8-27)$$

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= -b_{25} + b'_{24}b_{35} \\ B_2 &= -b_{15}(b_{21} + \alpha b'_{24}) - b_{25}(b_{34} - a_{33} - b_{11}) + \\ &\quad b_{35}(b_{24} - b'_{24}b_{11}) \\ B_3 &= -b_{15}[b_{21}(b_{34} - a_{33}) - b'_{24}b_{36} + \alpha b_{24}] \\ &\quad - b_{25}[-b_{11}(b_{34} - a_{33}) - \alpha b_{14}] + b_{35}(b'_{24}b_{14} - b_{24}b_{11}) \\ B_4 &= b_{36}(b_{24}b_{15} - b_{25}b_{14}) \end{aligned} \right\} \quad (8-28)$$

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= b_{35} \\ D_2 &= -\alpha b_{15} - b_{25}(-\alpha \tan \vartheta - b_{32}) + b_{35}(-b_{22} - b_{11}) \\ D_3 &= -b_{15}[-b_{21}b_{32} - b_{36} - \alpha(b_{21}\tan \vartheta + b_{22})] - b_{25}[\alpha b_{12} + \\ &\quad b_{36}\tan \vartheta - b_{11}(-\alpha \tan \vartheta - b_{32})] + b_{35}(b_{22}b_{11} - b_{12}b_{21}) \\ D_4 &= -b_{15}b_{36}(b_{21}\tan \vartheta + b_{22}) + b_{25}b_{36}(\tan \vartheta b_{11} + b_{12}) \end{aligned} \right\} \quad (8-29)$$

$$\left. \begin{aligned} E_2 &= -b_{15} + b_{25}\tan \vartheta - b'_{24}b_{35}\tan \vartheta \\ E_3 &= -b_{15}[(b_{34} - a_{33}) - (b_{21}\tan \vartheta + b_{22}) + b'_{24}b_{34} - \\ &\quad b_{25}[-\tan \vartheta(b_{34} - a_{33}) + (\tan \vartheta b_{11} + b_{12})] + \\ &\quad b_{35}[b_{14} - b_{24}\tan \vartheta + b'_{24}(\tan \vartheta b_{11} + b_{12})] \\ E_4 &= -b_{15}[-(b_{34} - a_{33})(b_{21}\tan \vartheta + b_{22}) + b_{24}b_{32}] - \\ &\quad b_{25}[(b_{34} - a_{33})(\tan \vartheta b_{11} + b_{12}) - b_{32}b_{14} + \\ &\quad b_{35}[-b_{14}(b_{21}\tan \vartheta + b_{22}) + b_{24}(\tan \vartheta b_{11} + b_{12})] \end{aligned} \right\} \quad (8-30)$$

P_1 、 P_2 、 P_3 和 P_4 可以根据 (8-11) 式求出。

副翼偏转的传递函数如下：

$$\left. \begin{aligned} W_{\delta_x}^{\omega_x}(s) &= \frac{-b_{17}(s^3 + A'_2 s^2 + A'_3 s + A'_4)}{s^4 + P_1 s^3 + P_2 s^2 + P_3 s + P_4} \\ W_{\delta_x}^{\omega_y}(s) &= \frac{-b_{17}(B'_2 s^2 + B'_3 s + B'_4)}{s^4 + P_1 s^3 + P_2 s^2 + P_3 s + P_4} \\ W_{\delta_x}^{\beta}(s) &= \frac{-b_{17}(D'_2 s^2 + D'_3 s + D'_4)}{s^4 + P_1 s^3 + P_2 s^2 + P_3 s + P_4} \\ W_{\delta_x}^{\gamma}(s) &= \frac{-b_{17}(s^2 + E'_3 s + E'_4)}{s^4 + P_1 s^3 + P_2 s^2 + P_3 s + P_4} \end{aligned} \right\} \quad (8-31)$$

$$\left. \begin{aligned} A'_2 &= (b_{34} - a_{33}) - b_{22} - b'_{24}(-\alpha \tan \vartheta - b_{32}) \\ A'_3 &= -b_{22}(b_{34} - a_{33}) - b'_{24}b_{36}\tan \vartheta - b_{24}(-\alpha \tan \vartheta - b_{32}) \\ A'_4 &= -b_{24}b_{36}\tan \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (8-32)$$

$$\left. \begin{aligned} B'_2 &= b_{21} + \alpha b'_{24} \\ B'_3 &= b_{21}(b_{34} - a_{33}) - b'_{24}b_{36} + \alpha b_{24} \\ B'_4 &= -b_{24}b_{36} \end{aligned} \right\} \quad (8-33)$$

$$\left. \begin{aligned} D'_2 &= \alpha \\ D'_3 &= -b_{21}b_{32} - b_{36} - \alpha(b_{21}\tan \vartheta + b_{22}) \\ D'_4 &= b_{36}(b_{21}\tan \vartheta + b_{22}) \end{aligned} \right\} \quad (8-34)$$

$$\left. \begin{aligned} E'_3 &= (b_{34} - a_{33}) - (b_{21}\tan \vartheta + b_{22}) + b'_{24}b_{32} \\ E'_4 &= b_{24}b_{32} - (b_{21}\tan \vartheta + b_{22})(b_{34} - a_{33}) \end{aligned} \right\} \quad (8-35)$$

如果采用简化条件, 则由式 (8-32) ~ (8-35) 化简即可得到。

对于轴对称导弹, 如果侧向扰动运动方程组采用式 (8-22) 和 (8-23), 则偏航传递函数与纵向传递函数完全相同, 只是动力系数 a_{ij} 和 b_{ij} 互相置换即可 ($a_{36}=b_{38}$ 除外)。

利用方程 (8-24) 求倾斜运动的传递函数。先进行拉氏变换, 得到

$$s(s - b_{11})\Delta\gamma(s) = b_{17}\Delta\delta_x(s) + b_{18}M_{gx} \quad (8-36)$$

显然, 传递函数为

$$W_{\delta_x}^{\gamma}(s) = \frac{b_{17}}{s(s - b_{11})} = \frac{K_{M_x}}{s(T_{M_x}s + 1)} \quad (8-37)$$

式中 K_{M_x} ——导弹倾斜传递函数;

T_{M_x} ——导弹倾斜时间常数。

特征方程的根为一个零根和一个实根。实根 $\lambda_2 = b_{11} < 0$, 代表稳定的非周期运动, 另一根 $\lambda_1 = 0$, 代表中立情况。其物理意义是: 若由于某一偶然原因, 使得导弹产生一个倾斜角 γ_0 , 如果不进行操纵, 即副翼不偏转, 导弹将一直保持着一一定的倾斜角 γ 飞行。

将 (8-36) 式改写为 δ_x 对 $\dot{\gamma}$ 的传递函数

$$W_{\delta_x}^{\dot{\gamma}}(s) = \frac{K_{M_x}}{T_{M_x}s + 1} \quad (8-38)$$

显然, 在零起始条件时, 副翼作阶跃偏转情况下的解为

$$\frac{\dot{\gamma}}{\delta_x} = K_{M_x}(1 - e^{-\frac{t}{T_{M_x}}}) \quad (8-39)$$

$$\frac{\gamma}{\delta_x} = K_{M_x}[t - T_{M_x}(1 - e^{-\frac{t}{T_{M_x}}})] \quad (8-40)$$

过渡过程的曲线如图 8-5 所示。

由式 (8-39) 和 (8-40) 可以看出, 倾斜过渡过程仅由两个参数来表征, 即传递系数 K_{M_x} 和时间常数 T_{M_x} 。于是导弹倾斜角速度的动态特性与非周期环节的特征一致。当 $t \rightarrow \infty$ 时, 倾斜角速度 $\dot{\gamma}$ 按指数规律趋于稳定值 $\dot{\gamma}_s$ 。时间常数 T_{M_x} 表征非周期过渡期进行的速度, 即反应导弹在倾斜运动中的惯性程度, 见图 8-5。

因为任何导弹的时间常数 T_{M_x} 都是正的, 所以在所讨论的过渡过程中, 自由运动总是衰减

的。

如果导弹上有经常作用的倾斜干扰力矩 M_{gx} ，当以 M_{gx} 为输入量，以 $\dot{\gamma}$ 为输出量时，由式 (8-36) 可得导弹在倾斜干扰力矩作用下的传递函数

$$W_{M_{gx}}^{\dot{\gamma}}(s) = \frac{K'_{M_x}}{T_{M_x}s + 1} \quad (8-41)$$

式中

$$K'_{M_x} = b_{18}/-b_{11}$$

当导弹同时受到副翼偏转和干扰力矩作用时，倾斜运动结构图由图 8-6 所示。

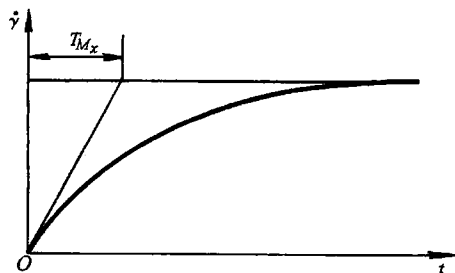


图 8-5 倾斜操纵机构阶跃偏转时倾斜角速度的过渡过程

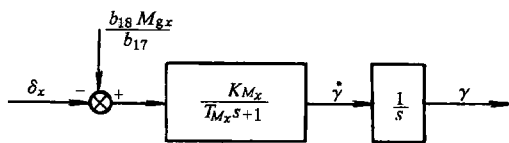


图 8-6 倾斜运动结构图

第九章 滚转导弹弹体的动态特性分析

目前国内外有些反坦克导弹和攻击低空目标的地空导弹，在飞行中以一定的转速绕弹纵轴旋转，这些导弹只有一对操纵机构，但却可同时操纵导弹的纵向和侧向运动。如我国的“红箭-73”和“红箭-8”（转速为 8.5 r/s）、法国和德国的“米兰”（Milan）（转速为 6 r/s）和“霍特”（HOT）（转速为 8~10 r/s）等反坦克导弹；前苏联的“SAM-7”（转速为 15 r/s）和美国的“毒刺”（FIM-92）等地空导弹。这种绕纵轴低速旋转的导弹简称为滚转导弹。

滚转导弹只有一对操纵机构，利用导弹绕其纵轴旋转和改变操纵机构的位置，可以在空间任意方向产生控制力。同时，导弹旋转还可以改善气动不对称和推力偏心等干扰因素的影响。这种控制方式的滚转导弹，最主要的优点是控制装置和弹体结构简单，比一般的导弹少两个通道，导弹系统大为简化；缺点是控制力的方向不够准确。但是，对于反坦克导弹和低空防空导弹，可以满足其战术要求。

由 §1-9 和 §2-8 中知道，滚转导弹有一个重要特点，即导弹纵、侧向运动有交连影响（或称交叉耦合），也就是说，导弹的纵向运动会引起侧向运动，而侧向运动也会引起纵向运动。滚转导弹纵侧向运动交连影响产生的主要原因是陀螺效应和马格努斯效应。由于滚转角速度 ω_x 不是小量，因此导弹在滚转中具有一定的角动量，就像一个陀螺，在受到某一个方向的力矩后，要在垂直的方向上产生进动运动。马格努斯效应使得导弹在作俯仰（偏航）运动时，还会受到偏航（俯仰）方向空气动力和力矩的作用。因此，导弹运动方程组不能简化为纵向运动方程组和侧向运动方程组。

在这一章中，要建立滚转导弹的扰动运动方程组，阐述滚转导弹弹体动态特性的研究方法，分析滚转导弹的动态稳定性，特别要研究转速对导弹动态稳定性影响。

§ 9-1 滚转导弹的扰动运动方程组

在 §2-8 中，已经得到了滚转导弹运动方程组 (2-120)。把式中力矩 M_{x_4} 、 M_{y_4} 、 M_{z_4} 、 M_{cx_4} 、 M_{cy_4} 和 M_{cz_4} 写成展开式，并且不考虑 $\phi_1=0$ ， $\phi_2=0$ 两式，得到滚转导弹运动方程组如下

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= P \cos \alpha^* \cos \beta^* - X - G \sin \theta + \frac{2}{\pi} F_c (K_z \sin \beta^* - K_z \sin \alpha^* \cos \beta^*) \\ mV \frac{d\theta}{dt} &= P (\sin \alpha^* \cos \gamma_V^* + \cos \alpha^* \sin \beta^* \sin \gamma_V^* + Y \cos \gamma_V^* - Z \sin \gamma_V^* - G \cos \theta + \\ &\quad \frac{2}{\pi} F_c [K_y (\cos \alpha^* \cos \gamma_V^* - \sin \alpha^* \sin \beta^* \sin \gamma_V^*) - K_z \sin \gamma_V^* \cos \beta^*] \\ - mV \cos \theta \frac{d\psi_V}{dt} &= P (\sin \alpha^* \sin \gamma_V^* - \cos \alpha^* \sin \beta^* \cos \gamma_V^*) + Y \sin \gamma_V^* + Z \cos \gamma_V^* + \\ &\quad \frac{2}{\pi} F_c [K_y (\sin \alpha^* \sin \beta^* \cos \gamma_V^* + \cos \alpha^* \sin \gamma_V^*) + K_z \cos \gamma_V^* \cos \beta^*] \\ J_{x_4} \frac{d\omega_{x_4}}{dt} &= M_{x_0} + M_{x_4}^{\omega_{x_4}} + M_{x_4}^{\omega_{y_4}} + M_{x_4}^{\omega_{z_4}} + M_{p_{x_4}} \end{aligned} \right\} \quad (9-1)$$

$$\left. \begin{aligned}
 J_{y_4} \frac{d\omega_{y_4}}{dt} &= M_{y_4}^{\beta^*} \beta^* + M_{y_4}^{\omega_{y_4}} \omega_{y_4} + M_{y_4}^{\omega_{x_4}} \omega_{x_4} - (J_{x_4} - J_{z_4}) \omega_{x_4} \omega_{z_4} - \\
 &\quad J_{z_4} \omega_{x_4} \dot{\gamma} + \frac{2}{\pi} F_c K_z (x_p - x_G) \\
 J_{x_4} \frac{d\omega_{x_4}}{dt} &= M_{x_4}^{\alpha^*} \alpha^* + M_{x_4}^{\omega_{x_4}} \omega_{x_4} + M_{x_4}^{\omega_{z_4}} \omega_{z_4} - (J_{y_4} - J_{z_4}) \omega_{y_4} \omega_{z_4} + \\
 &\quad J_{y_4} \omega_{y_4} \dot{\gamma} - \frac{2}{\pi} F_c K_y (x_p - x_G) \\
 \frac{dx}{dt} &= V \cos \theta \cos \psi_V \\
 \frac{dy}{dt} &= V \sin \theta \\
 \frac{dz}{dt} &= -V \cos \theta \sin \psi_V \\
 \frac{dr}{dt} &= \omega_{x_4} - \frac{d\psi}{dt} \sin \vartheta \\
 \frac{d\psi}{dt} &= \omega_{y_4} / \cos \vartheta \\
 \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_{z_4} \\
 \frac{dm}{dt} &= -m_c \\
 \sin \beta^* &= \cos \theta \sin (\psi - \psi_V) \\
 \sin \theta &= \cos \beta^* \sin (\vartheta - \alpha^*) \\
 \sin \gamma_V^* &= \tan \beta^* \tan \theta
 \end{aligned} \right\} \quad (9-1) \text{ 续}$$

建立滚转导弹运动方程组时，考虑到这类导弹多数都采用脉冲调宽式舵机，所以不用舵偏角和等效舵偏角概念，而是通过俯仰和偏航的指令系数 K_y 和 K_z 来表示俯仰和偏航的周期平均操纵力 $\bar{F}_{y_4}$ 和 $\bar{F}_{z_4}$ ，即

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{F}_{y_4} &= K_y \frac{2F_c}{\pi} \\
 \bar{F}_{z_4} &= K_z \frac{2F_c}{\pi}
 \end{aligned} \right\} \quad (9-2)$$

式中 K_y ——俯仰指令系数，上指令为负，下指令为正；

K_z ——偏航指令系数，右指令为负，左指令为正。

在这组方程中，没有列入制导系统方程，因为讨论的是弹体动态特性，认为指令系数为已知值。

下面对导弹弹体运动方程组 (9-1) 进行线性化。线性化的方法和假设与 § 6-5 中基本相同，只是未扰动运动中 ω_{x_4} 和 γ 不能看做小量，除此以外，还假定：

(1) 导弹的质量分布相对于纵轴是对称的，因此弹体的惯性主轴与其几何中心轴重合，即 $J_y = J_z$ ，并且对质心的任何横轴的转动惯量都相等；

(2) 空气动力是轴对称的，即 $c_y^a = -c_z^{\beta}$ ， $m_z^a = m_y^{\beta}$ ， $m_z^{\omega_z} = m_y^{\omega_y}$ ， $m_z^{\omega_x} = -m_y^{\omega_x}$...，并认为弹

体绕纵轴旋转任何一个角度后，其空气动力特性不变；

(3) 导弹在扰动运动中，旋转角速度 ω_x 和未扰动运动中一样。

用 § 6-4 中的方法，对运动方程组进行线性化。线性化以后，由于方程组中马格努斯力矩和陀螺力矩交连项的影响，使扰动运动方程组不能同 § 6-5 中所讨论的那样分为两个互相独立的纵向和侧向扰动运动方程组。

同前，略去速度偏量方程及其他方程中速度偏量的影响，略去重力法向分量变化 $G \sin \theta \Delta \theta$ 对弹道转动速度偏量 $d\Delta\theta/dt$ 的影响，即可得到下列简化的扰动运动方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} - \frac{M_z^{\omega_x}}{J_z} \frac{d\Delta \vartheta}{dt} - \frac{M_z^a}{J_z} \Delta \alpha - \frac{M_z^{\beta}}{J_z} \Delta \beta - \frac{J_x \omega_x}{J_z} \frac{d\Delta \psi}{dt} &= \frac{-\frac{2}{\pi} F_c (x_p - x_G)}{J_z} \Delta K_y \\ \frac{d^2 \Delta \psi}{dt^2} - \frac{M_y^{\omega_x}}{J_y} \frac{d\Delta \psi}{dt} - \frac{M_y^{\beta}}{J_y} \Delta \beta - \frac{M_y^a}{J_y} \Delta \alpha + \frac{J_x \omega_x}{J_y} \frac{d\Delta \vartheta}{dt} &= \frac{-\frac{2}{\pi} F_c (x_p - x_G)}{J_y} \Delta K_z \\ \frac{d\Delta \theta}{dt} - \frac{P + Y^a}{mV} \Delta \alpha &= \frac{\frac{2}{\pi} F_c}{mV} \Delta K_y \\ \frac{d\Delta \psi_V}{dt} - \frac{P - Z^{\beta}}{mV} \Delta \beta &= \frac{-\frac{2}{\pi} F_c}{mV} \Delta K_z \\ -\Delta \vartheta + \Delta \theta + \Delta \alpha &= 0 \\ -\Delta \psi + \Delta \psi_V + \Delta \beta &= 0 \end{aligned} \right\} (9-3)$$

上式中 $M_z^{\beta} \Delta \beta$ 和 $M_y^a \Delta \alpha$ 也可写为 $M_z^{\omega_x} \Delta \omega_x$ 和 $M_y^{\omega_x} \Delta \omega_x$ ，为马格努斯力矩偏量。

为了书写简便，略去式 (9-3) 中 α^* 、 β^* 和 γ_V^* 的上标 “*” 和 ω_{x_4} 、 ω_{y_4} 、… 的下标中 “4”。但要切记：滚转导弹扰动运动方程组中的 α 、 β 、 γ_V 、 ω_y 和 ω_z 的定义与倾斜稳定的非滚转导弹扰动运动方程组中的 α 、 β 、 γ_V 、 ω_y 和 ω_z 的定义是不同的。

由扰动运动方程组 (9-3) 可见，纵向和侧向的扰动运动是互相交连的。

与 § 6-6 中一样，采用系数冻结法，并用动力系数符号表示方程组中系数，则可得扰动运动方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} - a_{22} \frac{d\Delta \vartheta}{dt} - a_{24} \Delta \alpha + a'_{27} \Delta \beta - a'_{28} \frac{d\Delta \psi}{dt} &= a_{25} \Delta K_y \\ \frac{d^2 \Delta \psi}{dt^2} - b_{22} \frac{d\Delta \psi}{dt} - b_{24} \Delta \beta - b'_{27} \Delta \alpha + b'_{28} \frac{d\Delta \vartheta}{dt} &= -b_{25} \Delta K_z \\ \frac{d\Delta \theta}{dt} - a_{34} \Delta \alpha &= a_{35} \Delta K_y \\ \frac{d\Delta \psi_V}{dt} - b_{34} \Delta \beta &= -b_{35} \Delta K_z \\ -\Delta \vartheta + \Delta \theta + \Delta \alpha &= 0 \\ -\Delta \psi + \Delta \beta + \Delta \psi_V &= 0 \end{aligned} \right\} (9-4)$$

式中

$$a_{22} = \frac{M_z^{\omega_x}}{J_z} = \frac{m_z^{\omega_x} q S L}{J_z} \frac{L}{V} \quad (s^{-1})$$

$$a_{24} = \frac{M_z^a}{J_z} = \frac{m_z^a q S L}{J_z} \quad (s^{-2})$$

$$\begin{aligned}
a'_{27} &= \frac{-M_z^\beta}{J_z} = -\frac{m_z^\beta qSL}{J_z} \quad (\text{s}^{-2}) \\
a'_{28} &= \frac{J_x \omega_x}{J_z} \quad (\text{s}^{-1}) \\
a_{25} &= \frac{M_z^{K_y}}{J_z} = \frac{-\frac{2}{\pi} F_c (x_P - x_G)}{J_z} \quad (\text{s}^{-2}) \\
a_{34} &= \frac{P + Y^a}{mV} = \frac{P + c_y^a qSL}{mV} \quad (\text{s}^{-1}) \\
a_{35} &= \frac{F_y^{K_y}}{mV} = \frac{\frac{2}{\pi} F_c}{mV} \quad (\text{s}^{-1}) \\
b_{22} &= \frac{M_y^{\omega_y}}{J_y} = \frac{m_y^{\omega_y} qSL}{J_y} \frac{L}{V} \quad (\text{s}^{-1}) \\
b_{24} &= \frac{M_y^\beta}{J_y} = \frac{M_y^\beta qSL}{J_y} \quad (\text{s}^{-2}) \\
b'_{27} &= \frac{M_y^a}{J_y} = \frac{m_y^a qSL}{J_y} \quad (\text{s}^{-2}) \\
b'_{28} &= \frac{J_x \omega_x}{J_y} \quad (\text{s}^{-1}) \\
b_{25} &= \frac{-M_y^{K_z}}{J_y} = \frac{-\frac{2}{\pi} F_c (x_P - x_G)}{J_y} \quad (\text{s}^{-2}) \\
b_{34} &= \frac{P - Z^\beta}{mV} = \frac{P - c_z^\beta qSL}{mV} \quad (\text{s}^{-1}) \\
b_{35} &= \frac{F_z^{K_z}}{mV} = \frac{\frac{2}{\pi} F_c}{mV} \quad (\text{s}^{-1})
\end{aligned}$$

对于反坦克导弹，气动系数的特征长度和参考面积常采用弹身长度 L 和弹身截面积 S 。

根据导弹是轴对称型的假设，可以认为 $a_{22}=b_{22}$ ， $a_{24}=b_{24}$ ， $a_{25}=b_{25}$ ， $a'_{27}=b'_{27}$ ， $a'_{28}=b'_{28}$ ， $a_{34}=b_{34}$ ， $a_{35}=b_{35}$ 。

动力系数 a_{22} 、 a_{24} 和 a_{34} 表达式及其物理意义与第七章中相同。对于 a_{25} 和 a_{35} ，由于输入量已由舵偏角 δ_2 改为指令系数 K_y ，所以表达式不同，但其物理意义仍然相同，只是将单位舵偏角产生的法向力 Y^{δ_2} 和力矩 $M_z^{\delta_2}$ 改为单位指令系数产生的法向力 F_y^K 和力矩 M_z^K ，而已。

系数 a'_{27} 表征滚转导弹的马格努斯力矩特性。对于依靠斜置弹翼取得滚转角速度的右滚导弹，系数 a'_{27} 为正。同时，由于马格努斯力很小，所以在建立运动方程时就被忽略了。

系数 a'_{28} 表征滚转导弹的陀螺力矩特性，当导弹右滚时，系数 a'_{28} 为正。

将方程组 (9-4) 中的动力系数 b_{ij} 用对应相等的 a_{ij} 代入，可得扰动运动方程组

$$\left. \begin{aligned}
\frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} - a_{22} \frac{d \Delta \vartheta}{dt} - a_{24} \Delta \alpha + a'_{27} \Delta \beta - a'_{28} \frac{d \Delta \psi}{dt} &= a_{25} \Delta K_y \\
\frac{d^2 \Delta \psi}{dt^2} - a_{22} \frac{d \Delta \psi}{dt} - a_{24} \Delta \beta - a'_{27} \Delta \alpha + a'_{28} \frac{d \Delta \vartheta}{dt} &= -a_{25} \Delta K_z
\end{aligned} \right\} \quad (9-5)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Delta\theta}{dt} - a_{34}\Delta\alpha &= a_{35}\Delta K_y \\ \frac{d\Delta\psi_v}{dt} - a_{34}\Delta\beta &= -a_{35}\Delta K_z \\ -\Delta\vartheta + \Delta\theta + \Delta\alpha &= 0 \\ -\Delta\psi + \Delta\psi_v + \Delta\beta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9-5) \text{ 续}$$

这个方程组中输入量是指令系数增量 ΔK_y 和 ΔK_z ，未知变量是运动参数偏量 $\Delta\vartheta$ 、 $\Delta\theta$ 、 $\Delta\alpha$ 、 $\Delta\psi$ 、 $\Delta\psi_v$ 和 $\Delta\beta$ ，共六个。方程组是六阶的常系数线性微分方程组，因此，方程组求解若不借助于电子计算机，直接求解是很复杂的。

为了能够以解析方法求解方程组 (9-5)，可以利用复角及复合指令系数的概念。令

$$\left. \begin{aligned} A &= \psi + i\vartheta \\ B &= \beta + i\alpha \\ C &= \psi_v + i\theta \\ K &= -K_z + iK_y \end{aligned} \right\} \quad (9-6)$$

式中 A 、 B 、 C 和 K 分别称为“复姿态角”、“复攻角”、“复方向角”及“复合指令系数”，其中 $i = \sqrt{-1}$ 。于是复角和复合指令系数的增量为

$$\left. \begin{aligned} \Delta A &= \Delta\psi + i\Delta\vartheta \\ \Delta B &= \Delta\beta + i\Delta\alpha \\ \Delta C &= \Delta\psi_v + i\Delta\theta \\ \Delta K &= -\Delta K_z + i\Delta K_y \end{aligned} \right\} \quad (9-7)$$

用虚数单位 $i = \sqrt{-1}$ 分别去乘方程组 (9-5) 中第 1、3、5 诸式，然后分别与方程组 (9-5) 中第 2、4、6 诸式相加，利用复角偏量和复合指令系数偏量定义式 (9-7)，就可把方程组 (9-5) 改写成下面的简缩形式（为了书写方便，去掉复角和复合指令前的“ Δ ”）：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 A}{dt^2} - (a_{22} + ia'_{28}) \frac{dA}{dt} - (a_{24} - ia'_{27})B &= a_{25}K \\ \frac{dC}{dt} - a_{34}B &= a_{35}K \\ A - B - C &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9-8)$$

方程组 (9-8) 是描述滚转导弹的扰动运动方程组，形式上和采用倾斜稳定非滚转导弹短周期纵向扰动运动方程组 (7-56) 和偏航扰动运动方程组 (8-22) 相似，只是输入量是复合指令系数偏量 K ，输出量是复合姿态角偏量 A 、复合攻角偏量 B 和复合方向角偏量 C 。输入量和输出量都是复数，而其中有些系数也是复数，即考虑了交连影响。但是，方程组却由原来的六阶降为三阶，这样，用解析方法求解方程组就很方便。

若不考虑滚转导弹的纵侧向运动的交连影响，即 $a'_{28} = a'_{27} = 0$ ，不难看出，方程组 (9-8) 可以分成两组形式上相同，且互相独立的纵向扰动运动方程组和偏航扰动运动方程组，和前面讨论的方程组 (7-56) 和 (8-22) 完全相同（不考虑干扰力和干扰力矩及洗流的影响，即 $F_{gy} = F_{gz} = M_{gy} = M_{gz} = 0$ ， $a'_{24} = b'_{24} = 0$ ）。只是由于舵偏角改为指令系数后，方向舵偏角 δ_y 和偏航指令系数 K_z 的符号有正负的差别。

对于方程组 (9-8)，可以仿照第七章中的方法进行求解。

§ 9-2 滚转导弹弹体的传递函数

现在对方程组 (9-8) 建立传递函数, 其方法与前述相同。方程组 (9-8) 拉氏变换后的主行列式为

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= \begin{vmatrix} s^2 - (a_{22} + ia'_{28})s & -(a_{24} - ia'_{27}) & 0 \\ 0 & -a_{34} & s \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= s^3 + (a_{34} - a_{22} - ia'_{28})s^2 + [(-a_{24} - a_{34}a_{22}) + i(a'_{27} - a_{34}a'_{28})]s \end{aligned} \quad (9-9)$$

对于输入量为 K , 输出量分别为 A 、 B 、 C 的传递函数

$$W_K^A(s) = \frac{a_{25}s + a_{25}a_{34} - a_{35}a_{24} + ia_{35}a'_{27}}{s[s^2 + (a_{34} - a_{22} - ia'_{28})s + (-a_{24} - a_{34}a_{22}) + i(a'_{27} - a_{34}a'_{28})]} \quad (9-10)$$

$$W_K^B(s) = \frac{-a_{35}s + (a_{35}a_{22} + a_{25} + ia_{35}a'_{28})}{s^2 + (a_{34} - a_{22} - ia'_{28})s + (-a_{24} - a_{34}a_{22}) + i(a'_{27} - a_{34}a'_{28})} \quad (9-11)$$

$$W_K^C(s) = \frac{a_{35}s^2 - (a_{35}a_{22} + ia_{35}a'_{28})s - a_{35}a_{24} + a_{34}a_{25} + ia_{35}a'_{27}}{s[s^2 + (a_{34} - a_{22} - ia'_{28})s + (-a_{24} - a_{34}a_{22}) + i(a'_{27} - a_{34}a'_{28})]} \quad (9-12)$$

此外, 与机动性有关的运动参数偏量, 即复合速度方向角速度 $\dot{C} = \dot{\psi}_v + i\dot{\theta}$ 和复合法向过载 $n = -n_z + in_y$ 的传递函数分别为

$$W_K^{\dot{C}}(s) = sW_K^C(s) \quad (9-13)$$

$$W_K^n(s) = \frac{V}{g} W_K^{\dot{C}}(s) \quad (9-14)$$

复合法向过载相对于复合指令系数 K 的放大系数

$$K_K^n = \lim_{s \rightarrow 0} W_K^n(s) = \frac{V}{g} \frac{a_{34}a_{25} - a_{35}a_{24} + ia_{35}a'_{27}}{-a_{24} - a_{34}a_{22} + i(a'_{27} - a_{34}a'_{28})} \quad (9-15)$$

知道了放大系数 K_K^n , 就可以知道, 当操纵机构给出一个阶跃复合指令时, 弹体的响应过渡过程结束后, 导弹的复合法向过载值 n

$$n = K_K^n K \quad (9-16)$$

由于传递函数 $W_K^A(s)$ 、 $W_K^B(s)$ 、 $W_K^C(s)$ 和 $W_K^n(s)$ 的输入量和输出量都是复数, 具体计算比较麻烦。所以, 对这些传递函数表达式通过数学推导, 直接求出输入量为指令系数偏量 K_y 或 K_z , 输出量为运动参数偏量 α 、 β 、... 的传递函数。

下面以式 (9-11) 中的弹体复攻角 B 相对于复合指令系数 K 的传递函数 $W_K^B(s)$ 为例, 求传递函数 $W_{K_y}^{\alpha}(s)$ 、 $W_{K_z}^{\beta}(s)$ 、 $W_{K_y}^{\beta}(s)$ 、 $W_{K_z}^{\alpha}(s)$ 。

由式 (9-11) 可以写成

$$W_K^B(s) = \frac{M_0(s) + iM_1(s)}{N_0(s) + iN_1(s)} \quad (9-17)$$

$$\left. \begin{aligned} M_0(s) &= -a_{35}s + a_{35}a_{22} + a_{25} \\ M_1(s) &= a_{35}a'_{28} \\ N_0(s) &= s^2 + (a_{34} - a_{22})s - a_{24} - a_{34}a_{22} \\ N_1(s) &= -a'_{28}s + a'_{27} - a_{34}a'_{28} \end{aligned} \right\} \quad (9-18)$$

式中

式中 $M_0(s)$ 、 $M_1(s)$ 、 $N_0(s)$ 、 $N_1(s)$ 分别为式 (9-11) 中分子和分母的实部和虚部。

因为

$$W_K^B(s) = \frac{B(s)}{K(s)} = \frac{\beta(s) + i\alpha(s)}{-K_x(s) + iK_y(s)}$$

则

$$\beta(s) + i\alpha(s) = W_K^B(s)[-K_x(s) + iK_y(s)]$$

把式 (9-17) 代入上式, 则

$$[N_0(s) + iN_1(s)][\beta(s) + i\alpha(s)] = [M_0(s) + iM_1(s)][-K_x(s) + iK_y(s)]$$

将上式按实部和虚部分开, 则

$$\left. \begin{aligned} N_0(s)\beta(s) - N_1(s)\alpha(s) &= M_0(s)[-K_x(s)] - M_1(s)K_y(s) \\ N_1(s)\beta(s) + N_0(s)\alpha(s) &= M_1(s)[-K_x(s)] + M_0(s)K_y(s) \end{aligned} \right\} \quad (9-19)$$

上式用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} \beta(s) \\ \alpha(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_0(s) & -N_1(s) \\ N_1(s) & N_0(s) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M_0(s) & -M_1(s) \\ M_1(s) & M_0(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K_x(s) \\ K_y(s) \end{bmatrix}$$

而逆阵为

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} &= \frac{1}{N_0^2 + N_1^2} \begin{bmatrix} N_0 & N_1 \\ -N_1 & N_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 & -M_1 \\ M_1 & M_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K_x \\ K_y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{N_0M_0 + N_1M_1}{N_0^2 + N_1^2} & \frac{-N_0M_1 + N_1M_0}{N_0^2 + N_1^2} \\ \frac{-N_1M_0 + N_0M_1}{N_0^2 + N_1^2} & \frac{N_1M_1 + N_0M_0}{N_0^2 + N_1^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K_x \\ K_y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} W_{-K_x}^\beta(s) & W_{K_y}^\beta(s) \\ W_{-K_x}^\alpha(s) & W_{K_y}^\alpha(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K_x \\ K_y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9-20)$$

即

$$\left. \begin{aligned} \beta &= W_{-K_x}^\beta(s)(-K_x) + W_{K_y}^\beta(s)K_y \\ \alpha &= W_{-K_x}^\alpha(s)(-K_x) + W_{K_y}^\alpha(s)K_y \end{aligned} \right\} \quad (9-21)$$

由式 (9-20) 和 (9-17) 可见

$$\left. \begin{aligned} W_{-K_x}^\beta(s) &= W_{K_y}^\alpha(s) = \operatorname{Re} W_K^B(s) \\ W_{-K_x}^\alpha(s) &= -W_{K_y}^\beta(s) = \operatorname{Im} W_K^B(s) \end{aligned} \right\} \quad (9-22)$$

即

$$-W_{K_x}^\beta(s) = W_{K_y}^\alpha(s) = \frac{N_1M_1 + N_0M_0}{N_0^2 + N_1^2}$$

把式 (9-18) 代入上式, 可得

$$-W_{K_x}^\beta(s) = W_{K_y}^\alpha(s)$$

$$= \frac{(-a'_{28}s + a'_{27} - a_{34}a'_{28})a_{35}a'_{28} + [s^2 + (a_{34} - a_{22})s - a_{24} - a_{34}a_{22}](-a_{35}s + a_{35}a_{22} + a_{25})}{[s^2 + (a_{34} - a_{22})s - a_{24} - a_{34}a_{22}]^2 + [-a'_{28}s + a'_{27} - a_{34}a'_{28}]^2} \quad (9-23)$$

$$W_{K_z}^a(s) = W_{K_y}^B(s) = \frac{-N_0M_1 + N_1M_0}{N_0^2 + N_1^2}$$

把式(9-18)代入上式, 可得

$$\begin{aligned} W_{K_z}^a(s) &= W_{K_y}^B(s) \\ &= \frac{-[s^2 + (a_{34} - a_{22})s - a_{24} - a_{34}a_{22}]a_{35}a'_{28} + (-a'_{28}s + a'_{27} - a_{34}a'_{28})(-a_{35}s + a_{35}a_{22} + a_{25})}{[s^2 + (a_{34} - a_{22})s - a_{24} - a_{34}a_{22}]^2 + [-a'_{28}s + a'_{27} - a_{34}a'_{28}]^2} \end{aligned} \quad (9-24)$$

当不考虑交连影响时, 即 $a'_{27}=a'_{28}=0$, 则(9-23)式为

$$-W_{K_z}^B(s) = W_{K_y}^a(s) = \frac{-a_{35}s + a_{35}a_{22} + a_{25}}{s^2 + (a_{34} - a_{22})s - a_{24} - a_{34}a_{22}} \quad (9-25)$$

上式与第七章中 $W_{K_z}^a(s)$ 表达式(7-96)完全相同(略去洗流影响), 而 $W_{K_z}^B(s)$ 与 $W_{K_y}^B(s)$ 相差一个负号, 是由于对 K_z 和 δ_y 正负号定义不同所造成的, 而式(9-24)变为

$$W_{K_z}^a(s) = W_{K_y}^B(s) = 0$$

从以上讨论可知, 滚转导弹的运动, 由于马格努斯力矩和陀螺力矩的影响, 使得其纵向运动和侧向运动互相交连。此外, 滚转导弹的制导系统中某些部件也会产生交连影响, 例如舵机动作的滞后, 就会使周期平均控制力的方向发生变化, 造成俯仰控制和偏航控制的交连影响。因此, 设计滚转导弹时, 必须研究弹体和制导系统中各部分造成的交连影响及其与弹体参数、弹道参数、制导系统元、部件参数等的关系, 以便采取适当措施, 进行解耦, 减少交连影响。例如苏“赛格”反坦克导弹采用陀螺预装角, 使控制指令提前, 以解除导弹运动和制导系统产生的交连。

§ 9-3 滚转导弹弹体的动态稳定性

一、动态稳定性条件

研究滚转导弹弹体的动态稳定性, 需要研究滚转导弹的自由扰动运动, 只要求解式(9-8)的特征方程式(9-9), 就可以判别其稳定性。

若研究复合攻角偏量 B 在自由扰动运动中的变化情况, 则特征方程式为

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \lambda^2 + (a_{34} - a_{22} - ia'_{28})\lambda + (-a_{24} - a_{34}a_{22}) + \\ &\quad i(a'_{27} - a_{34}a'_{28}) = 0 \end{aligned} \quad (9-26)$$

由上式可以解出两个特征根 λ_1 及 λ_2

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{-(a_{34} - a_{22} - ia'_{28})}{2} \pm \\ &\quad \frac{1}{2} \sqrt{(a_{34} - a_{22} - ia'_{28})^2 - 4[(-a_{24} - a_{34}a_{22}) + i(a'_{27} - a_{34}a'_{28})]} \end{aligned} \quad (9-27)$$

复合攻角偏量 B 随时间的变化式为

$$B = D_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 e^{\lambda_2 t}$$

式中 D_1 和 D_2 是由初始条件决定的常数。

特征根 λ_1 和 λ_2 的性质决定自由扰动运动是否稳定。若 λ_1 及 λ_2 的实部都是负数，那么运动就是稳定的；若它们的实部有一个正数，运动就是不稳定的。下面研究在怎样的条件下，这种动态不稳定性就要发生。为此，必须把式 (9-27) 中第二项的根式展成一般的复数。令式 (9-27) 中第二项根式为

$$\sqrt{P+iQ}$$

$$\text{式中} \quad P = (a_{22} + a_{34})^2 - a_{28}'^2 + 4a_{24} \quad (9-28)$$

$$Q = 2(a_{34} + a_{22})a_{28}' - 4a_{27}' \quad (9-29)$$

$$\text{此外, 令} \quad R = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{Q}{P}$$

$$\text{于是, 可得} \quad \sqrt{P+iQ} = \sqrt{R}e^{i\varphi} = \sqrt{R}e^{i\varphi/2} \quad (9-30)$$

由欧拉公式及三角公式可知

$$\begin{aligned} e^{i\varphi/2} &= \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \\ &= \pm \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}} \pm i \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}} = \pm \sqrt{\frac{R+P}{2R}} \pm i \sqrt{\frac{R-P}{2R}} \end{aligned} \quad (9-31)$$

现在讨论式 (9-31) 中的正负号的搭配关系。可以从 $(P+iQ)$ 同 $\sqrt{P+iQ}$ 作为矢量的相位角关系中得出，从图 9-1 (a) 和 (b) 可见：

1. $Q>0$ 的情况

如图 9-1 (a) 所示，这时矢量 $P+iQ=Re^{i\varphi}$ 必然位于第一象限（若 $P>0$ ）或第二象限（若 $P<0$ ），于是 $0<\varphi<\pi$ 。所以，矢量 $+\sqrt{P+iQ}=+\sqrt{R}e^{i\varphi/2}$ 必然位于第一象限，即 $0<\frac{\varphi}{2}<\frac{\pi}{2}$ ，因此，由式 (9-30) 及 (9-31) 应有

$$+\sqrt{P+iQ} = +\sqrt{\frac{R+P}{2}} + i\sqrt{\frac{R-P}{2}}$$

代入式 (9-27)，可得

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{a_{22} - a_{34}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R+P}{2}} + \\ &\quad i \left[\frac{a_{28}'}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R-P}{2}} \right] \end{aligned} \quad (9-32)$$

2. $Q<0$ 的情况

见图 9-1 (b)。这时矢量 $(P+iQ)=Re^{i\varphi}$ 必然位于第三象限 ($P<0$) 或第四象限 ($P>0$)，于是 $\pi<\varphi<2\pi$ 。所以，矢量 $+\sqrt{P+iQ}=+\sqrt{R}e^{i\varphi/2}$ 必然位于第二象限，即 $\pi/2<\varphi/2<\pi$ ；因此，由式 (9-30) 及 (9-31) 应有

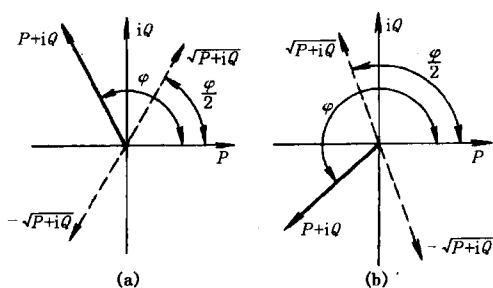


图 9-1 矢量 $\sqrt{P+iQ}$ 的相位角
(a) $Q>0$; (b) $Q<0$

$$+ \sqrt{P + iQ} = -\sqrt{\frac{R+P}{2}} + i\sqrt{\frac{R-P}{2}}$$

代入式 (9-27), 可得

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{22} - a_{34}}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R+P}{2}} + i \left[\frac{a'_{28}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R-P}{2}} \right] \quad (9-33)$$

对于无尾式布局的导弹, 具有差动安装角的弹翼总是位于导弹质心的后面, 这时马格努斯力矩方向将使动力系数 $a'_{27} > 0$, 有可能 $Q < 0$, 即相当于上述第二种情况。

动态稳定性的条件是 λ_1 和 λ_2 的实部皆为负数, 而 $(a_{22} - a_{34})/2 < 0$, 于是, 由式 (9-32) 及 (9-33) 知道动态稳定性条件应为

$$\frac{a_{22} - a_{34}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R+P}{2}} < 0 \quad (9-34)$$

上式经过整理以后可以写成

$$(a_{34} - a_{22})^4 - (a_{34} - a_{22})^2 P - \frac{Q^2}{4} > 0 \quad (9-35)$$

再将 P 和 Q 的表达式 (9-28) 和 (9-29) 代入上式, 并经过整理, 可得到

$$-4(a_{24} + a_{22}a_{34}) + a'^2_{28} - \left[\frac{2a'_{27} - (a_{22} + a_{34})a'_{28}}{a_{34} - a_{22}} \right]^2 > 0 \quad (9-36)$$

这就是保证滚转导弹弹体动态稳定性的条件式。

由上式可以看出: 如果滚转导弹是静不稳定的 (即 $a_{24} > 0$), 则弹体运动是动不稳定的。因为一般情况下, $|a_{24}| > |a_{22}a_{34}|$, 而 a'_{28} 项由于低速滚转数值也不大, 因此不能满足不等式 (9-36) 条件。但对于静不稳定的炮弹, 由于高速滚转, 可以得到动态稳定性。即使滚转导弹是静稳定的, 即 $a_{24} < 0$, 但在滚转的情况下, 也有可能成为动态不稳定。

下面进一步分析式 (9-36) 中各动力系数对动态稳定性的影响, 以及怎样才能保证弹体的动态稳定性。

对于没有角自动稳定系统的滚转导弹, 飞行时的角 (指 α 、 β 、 θ 、 $\dots$) 稳定性, 完全依靠弹体的动态稳定性来实现, 这时, 保证弹体的动态稳定性就更加显得重要。由式 (9-36) 可见:

(1) 静稳定性越大, 即 $|a_{24}|$ 越大 ($a_{24} < 0$), 对于保证动态稳定性越有利。一般 $|a_{24}|$ 比条件式中其他系数大得多, 在式中起主要作用。

(2) 法向力系数 ($a_{34} > 0$) 越大, 则对动态稳定性越有利。

(3) 马格努斯力矩系数 ($a'_{27} > 0$) 越大, 则对动态稳定性的不利影响越大。

(4) 气动阻尼系数 $|a_{22}|$ 越大 ($a_{22} < 0$), 则对动态稳定性越有利。若 $|a_{22}|$ 增加, 对于满足条件式 (9-36) 而言, 在第一项中是有利的, 在第三项的分母中也是有利的, 在第三项的分子中则是不利的。然而 a_{22} 在分母中的影响大于在分子中的影响, 因此, 气动阻尼的增加, 对动态稳定性是有利的。

(5) 陀螺力矩系数 ($a'_{28} > 0$) 对动态稳定性的影响, 由式 (9-36) 可见, 在第二项中是有利的, 在第三项中要看 $a_{22} + a_{34}$ 的正负而决定其是否有利。由于 a'_{28} 与 a_{24} 值相比很小, 所以陀螺力矩对动态稳定性的影响是很小的。

二、动态稳定区和转速范围的确定

1. 滚转导弹的动态稳定区

对式 (9-36) 进行变换。由第七章中知道, 不滚转导弹的固有频率为式 (7-123), 即

$$\omega_c = \sqrt{-(a_{24} + a_{22}a_{34})}$$

当导弹是依靠斜置弹翼来获得并维持其滚转角速度 ω_x 时, 系数 m_y^s 和 m_z^s 差不多是 ω_x 的线性函数, 即可近似认为 $\partial m_z^s / \partial \omega_x = m_z^{\beta\omega}$ 是一个常数, 故动力系数 a'_{27} 可改写为

$$a'_{27} = \frac{-m_z^{\beta\omega} \omega_x q S L}{J_z} \quad (9-37)$$

把 ω_c 、 a'_{27} 和 a'_{28} 的表达式代入式 (9-36), 并整理可得

$$\omega_c - \sqrt{\left[\frac{-m_z^{\beta\omega} q S L}{(a_{34} - a_{22}) J_z} - \frac{1}{2} \left(\frac{a_{34} + a_{22}}{a_{34} - a_{22}} \right) \frac{J_x}{J_z} \right]^2 - \left(\frac{1}{2} \frac{J_x}{J_z} \right)^2} \omega_x > 0 \quad (9-38)$$

若令

$$\sqrt{\left[\frac{-m_z^{\beta\omega} q S L}{(a_{34} - a_{22}) J_z} - \frac{1}{2} \left(\frac{a_{34} + a_{22}}{a_{34} - a_{22}} \right) \frac{J_x}{J_z} \right]^2 - \left(\frac{1}{2} \frac{J_x}{J_z} \right)^2} = C \quad (9-39)$$

式中 C 为稳定边界常数。则式 (9-38) 可写为

$$\omega_c - C \omega_x > 0 \quad (9-40)$$

假若有关的结构参数已定, 则可以认为 C 是一个常数, 于是动态稳定条件式 (9-40) 是一个线性不等式。利用这个式子可以画出如图 9-2 的动态稳定区域, 凡是位于动态稳定区中的任何一点 (ω_c, ω_x) , 都能使弹体具有动态稳定性。如果有关的结构参数改变, 则只需要改变图 9-2 中稳定区域边界线的斜率即可。

由式 (9-40) 和图 9-2 可知, 当滚转角速度 ω_x 大于一定值时, 有可能产生动不稳定, 所以转速不能设计得太大, 也就是不能超过稳定边界线所对应的极限转速 n_L , 其原因如下:

在一般情况下, 这种低速滚转导弹, 马格努斯力矩只有静稳定力矩的 10%~20% 左右。由动态稳定性条件式 (9-36) 知, 当马格努斯力矩不大时, 主要是 $-a_{24} - a_{22}a_{34}$ 起保证稳定条件的作用, 这时交连影响引起的附加运动不会引起导弹运动不稳定。当转速超过极限值时, 马格努斯力矩很大, 其作用超过静稳定力矩的作用, 这时交连的影响引起的附加运动就会使导弹运动不稳定。

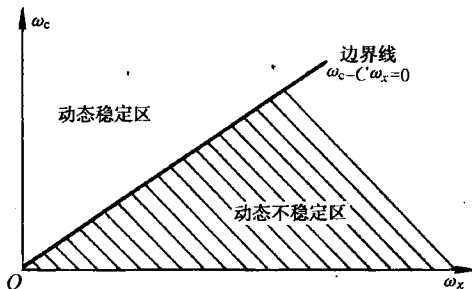


图 9-2 滚转弹体的动态稳定区

2. 滚转导弹转速范围的确定

1) 转速的上限

(1) 不能超过稳定边界线所对应的极限转速, 以防止过大的马格努斯力矩所引起的动态不稳定。

(2) 舵机快速作用与延迟的限制。因为滚转导弹控制信号周期与导弹绕纵轴的滚转周期是严格同步的, 在一个滚转周期内操纵机构要换向四次或两次。如果转速太大, 操纵机构来

不及换向,就会造成舵机不能很好地执行控制指令,而使导弹控制性能变坏。另外由于舵机存在磁隙与机械空回量,使得舵机在接受动作指令之后不能立即运动,而要延迟一段时间。这种延迟是舵机的固有特性,图 9-3 是某滚转反坦克导弹舵机的延迟特性,图中 t_1 为舵机延迟时间, T 为指令宽度。当 $t_1=7\text{ms}$ 时,若 $\omega_{x_1}=10\text{r/s}$, t_1 所对应的滚转角度为

$$\Phi = 2\pi\omega_{x_1}t_1 = 25.2^\circ$$

此时,若控制系统给出一个小指令,例如指令系数 $K=0.14$ 时,对应的指令长度恰好是舵机延迟时间,则此指令被舵机延迟所吞没,舵机没有反应。如果导弹转速再高些,则舵机没有反应的指令还要大,这会影响系统的控制品质。由于舵机的延迟,还要使控制力产生相位滞后。

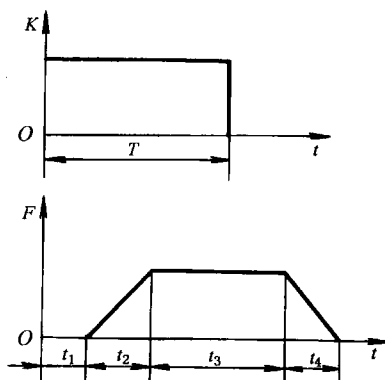


图 9-3 舵机延迟对控制力的影响

2) 转速的下限

(1) 导弹转速必须大大超过弹体固有频率。因为控制力频率与弹体滚转频率是相同的,当转速与弹体固有频率接近时,就会发生共振。如“赛格”反坦克导弹,常温设计转速为 $8\sim 9\text{r/s}$,而弹体固有频率为 $f_c=1\sim 2.5\text{Hz}$ 。

(2) 导弹转速必须大于输入误差信息频率的 $2\sim 2.5$ 倍。为了保证必要的导引,要求导弹的控制采样频率能足够精确地复现输入的误差信息,采样频率应大于误差信息频率的 $2\sim 2.5$ 倍。而脉冲调宽式控制的脉冲频率,决定了制导系统的采样频率。对滚转导弹,控制指令的频率就是导弹的转速,而采样频率与导弹转速也是一致的。如某反坦克导弹,其误差信息频率是 2Hz ,因此要求采样频率大于 5Hz 。

(3) 在确定导弹转速的下限时,还应考虑最大转速的限制。特别是低温时转速若较高,高温时转速会更高,如某滚转反坦克导弹低温时转速为 7r/s ,高温时就可能达到 11r/s 。

考虑了上述因素,某滚转反坦克导弹转速范围为

$$6 \leq n \leq 10\text{r/s}$$

另外,飞行中要求转速变化不要太剧烈,因为转速变化太快,也就是要求基准脉冲信号变化快,会使控制过程发生混乱。

3. 滚转导弹的静稳定性

前已指出,弹体固有频率不能与转速接近,一般应比转速小几倍。但不能太小,因固有频率 ω_c 小,也就是要求 m_z^* 小,而对于没有自动稳定装置的低速滚转导弹,静稳定度是保证动态稳定的必要条件,如“赛格”反坦克导弹静稳定度在 $10\%\sim 25\%$ 左右。同时, ω_c 越大,弹体对控制指令的响应越迅速,过渡过程时间就短。但静稳定度大,会使机动性降低,因此需要综合考虑。

例 9-1 对某滚转反坦克导弹预加指令弹道作动态稳定区域图。

(1) 选择特征点和计算动力系数。

根据选择特征点的原则和计算作图的需要选择特征点,并计算动力系数 a_{22} 、 a_{24} 、 a_{25} 、 a_{34} 、 a_{35} 、 a'_{27} 和 a'_{28} 。计算结果列于表 9-1。为了清楚地看出动力系数的变化规律,把动力系数 $a_{ij}(t)$ 绘于图 9-3~9-5。

表 9-1 某滚转反坦克导弹弹体动力系数

时间	弹 体 动 力 系 数						
t/s	$-a_{22}/s^{-1}$	$-a_{24}/s^{-2}$	$-a_{25}/s^{-2}$	a_{34}/s^{-1}	a_{35}/s^{-1}	a'_{27}/s^{-1}	a'_{28}/s^{-2}
0.5	1.044 6	46.971		1.699 5		11.783	4.749 3
0.65	1.065 7	56.747	15.186	1.163 5	0.018 23	11.599	4.454 5
1.0	1.078 5	52.777	15.228	1.175 9	0.0181 8	10.998	4.272 1
3.0	1.130 0	82.568	15.468	1.295 3	0.018 30	11.129	4.210 3
5.0	1.176 1	91.727	15.704	1.330 2	0.018 52	11.447	4.238 9
10.0	1.293 7	115.91	16.288	1.427 6	0.019 24	12.301	4.314 3
12.0	1.341 5	126.78	16.508	1.476 4	0.019 35	12.863	4.364 0
15.0	1.415 8	148.17	16.844	1.578 6	0.019 70	13.581	4.454 4
20.0	1.559 3	183.88	17.355	1.758 1	0.020 17	15.191	4.616 6
23.0	1.654 0	208.39	17.645	1.888 7	0.020 44	16.382	4.734 5
26.0	1.749 8	234.02	17.910	2.041 7	0.020 76	17.694	4.857 9

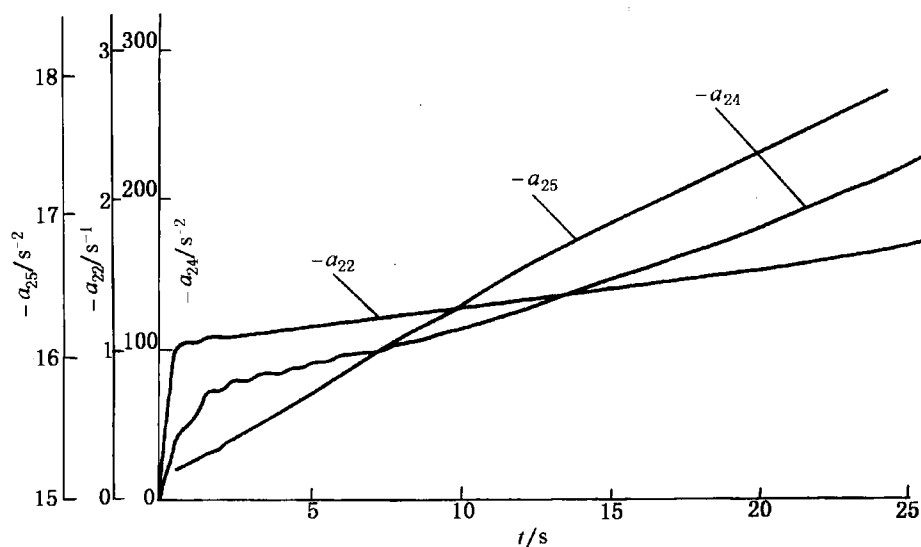


图 9-4 动力系数 $-a_{22}$ 、 $-a_{24}$ 、 $-a_{25}$

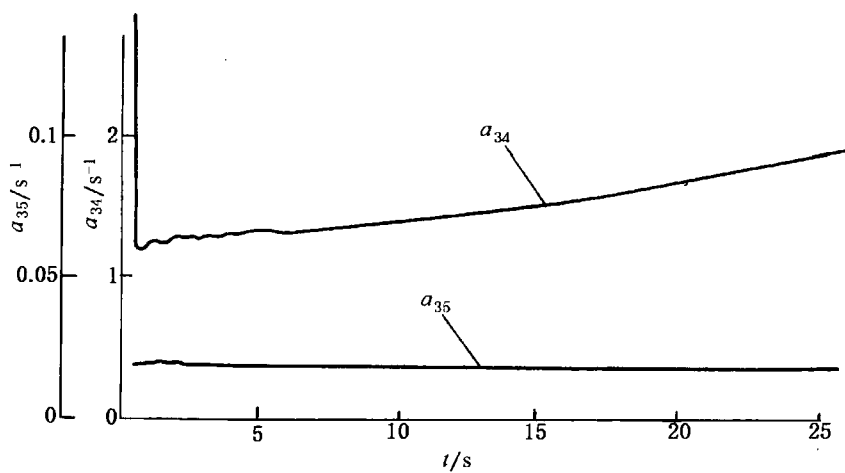


图 9-5 动力系数 a_{34} 、 a_{35}

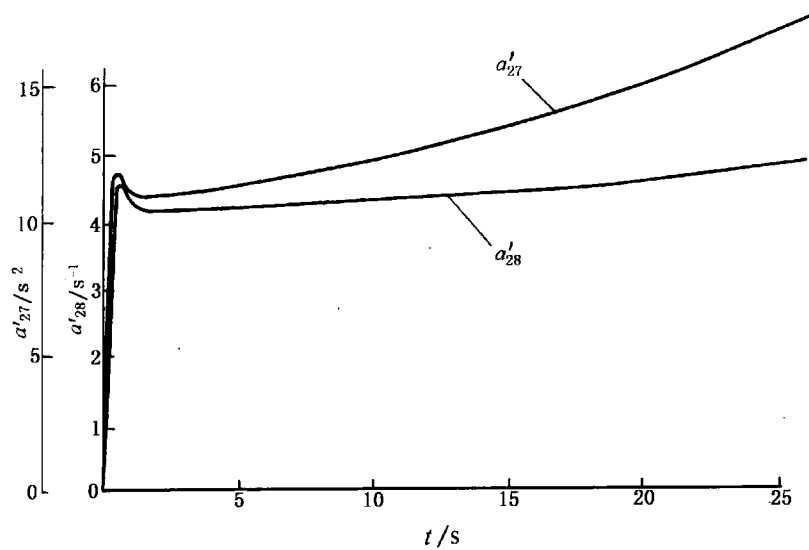


图 9-6 动力系数 a'_{27} 、 a'_{28}

(2) 计算滚转导弹固有频率 ω_c 和稳定边界常数 C 。

根据式 (7-123) 和 (9-39) 计算 ω_c 和 C 。计算结果见表 9-2 和图 9-7。

表 9-2 某滚转反坦克导弹固有频率、稳定边界常数、极限转速和设计转速

时间	弹体固有频率		稳定边界线常数	极限转速	设计转速
t/s	$\omega_c / (\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$	f_c / Hz	C	$n_L / (\text{r} \cdot \text{s}^{-1})$	$n / (\text{r} \cdot \text{s}^{-1})$
0.5	6.981 9	1.111 2	0.054 86	20.213	8.334
0.65	6.927 3	1.102 5	0.091 06	12.096	7.987
1.0	7.298 5	1.161 6	0.090 72		7.513
3.0	9.166 9	1.458 9	0.083 79		7.437
5.0	9.658 8	1.527 3	0.082 49	19.099	7.521
10.0	10.851 6	1.727 1	0.079 17	20.929	7.743
12.0	11.347 3	1.806 0	0.077 67		7.846
15.0	12.264 0	1.951 9	0.074 98		8.090
20.0	13.660 9	2.174 2	0.071 12	26.34	8.490
23.0	14.543 5	2.314 7	0.068 72	37.163	8.774
26.0	15.414 0	2.453 2	0.066 01		9.075

(3) 作动态稳定区域图

横坐标为 ω_{x_1} , 纵坐标为 ω_c 和 f_c , 作出不同飞行时刻 t 的稳定区。由于不同飞行时刻 C 是不同的, 因此, 稳定区也是不同的, 见图 9-8。

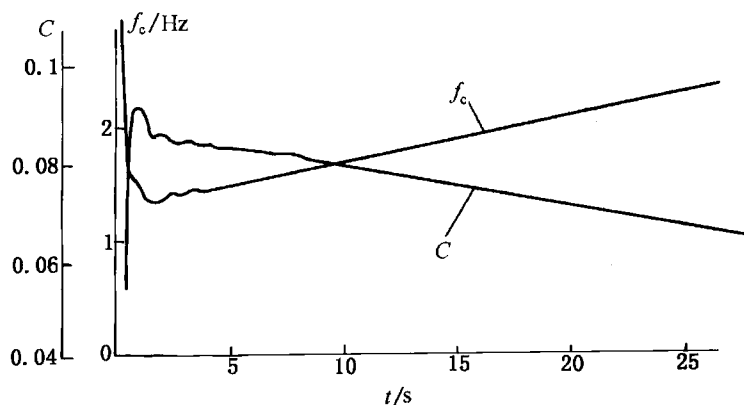


图 9-7 导弹固有频率 f_c 和动态稳定边界常数 C

(4) 讨论

由图 9-4 可见, 这个滚转反坦克导弹具有一定的静稳定性。随着飞行时间的增加, 由于导弹质心不断前移、续航速度的增加和转动惯量 J_x 的下降, 使得 $|a_{24}|$ 不断增加, 动态稳定性也越来越好。由图 9-8 可见, 在起飞段结束以后 ($t \approx 0.65\text{s}$), 动态稳定区随着飞行时间的增加而增加。

导弹在不同的飞行时刻, 由于 C 和 ω_c 值不同, 其极限转速 n_L 是不同的。在图 9-8 中, 根据不同的飞行时间的 ω_c 值, 作平行于横坐标的虚线, 与该飞行时间的边界线交于“·”, 然后,

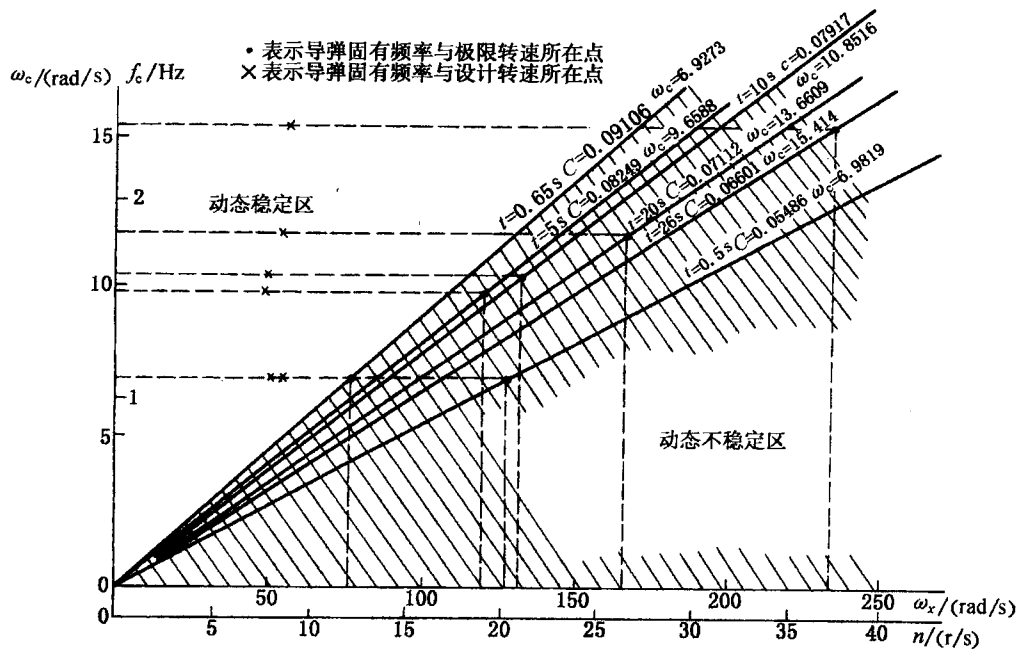


图 9-8 某滚转反坦克导弹预加指令弹道的动态稳定区域图

通过此点作平行纵坐标的直线，与横坐标的交点，即为该飞行时间的极限转速 n_L 。图中“×”的位置表示导弹在该飞行时刻的固有频率和设计转速 n 的大小，这是由弹道计算得到的。不同飞行时刻的极限转速 n_L 和设计转速 n 的比较见表 9-2。因此，为了保证弹体动态稳定性，设计转速 n 一定要小于极限转速 n_L 。

第十章 导弹运动的自动稳定与控制

前面几章讨论了导弹弹体的动态特性。我们知道,导弹弹体无论在控制系统中或在制导系统中,都是其中的一个环节,也是被控制对象。因此,弹体的动态特性对控制系统和制导系统的动态特性有很大的影响。在这一章中,要讨论自动驾驶仪和弹体组成控制回路后,在执行稳定与控制任务时导弹的动态特性;并对弹体的动态特性提出一些要求。

§ 10-1 倾斜运动的自动稳定

一、倾斜稳定回路

由 § 8-4 知道,倾斜扰动运动可由式(8-24)进行描述,即

$$\frac{d^2\Delta\gamma}{dt^2} = b_{11} \frac{d\Delta\gamma}{dt} + b_{17}\Delta\delta_x + b_{18}M_{gx} \quad (10-1)$$

当导弹受到倾斜干扰力矩而发生滚转时,导弹弹体并不产生使倾斜角 γ 消除的力矩。对于轴对称型的导弹,除滚转导弹外,一般都要求倾斜稳定,即 $\gamma=0$ 。因此,要使导弹在飞行过程中,具有足够的倾斜稳定性,一定要有倾斜自动驾驶仪,使副翼发生作用。当导弹正向倾斜时,副翼偏角也为正(右副翼后缘下偏,左副翼后缘上偏),因为倾斜操纵力矩导数 $M_{\delta_x}^{\delta_x} < 0$, 这样就产生负向操纵力矩,使导弹纠正倾斜,见图 10-1(a)。反之,如果导弹反向倾斜,见图 10-1(b),副翼偏角也为负,同样可以消除倾斜。因此,要使导弹能够消除倾斜,必须使副翼自动跟随倾斜角偏转。

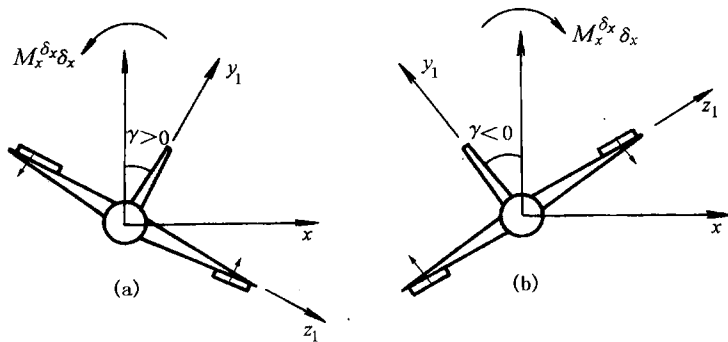


图 10-1 导弹的倾斜操纵力矩

(a) $M_{\delta_x}^{\delta_x} < 0$; (b) $M_{\delta_x}^{\delta_x} > 0$

导弹自动驾驶仪一般都由敏感元件、放大器、执行机构三个基本部分组成,每一部分的作用如下:敏感元件用来测量弹体运动参数,如导弹的姿态角 ϑ 、 ψ 、 γ 及其角速度 $\dot{\vartheta}$ 、 $\dot{\psi}$ 、 $\dot{\gamma}$, 飞行高度 H 、飞行速度 V 、动压 q 以及攻角 α 和侧滑角 β 等。在自动驾驶仪中,常采用测量角度的三自由度陀螺以及测量角速度的二自由度陀螺仪或称为微分陀螺仪或速度陀螺仪。这种陀螺仪的动态特性可以用二阶振荡环节来表示。对于灵敏度较高的陀螺,它的时间常数约 0.01 s,要比导弹的时间常数小得多。不然,陀螺就不能迅速指示出导弹姿态角的变化。因此,初步分析时,可以不计敏感元件的时间常数,将它看成是一个比例放大环节。但是,在分析选择控制系统的元件参数时,则要尽可能准确地推写出敏感元件的传递函数。

自动驾驶仪的放大器目前大部分是晶体管或集成电路的低频放大器,这些放大器的传递特性大部分都具有非线性特点。但只要适当选择它的放大范围,使其在线性段工作,则可将

放大器看成是一个线性放大环节。

舵机是自动驾驶仪的执行元件，其任务是接受控制信号或稳定信号，从而使导弹的操纵机构(如空气舵)偏转。它的结构形成是多种多样的：按其能源分类有电气式舵机(如电磁铁、电动机)、液压式舵机(如液压马达作动筒)、气压式舵机(如气压活塞)等。大多数舵机的传递函数是一个非周期环节，它的时间常数在很大程度上决定着自动驾驶仪的惯性。

自动驾驶仪通过上述的三个基本组成部分，就能够使导弹在飞行中实现自动稳定。例如，导弹倾斜时，陀螺地平仪能够测量出倾斜角大小，并将信号传递给放大器予以放大，信号放大后推动舵机工作，使副翼朝着消除倾斜的方向偏转，从而使导弹回复到原来的姿态。图10-2是倾斜自动驾驶仪和弹体倾斜运动组成的倾斜稳定系统示意图。对于轴对称导弹，一

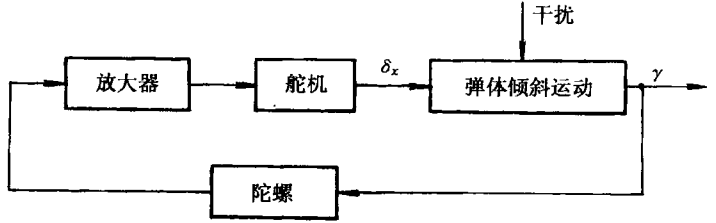


图 10-2 倾斜稳定系统示意图

般只要求倾斜稳定，而没有倾斜控制的要求，所以习惯称为倾斜稳定系统。图内各环节如用传递函数来表示，就组成倾斜稳定回路的结构图。这时研究导弹的倾斜运动，实际上是分析以 γ 或 $\dot{\gamma}$ 为输出量的闭环系统的动态特性。

自动驾驶仪的工作状态可以是线性的，也可以是非线性的，一般说，即便是线性的，也或多或少存在着非线性的因素。如果略去自动驾驶仪的非线性因素，对于所研究问题的影响程度可以忽略不计，就可以把它看成是线性的。

在自动驾驶仪中描述舵偏角随运动参量变化的动态方程，称为调节规律。如果不考虑自动驾驶仪的惯性，导弹倾斜运动的调节规律为

$$\delta_x = K_\gamma \gamma + K_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \quad (10-2)$$

式中 K_γ ——倾斜角信号的放大系数，或称传动比；

$K_{\dot{\gamma}}$ ——倾斜角速度信号的放大系数，或称角速度传动比。

在调节规律中，输入量是倾斜角和角速度，输出量是副翼偏转角。

二、倾斜运动的稳定性

为了使分析问题简明起见，忽略自动驾驶仪的惯性，定性地讨论调节规律对倾斜稳定性的影响。

1. 放大系数 K_γ 和 $K_{\dot{\gamma}}$ 的作用

无惯性自动驾驶仪的调节规律如式(10-2)所示。导弹在此驾驶仪工作下的倾斜扰动运动方程组应为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma} &= b_{11} \dot{\gamma} + b_{17} \delta_x + b_{18} M_{gx} \\ \delta_x &= K_\gamma \gamma + K_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (10-3)$$

将式(10-3)中第二式代入第一式得

$$\dot{\gamma} = (b_{11} + b_{17} K_{\dot{\gamma}}) \dot{\gamma} + b_{17} K_\gamma \gamma + b_{18} M_{gx} \quad (10-4)$$

$$\text{或} \quad \ddot{\gamma} = b_{11}^* \dot{\gamma} + b_{17} K_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} + b_{18} M_{gx} \quad (10-5)$$

$$\text{式中} \quad b_{11}^* = b_{11} + b_{17} K_{\dot{\gamma}} = \left(m_x^{\omega_x} + K_{\dot{\gamma}} \frac{2V}{l} m_x^{\delta_x} \right) \frac{qSl}{J_x} \frac{l}{2V}$$

$$b_{17} K_{\dot{\gamma}} = m_x^{\delta_x} \frac{qSl}{J_x} K_{\dot{\gamma}}$$

式(10-5)与无自动驾驶仪的倾斜扰动运动方程(10-1)有类似的形式。

下面分别讨论 $K_{\dot{\gamma}}$ 和 K_{γ} 对导弹倾斜运动的影响。

1) $K_{\dot{\gamma}}$ 的影响

当 $K_{\dot{\gamma}} > 0$ 时, 由于 $m_x^{\omega_x} < 0$, $m_x^{\delta_x} < 0$, 所以 $|b_{11}^*| > |b_{11}|$, 亦即 $|b_{11}^* \dot{\gamma}| > |b_{11} \dot{\gamma}|$ 。

引入一次导数 $K_{\dot{\gamma}}$ 调节规律的物理意义是相当于增大导弹倾斜运动的阻尼。因为除了产生气动阻尼力矩 $M_x^{\omega_x} \dot{\gamma}$ 外, 副翼还要产生倾斜控制力矩 $M_x^{\delta_x} K_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$, 这个力矩既与 $\dot{\gamma}$ 和 $K_{\dot{\gamma}}$ 成正比, 又与 $\dot{\gamma}$ 的方向相反, 与阻尼力矩的方向相同, 所以这一部分操纵力矩起到了阻尼作用, 见图 10-3。

2) K_{γ} 的影响

当 $K_{\gamma} > 0$ 时, $b_{17} K_{\gamma} = K_{\gamma} M_x^{\delta_x} / J_x < 0$ 。

引入 K_{γ} 的物理意义是: 当倾斜角 γ 为正值时, 由于倾斜自动驾驶仪的作用, 副翼作相应的偏转, 产生一个消除倾斜的操纵力矩 $M_x^{\delta_x} K_{\gamma} \gamma$, 见图 10-3。因此, 加入 K_{γ} 的作用, 是使导弹具有相当于倾斜静稳定性的性能, 因而大大改变了导弹的倾斜动态特性。

如果选择适当的 K_{γ} 和 $K_{\dot{\gamma}}$, 就可以使导弹的倾斜稳定性达到预期的要求。

由于导弹所采用的制导系统不同, 对导弹倾斜运动的要求也不同, 引入的调节规律也不同。如有的指令制导的导弹, 要求在制导过程中倾斜角接近于零, 这时倾斜自动驾驶仪需引入 γ 和 $\dot{\gamma}$ 反馈信号; 也有的导弹, 如红外自动导引响尾蛇导弹, 并不要求对倾斜角进行稳定, 而只要求对导弹倾斜角速度 $\dot{\gamma}$ 进行稳定, 这时只需引入 $\dot{\gamma}$ 反馈信号; 也有的导弹为了改善系统品质, 除引入 γ 和 $\dot{\gamma}$ 外, 还需引入二次导数 $\ddot{\gamma}$ 的反馈信号。对于采用单一执行机构(舵机)的滚转导弹, 一般通过弹上装置(如弹翼安装角、发动机扭转角和旋转小发动机等)使弹产生滚转, 不再需要倾斜稳定系统。

2. 放大系数 K_{γ} 和 $K_{\dot{\gamma}}$ 对导弹倾斜运动过渡过程的影响

倾斜运动方程(10-4)的特征方程式为

$$\lambda^2 - (b_{11} + b_{17} K_{\dot{\gamma}}) \lambda - b_{17} K_{\gamma} = 0 \quad (10-6)$$

$$\text{其根为} \quad \lambda_{1,2} = -\sigma \pm \nu = \frac{b_{11} + b_{17} K_{\dot{\gamma}}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{[-(b_{11} + b_{17} K_{\dot{\gamma}})]^2 + 4b_{17} K_{\gamma}} \quad (10-7)$$

于是, 倾斜运动方程(10-4)的解为

$$\gamma(t) = \gamma_0 e^{-\sigma t} \left(\frac{\sigma + \nu}{2\nu} e^{\nu t} + \frac{-\sigma + \nu}{2\nu} e^{-\nu t} \right) + \gamma_0 e^{-\sigma t} \frac{1}{2\nu} (e^{\nu t} - e^{-\nu t}) - \frac{b_{18} M_{gx}}{b_{17} K_{\gamma}} \left(1 - \frac{\sigma + \nu}{2\nu} e^{-(\sigma + \nu)t} - \frac{\sigma + \nu}{2\nu} e^{-(\sigma - \nu)t} \right) \quad (10-8)$$

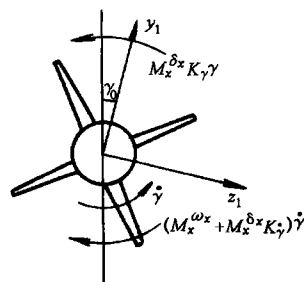


图 10-3 倾斜操纵力矩作用图

副翼偏转角则为

$$\delta_x = \left(K_{\dot{\gamma}} \frac{d}{dt} + K_{\gamma} \right) \gamma(t) \quad (10-9)$$

下面就根 $\lambda_{1,2}$ 的形式, 简要讨论倾斜自动稳定的过渡过程。

如果自动驾驶仪没有引入倾斜角速度 $\dot{\gamma}$ 的信号, 放大系数 $K_{\dot{\gamma}} = 0$, 横向气动阻尼也很小, 即动力系数 $|b_{11}|$ 很小, 在根式(10-7)中

$$|4b_{17}K_{\gamma}| > b_{11}^2 \quad (10-10)$$

那么, $\lambda_{1,2}$ 是一对共轭复根, 倾斜角的自由扰动运动为振荡运动。根的实部因 $b_{11} < 0$ 而为负, 振荡运动是衰减的。

具有初始倾斜角 γ_0 的导弹, 其振荡运动产生与衰减过程如下: 由初始值 γ_0 引起副翼偏转, 因存在不等式(10-10), 副翼偏转较大, 因此在导弹上就产生了比较大的倾斜操纵力矩 $M_x^{\delta_x} K_{\gamma} \gamma$ 。在这个力矩作用下, 导弹一开始就滚得比较迅速, 以致使导弹在达到原始平衡位置时还具有继续滚转的动能 (即角速度不为零), 从而使导弹超过平衡位置向相反方向倾斜, 形成振荡形式的倾斜运动, 见图 10-4(a)。由于在振荡中受到气动阻尼力矩的作用, 振幅是逐渐衰减的, 于是经过几次振荡之后, 运动就停止了, 使导弹回复到原来位置。

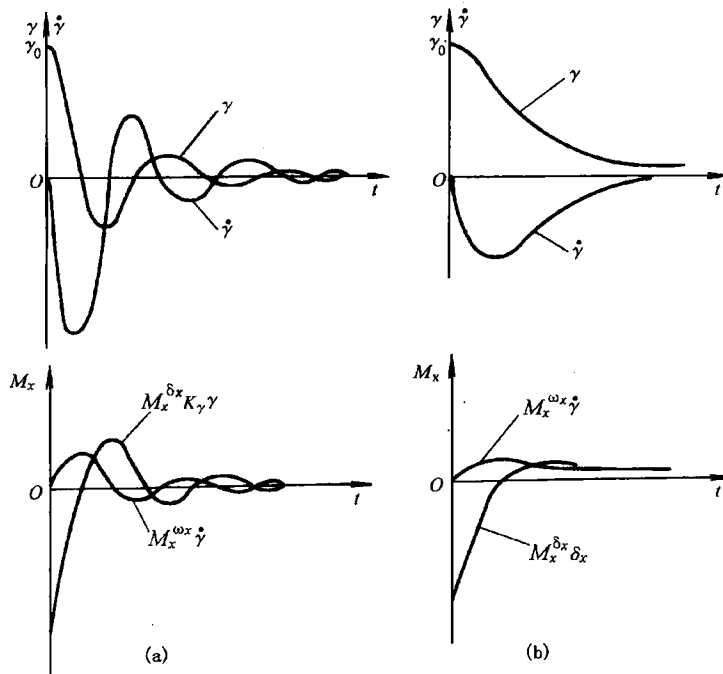


图 10-4 倾斜运动稳定过程

(a) $K_{\dot{\gamma}} = 0$; (b) $K_{\dot{\gamma}} \neq 0$

有倾斜自动驾驶仪与无倾斜自动驾驶仪相比有很大的差别。后者在偶然干扰 γ_0 作用下, 导弹因无倾斜静稳定性始终要偏斜 γ_0 角。有了自动驾驶仪, 引入倾斜角 γ 信号, 导弹就可以消除 γ_0 角而具有稳定性。所以说, 放大系数 K_{γ} 相当于增加导弹倾斜稳定性。

在自动驾驶仪中引入了倾斜角速度 $\dot{\gamma}$ 信号, 放大系数 $K_{\dot{\gamma}}$ 在根式(10-7)中就可能出现

$$[-(b_{11} + b_{17}K_{\dot{\gamma}})]^2 > |4K_{\gamma}b_{17}| \quad (10-11)$$

这时, $\lambda_{1,2}$ 是两个小于零的实根, 所以倾斜运动为非周期形式, 见图 10-4(b)。这样, 在 γ_0 作用下, 副翼不仅随倾斜角而偏转, 并且随倾斜角速度成比例的变化。因为是消除 γ_0 的倾斜运动, 其角速度 $\dot{\gamma}$ 的方向与 γ 相反, 这就减小了只由 γ 信号引起的副翼偏角, 使控制力矩减小或者说阻尼力矩得到增加, 其值为 $M_{\dot{\gamma}} K_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$, 这样倾斜运动就有可能变成衰减的非周期运动。引入 $\dot{\gamma}$ 信号后, 即使不能形成非周期的衰减运动, 也可减小超调量。总之, 根据设计导弹的需要, 对副翼采取不同的调节规律, 可以使倾斜运动自动稳定, 并能获得满意的动态品质。

在常值干扰作用下, 即 M_{gx} 为常值, 由解式(10-8)和(10-9)可得过渡过程结束后, $t \rightarrow \infty$ 时的稳态值为

$$\gamma_e = -b_{18} M_{gx} / b_{17} K_{\gamma} \quad (10-12)$$

以及

$$\delta_{xe} = -b_{18} M_{gx} / b_{17} \quad (10-13)$$

出现稳态值的原因如下: 由倾斜干扰力矩 M_{gx} 引起倾斜运动, 当过渡过程结束后, M_{gx} 仍保持常量, 要使导弹保持力矩平衡, 副翼必须相应地偏转 δ_{xe} , 以便产生可以抵消干扰力矩的倾斜控制力矩。因此, 由自动驾驶仪来转动副翼, 只有在出现 γ 或 $\dot{\gamma}$ 的条件下才有可能。如果 $\dot{\gamma}$ 不等于零, 导弹就要继续滚转, 过渡过程就不会结束, 所以只能有倾斜角 γ 的稳态值 γ_e 。

以上说明, 分析导弹倾斜运动时, 考虑了自动驾驶仪的动态方程(10-2), 就能够大大改善倾斜动态品质。但是在常值倾斜干扰力矩作用下, 导弹有倾斜角稳态值 γ_e , 这对控制飞行是不利的。故 γ_e 又称为稳态误差。

要消除稳态误差 γ_e , 其方法是改变副翼的调节规律, 这就要改变自动驾驶仪的结构。因为导弹上作用有常值干扰力矩, 若经过动态反应之后使其不再引起滚转, 必须将副翼偏转到某一固定位置, 以使力矩处于平衡状态。如果设法使副翼偏角在动态过程中作为倾斜角的被积函数, 则调节规律可以表成下式

$$\delta_x = \int K_{\gamma} \gamma dt \quad (10-14)$$

这样, 在过渡过程结束时, 即使倾斜角 γ 为零, 副翼仍有一个固定偏角, 其过渡过程如图 10-5 所示, 这时稳态误差 γ_e 为零。

对式(10-14)微分得

$$\dot{\delta}_x = K_{\gamma} \gamma$$

如果在引入倾斜角 γ 信号的同时还引入 $\dot{\gamma}$ 信号, 则调节规律可写成

$$\dot{\delta}_x = K_{\gamma} \gamma + K_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$$

与式(10-2)相比, 称其为无静差调节规律。

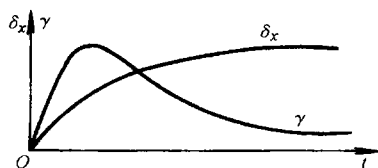


图 10-5 引入积分调节规律的倾斜运动

§ 10-2 俯仰角的自动稳定与控制

在上一节中, 已经知道导弹倾斜运动引入自动驾驶仪后, 能够得到倾斜运动的稳定性。而导弹纵向自动驾驶仪的作用, 除保证导弹具有稳定性外, 还有控制导弹飞行的作用。为了使

导弹尽可能沿要求的弹道飞行，要求自动驾驶仪能够迅速响应控制信号，使导弹具有良好的操纵性。根据不同的要求，被控制的运动参数可以是不同的，下面以俯仰角的自动稳定与控制为例，以说明纵向运动的稳定与控制。

一、常值干扰力矩的影响

作定高定向飞行的导弹，要求对俯仰角 ϑ 或攻角 α 保持稳定。在程序信号控制下进行爬高或下滑飞行的导弹，或者是在水平面内按程序控制信号改变航向的导弹，为了提高飞行精确度，也都是希望俯仰角或攻角不受干扰作用的影响。

纵向运动中的主要干扰作用是干扰力矩 M_{gx} ，而因为干扰力 F_{gy} 很小，所以忽略不计，于是导弹的扰动运动方程组简化形式由方程组(7-60)可得

$$\left. \begin{aligned} \Delta \ddot{\vartheta} - a_{22}\Delta \dot{\vartheta} - a_{24}\Delta \alpha &= a_{25}\Delta \delta_z + a_{26}M_{gx} \\ \Delta \ddot{\theta} - a_{34}\Delta \alpha &= a_{35}\Delta \delta_z \\ -\Delta \vartheta + \Delta \theta + \Delta \alpha &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10-15)$$

先分析干扰力矩 M_{gx} 对弹体运动的影响，这时自动驾驶仪不起作用，即 $\Delta \delta_z = 0$ ；然后，再引入自动驾驶仪的作用进行对比。

由 § 7-5 中知道，当动力系数 $a_{22}a_{34} + a_{24} < 0$ 时，导弹具有纵向稳定性，这是指运动参数 $\Delta \ddot{\vartheta}$ 、 $\Delta \dot{\vartheta}$ 和 $\Delta \alpha$ 的稳定性，即当舵阶跃偏转时， $\Delta \dot{\vartheta}$ 、 $\Delta \dot{\theta}$ 和 $\Delta \alpha$ 可以达到稳态值，而 $\Delta \vartheta$ 、 $\Delta \theta$ 值却越来越大。在常值干扰力矩 M_{gx} 作用下，当 $\Delta \delta_z = 0$ 时，由式(7-107)、(7-109)可得稳态值为

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_\epsilon &= \frac{-a_{34}a_{26}M_{gx}}{a_{24} + a_{22}a_{34}} \\ \alpha_\epsilon &= \frac{-a_{26}M_{gx}}{a_{24} + a_{22}a_{34}} \\ \dot{\theta}_\epsilon &= \dot{\vartheta}_\epsilon \end{aligned} \right\} \quad (10-16)$$

可见，如果导弹作水平飞行时，由于受到干扰力矩的作用，弹体纵轴最后要作定态转动，由此产生气动阻尼力矩 $M_{gz}''\dot{\vartheta}_\epsilon$ 来平衡干扰力矩。同时因为 $\dot{\theta}_\epsilon = a_{34}\vartheta_\epsilon$ ，导弹将离开水平弹道而作曲线飞行。

上述分析说明，由于干扰作用是不可避免的，如不转动升降舵来克服它所产生的影响，又无别的消除干扰影响的措施，则不能保证导弹按要求的弹道飞行。

二、俯仰角的自动稳定与控制

为了使俯仰角能自动稳定，在自动驾驶仪中引入 ϑ 、 $\dot{\vartheta}$ 反馈信号，即

$$\Delta \delta_z = K_\vartheta \Delta \vartheta + K_{\dot{\vartheta}} \Delta \dot{\vartheta} \quad (10-17)$$

将式(10-17)代入方程组(10-15)的第一式，得到

$$\Delta \ddot{\vartheta} - (a_{22} + a_{25}K_{\dot{\vartheta}})\Delta \dot{\vartheta} - a_{24}\Delta \alpha - a_{25}K_\vartheta \Delta \vartheta = a_{26}M_{gx}$$

将方程组(10-15)中第三式代入上式，得

$$\Delta \ddot{\vartheta} - (a_{22} + a_{25}K_{\dot{\vartheta}})\Delta \dot{\vartheta} - (a_{24} + a_{25}K_\vartheta)\Delta \alpha - a_{25}K_{\dot{\vartheta}}\Delta \theta = a_{26}M_{gx} \quad (10-18)$$

通过式(10-18)可以定性地分析，引入自动驾驶仪后对导弹动态特性的影响。

1. $K_{\dot{\vartheta}}$ 的影响

因为 $a_{22} = M_{\dot{z}^*}^w / J_z$ 代表弹体阻尼, 一般数值不大, 而引入自动驾驶仪作用后

$$a_{22}^* = a_{22} + a_{25}K_{\dot{\vartheta}} = \frac{M_{\dot{z}^*}^w + K_{\dot{\vartheta}}M_{\dot{z}^*}^{\delta}}{J_z} = \left(m_{\dot{z}^*}^w + K_{\dot{\vartheta}} \frac{V}{L} m_{\dot{z}^*}^{\delta} \right) \frac{qSL}{J_z} \frac{L}{V}$$

由于 $m_{\dot{z}^*}^w < 0$, $m_{\dot{z}^*}^{\delta} < 0$, 所以当 $K_{\dot{\vartheta}} > 0$ 时

$$|a_{22}^*| > |a_{22}|$$

这就是说, 引入自动驾驶仪的调节规律 $K_{\dot{\vartheta}}$ 后, 可以增加导弹的阻尼特性。

2. K_{ϑ} 的影响

引入自动驾驶仪的调节规律 K_{ϑ} 后, 静稳定性系数相应地变为

$$a_{24}^* = a_{24} + a_{25}K_{\vartheta}$$

当 $K_{\vartheta} > 0$ 时, 则 K_{ϑ} 的影响相当于提高了导弹的静稳定性。即使弹体是静不稳定的, 不能满足稳定性条件, 但只要适当选择 K_{ϑ} , 导弹运动也可以达到稳定。

但是, 在常值干扰力矩 M_{gz} 作用下, 通过对式(10-17)与方程组(10-15)的推导可知, 仍有稳态误差 ϑ_e 、 θ_e 、 α_e 存在。因此, 要消除稳态误差, 还要在调节规律中引入俯仰角的积分。

在纵向运动中, 自动驾驶仪除了保证飞行稳定性外, 更主要的作用是执行控制信号操纵导弹飞行。如果控制要求是改变导弹的俯仰角, 那么控制信号 u_{ϑ} 就代表所需的俯仰角值。因为任何控制信号对导弹飞行发生作用, 都要通过操纵机构的偏转来实现。因此, 对于那些既起稳定作用又起控制作用的自动驾驶仪, 它的动态方程就包含了这两个方面, 如升降舵的调节规律式(10-17)应为

$$\delta_z = K_{\vartheta}\vartheta + K_{\dot{\vartheta}}\dot{\vartheta} - (K_{\vartheta}u_{\vartheta}/K_g)$$

式中 K_g ——陀螺仪的传递系数。

因为控制信号 u_{ϑ} 不通过陀螺, 所以放大系数 K_{ϑ} 中要去掉 K_g 。

当控制信号 $u_{\vartheta} > 0$ 时, 正常式导弹的升降舵上偏(δ_z 为负), 俯仰角 ϑ 为正, 信号 $K_{\vartheta}\vartheta$ 与 $K_{\vartheta}u_{\vartheta}$ 的极性相反。

以上只是定性地说明引入自动驾驶仪后对导弹运动稳定和控制的作用。为了使讨论的问题简明, 没有考虑自动驾驶仪的惯性、导弹重力影响项(a_{33})等因素。如要深入了解各种不同调节规律的作用以及控制系统和制导系统的设计与分析, 可以阅读有关专著。

§ 10-3 对弹体动态特性的某些要求

对于自动控制飞行的导弹, 要求它能够满足一定的稳定性、操纵性、机动性及准确度的要求。这可以通过两种途径来实现, 一种是根据已确定的控制对象——导弹弹体来设计所要求的导引系统和控制系统; 一种是弹体设计与制导系统设计同时进行, 互相配合, 求得最合理的方案。对于战术导弹, 尤其是地空导弹, 因在稠密的大气层中飞行, 各运动参数变化很大; 而且对其命中准确度和飞行机动性的要求又很高, 因此, 需要采用第二种方式。在确定弹体结构及其参数时, 如弹翼、尾翼、操纵机构、质心位置等, 应考虑制导系统的要求, 还要考虑导引系统和控制系统的结构和特性。

在这一节中, 讨论对作为控制对象的导弹动态特性的某些要求。有些在第七~九章中已

有叙述，这里就不再重复。

对弹体动态特性的要求，就是对弹体传递函数参数的要求，也就是对表示传递函数参数的动力系数的要求。

一、阻尼

导弹的相对阻尼系数

$$\xi_M = \frac{-a_{22} - a'_{24} + a_{34}}{2\sqrt{-a_{24} - a_{22}a_{34}}} \quad (10-19)$$

当给定表征静稳定性和法向力系数 a_{24} 和 a_{34} 时，相对阻尼系数 ξ_M 就由表征导弹围绕质心旋转运动的阻尼系数 a_{22} 和 a'_{24} 来确定。当操纵机构阶跃偏转时，引起导弹的攻角 α 和法向过载 n_y 的响应，它们在过渡过程中产生的超调量是由相对阻尼系数 ξ_M 确定的。

过载 n_y 和攻角 α 的超调量不能超过允许值，这个允许值是由导弹的强度、空气动力特性的线性范围和控制仪器能够承受的过载等因素所确定的。一般允许相对超调量的数值不超过 30%，对应的导弹相对阻尼系数 $\xi_M = 0.35$ 。这样大的相对阻尼系数，在导弹可能飞行弹道的所有点都要满足是不可能的。例 7-1 的某地空导弹，在各种可能的飞行弹道上 $\xi_M = 0.04 \sim 0.13$ ；例 7-2 的某反坦克导弹 $\xi_M = 0.12 \sim 0.19$ ；某弹道式导弹在主动段弹道大部分时间内相对阻尼系数值为 $\xi_M < 0.1$ 。导弹相对阻尼系数小的原因是因为采用了小展弦比的机翼，其阻尼力臂很小；而飞行高度又变化很大所造成。在高空飞行时，依靠增加弹翼面积和力臂是增加不了多少空气动力阻尼的。在这种情况下，只有通过控制系统用角速度反馈或者角速度和角加速度反馈的方法，以得到所要求的 ξ 值。这样可以不增加甚至减少弹翼面积而使导弹重量降低，迎面阻力和结构载荷减小。例如某地空导弹，虽然导弹弹体在飞行过程中始终是稳定的，但是由于相对阻尼系数小，动态品质不能满足要求，尤其在高空，输出量的过渡过程时间太长，如在高空 22 km 弹道末点，过渡过程时间达 19 s 左右，振荡次数达 11 次，因此，必须通过控制系统来改善它的动态特性。用阻尼陀螺引入角速度 $\dot{\vartheta}$ 反馈信号，导弹相对阻尼系数 ξ 可以达到比较满意的数值 ($\xi = 0.524 \sim 1.137$)。表 10-1 为某地空导弹引入角速度反馈后相对阻尼系数 ξ 与弹体相对阻尼系数值 ξ_M 的比较。由表可见，引入 $\dot{\vartheta}$ 的反馈信号，改善了导弹的动态特性，如对高空弹道末点，过渡过程时间由 19 s 降到 1.5 s，振荡次数由 11 次降到 1.5 次。

表 10-1 某地空导弹引入角速度反馈后相对阻尼系数值 ξ

典型弹道的特征点	导弹相对阻尼系数 ξ	弹体相对阻尼系数 ξ_M
低空弹道(目标高度 $H_T = 3$ km, 飞行时间 $T = 28.6$ s)	0.707 9	0.147 5
中空弹道($H_T = 10$ km, $T = 16.5$ s)	0.88	0.091 5
高空弹道($H_T = 22$ km, $T = 32.5$ s)	0.524	0.041 9

用角速度反馈改善导弹阻尼特性，以弥补空气动力阻尼的不足。这一方法，同样可以用于倾斜运动。表示倾斜运动衰减程度的空气动力阻尼系数为

$$b_{11} = \frac{M_{x^x}}{J_x} = \frac{m_{x^x} \rho V S l^2}{2J_x} \quad (10-20)$$

在高空飞行时, 依靠弹体结构不可能改善倾斜阻尼特性。通常采用倾斜稳定系统, 用倾斜角 γ 和倾斜角速度 $\dot{\gamma}$ 反馈, 以达到倾斜稳定的目的。

这样, 从控制和稳定的角度, 对表征导弹阻尼性质的动力系数 a_{22} 、 a'_{24} 、 b_{22} 、 b'_{24} 和 b_{11} , 一般不提出特别的要求。在设计导弹时, 可以主要满足其它参数要求。

二、静稳定性和固有频率

对于战术导弹, 为了提高飞行准确度, 简化控制系统, 一般要求导弹是静稳定的。尤其对于攻击活动目标的地-空、空-空和地-地导弹, 如果弹体本身没有静稳定性, 则当自动驾驶仪还来不及反应动作时, 弹体的不稳定过程会增大导引误差。图 10-6 表示静稳定导弹和静不稳定导弹受到偶然干扰后, 攻角偏量的稳定过程。虚线表示弹体本身的稳定状态; 实线表示自动驾驶仪起稳定作用时导弹的稳定状态。由图可见, 在 $t_0 \sim t_1$ 这段时间, 由于控制系统的滞后和惯性等原因, 升降舵还没有响应动作, 自动稳定的作用是从 t_1 以后才开始的。

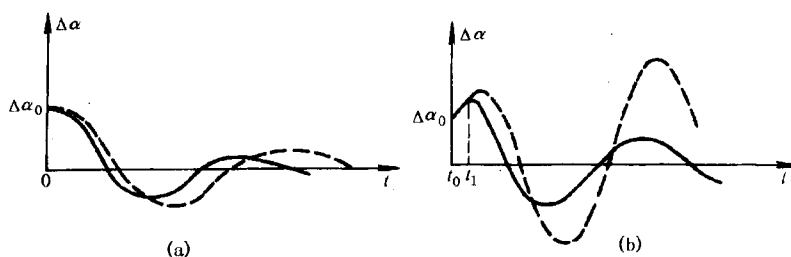


图 10-6 导弹受到干扰后, 攻角偏量的稳定过程
(a) 静稳定导弹; (b) 静不稳定导弹

有的小型导弹, 如有些反坦克导弹, 由于攻击目标的运动速度低, 对其操纵性、机动性的要求较低, 甚至不用自动稳定, 完全由弹体的稳定性来保证飞行的稳定性。这类导弹的静稳定性更是需要保证, 也就是应满足

$$m_z^a = \frac{x_G - x_F}{L} c_y^a < 0 \quad (10-21)$$

即保证导弹焦点的位置在质心的后面。

导弹的静稳定性不能过大, 否则, 机动性就要降低, 这可由下式看出

$$K_{n_y} \approx \frac{-a_{25}a_{34}}{a_{24}} \frac{V}{g} = \frac{-M_z^{\delta_z}}{M_z^a} \frac{P + Y^a}{mV} \frac{V}{g} \approx -\frac{m_z^{\delta_z}}{m_z^a} \frac{Y^a}{G} \quad (10-22)$$

为了使具有静稳定性的导弹控制系统简单, 希望在飞行攻角范围内 $m_z(\alpha)$ 是线性关系。这可以通过合理的空气动力布局来达到。

对于弹道式导弹, 由于大部分时间在真空中飞行, 一般没有尾翼或尾翼面积很小, 因此, 通常是静不稳定的, 或者有一段飞行时间是静不稳定的。这时, 导弹飞行的稳定性完全由自动稳定系统来保证, 或者由空气动力稳定和自动稳定系统共同完成。

近年来, 国外由于提高了飞行控制系统的可靠性、快速性, 应用“随控布局”的新设计方法, 以提高战术导弹的操纵性和机动性。这样可以放宽对弹体静稳定度的要求, 即允许导弹是静不稳定的, 甚至允许交替出现静不稳定和静稳定的现象。我国现在也已开始在战术导弹设计中进行应用研究。

下面主要讨论具有静稳定性的导弹。

为了满足导弹具有一定的静稳定度要求,可以采用改变焦点位置的方法,如改变弹翼位置及面积大小、装反安定面、改变尾翼面积等;也可以改变质心的变化规律,如改变燃料质心和导弹质心之间距离等。

固有频率是导弹的重要动力特性参数。由(7-124)式

$$\omega_c \approx \sqrt{-a_{24}} = \sqrt{\frac{-m_z^a q S b_A}{J_z}} \quad (\text{rad/s})$$

计算固有频率具有足够的精确度。超音速导弹的固有频率一般为 $6 \sim 18 \text{ rad/s}$,例7-1的某地空导弹,其固有频率为 $4 \sim 11 \text{ rad/s}$,当在高空飞行时,其固有频率相当低;亚音速飞行的某反坦克导弹的固有频率为 $6.8 \sim 15.3 \text{ rad/s}$ 。对于有翼式导弹,一般要求固有频率不能太大,也不能太小。导弹固有频率 ω_c 的确定,要考虑到导弹弹体参数、控制系统(稳定系统)以及制导系统参数之间的匹配关系。一般要求控制系统具有很好的滤波特性,使得能精确地实现控制信号。当控制系统截止频率 ω_{CT} 较小时,控制信号中有用的高频信号就输不进去,这样就不能精确地实现控制信号。通常要求控制系统截止频率 ω_{CT} 大于或等于制导系统截止频率 ω_g 的3~4倍,即

$$\omega_{CT} \geq 3 \sim 4 \omega_g \quad (10-23)$$

而控制系统截止频率和导弹固有频率的关系为

$$\omega_{CT} = K \omega_c \quad (10-24)$$

上式中系数 K 值对中等快速作用控制系统为 $1.1 \sim 1.4$;对高的快速作用的控制系统为 $1.5 \sim 1.8$ 。 K 值不能太大,否则,将使控制系统复杂,给设计工作带来困难。

当导弹的稳定性仅依靠空气动力实现时(即没有自动稳定系统),这时其固有频率应满足

$$\omega_c \geq 3 \sim 4 \omega_g \quad (10-25)$$

即导弹固有频率不能小于某个允许值 $\omega_{c \min}$ 。固有频率太小,与制导系统的频率接近时,要发生共振现象,同时,还会引起过渡过程时间的增加,从而造成制导系统的动态误差增大。但是,固有频率不能太大,否则,自动驾驶仪就难于设计;同时,控制系统截止频率过大,还会混入一些随机高频噪声信号而引起起伏干扰,使得随机误差增大;导弹固有频率太大,也就是静稳定性过大,还会引起导弹机动性降低和舵机功率增大。如某地空导弹制导回路振荡频率 ω_g 为 $0.5 \sim 0.6 \text{ rad/s}$,而导弹固有频率为 $\omega_c = 4 \sim 11 \text{ rad/s}$ 。

下列数据仅供初步方案设计时,确定静稳定度和自振频率的参考。

地空导弹	$H < 4 \sim 5 \text{ km}$	$f \geq 3 \sim 4 \text{ Hz}$
地空导弹	$H = 20 \sim 25 \text{ km}$	$f \geq 1.2 \sim 1.5 \text{ Hz}$
空空导弹	$H = 20 \sim 25 \text{ km}$	$f \geq 1.6 \sim 1.8 \text{ Hz}$
飞航式导弹		$f < 1.5 \sim 2 \text{ Hz}$

对于滚转导弹的特殊要求,在第九章中已进行了阐述,这里不再重复。

总之,对导弹固有频率的选择,应考虑多方面的因素。

三、操纵机构效率

在进行导弹总体和制导系统设计时,会对操纵机构效率提出一定的要求。对于俯仰、偏航和倾斜操纵机构效率的实现应由导弹设计师来完成,而对操纵机构的要求,应该考虑到控

制系统与制导系统的特性, 如对控制力矩或操纵机构偏转角最大值的限制等要求。

1. 倾斜操纵机构效率

倾斜操纵机构效率由动力系数

$$b_{17} = \frac{M_{x^{\delta}}^{\delta}}{J_x} = \frac{m_{x^{\delta}}^{\delta} q S l}{J_x} \quad (10-26)$$

以及操纵机构所产生的最大倾斜力矩确定

$$M_{x^{\delta}}^{\delta} \delta_{x \max} = \frac{b_{17}}{b_{18}} \delta_{x \max} \quad (10-27)$$

倾斜稳定自动装置传递系数 K_7 取决于 b_{17} 值(见 § 10-1)。为了使这个传递系数值在适当范围, 应当使系数 b_{17} 值按下式限定

$$|b_{17}|_{\min} \leq |b_{17}| \leq |b_{17}|_{\max} \quad (10-28)$$

操纵机构效率系数 b_{17} 的值及最大偏转角 $\delta_{x \max}$ 应当使操纵机构产生的最大力矩等于或大于倾斜干扰力矩, 即

$$M_{x^{\delta}}^{\delta} \delta_{x \max} \geq M_{gx}$$

同时, 在阶跃倾斜控制力矩作用下, 引起的过渡过程中的超调量(倾斜角 γ 或倾斜角速度 $\dot{\gamma}$) 不应该超过允许值, 即

$$\gamma_{\max} \leq \gamma_p \quad \text{或} \quad \dot{\gamma}_{\max} \leq \dot{\gamma}_p \quad (10-29)$$

操纵机构的最大偏转角通常由结构强度和空气动力允许范围(线性范围, 不超过临界值)等因素确定, 一般情况 $\alpha + \delta_z < 25^\circ \sim 30^\circ$ 。如果倾斜控制力矩由空气动力产生, 那么, 对倾斜操纵机构效率的要求应以最大飞行高度作为计算条件。

2. 俯仰和偏航操纵机构效率

俯仰和偏航操纵机构效率由动力系数 a_{25} 和 b_{25} 的大小及由操纵机构所产生的最大俯仰和偏航操纵力矩确定, 即

$$a_{25} = \frac{M_z^{\delta}}{J_z} = \frac{m_z^{\delta} q S b_A}{J_z} \quad (10-30)$$

$$M_z^{\delta} \delta_{z \max} = \frac{a_{25}}{a_{26}} \delta_{z \max} \quad (10-31)$$

$$b_{25} = \frac{M_y^{\delta}}{J_y} = \frac{m_y^{\delta} q S b_A}{J_y} \quad (10-32)$$

$$M_y^{\delta} \delta_{y \max} = \frac{b_{25}}{b_{28}} \delta_{y \max} \quad (10-33)$$

对俯仰和偏航操纵机构效率的要求取决于

- (1) 飞行高度和速度的变化范围;
- (2) 导弹是否具有静稳定性, 飞行过程中静稳定度的变化大小;
- (3) 弹体结构的要求;
- (4) 导弹控制系统类型(如有静差系统还是无静差系统)及其要求等。

对于静稳定导弹, a_{25} 和 b_{25} 的值不能过大或过小。如果该值过大, 将会造成导弹和控系统设计和制造的困难; 如果该值过小, 则操纵很不灵活, 而且当要求攻角或侧滑角比较大时, 舵偏角将超过许可范围。

选择适当的操纵机构效率方法之一,就是根据 m_z^a 与 $m_z^{\delta_z}$ (或 $m_y^{\delta_y}$ 与 $m_y^{\delta_y}$) 的比例,利用导弹设计经验,可以得到 $m_z^a/m_z^{\delta_z}$ 的参考范围。表 10-2 列出空气舵作为操纵机构时 $m_z^a/m_z^{\delta_z}$ 的数值,可以作为初步设计时的参考。

如果 m_z^a 值已初步确定,根据表 10-2,就很容易确定 $m_z^{\delta_z}$ (或 a_{25}) 的大小。

在任何飞行条件下,任何飞行时间都保持表中的比例数值,显然是不可能的,实际上只能要求接近表中数值。

对静稳定导弹,借助有静差控制系统进行控制时,并由制导信号改变操纵机构位置,在这种情况下,在所有可能飞行弹道上的所有点应满足

$$|\delta_{\max}| \geq |\delta_R| + \delta_s \quad (10-34)$$

式中 δ_R ——按理论弹道飞行所要求的操纵机构偏转角;

δ_s ——操纵机构偏转角裕量, $\delta_s > 0$ 。

操纵机构最大偏转角 $\delta_{\max}$ 值不能选得太大,它受结构强度和空气动力容许范围的限制。 δ_R 是为了产生需用过载 n_R 所必需的舵偏角,其大小取决于理论弹道飞行所需的法向过载值 n_R ,以及导弹过载传递系数 $K_M V/g$,即

$$\delta_R = n_R / K_M \frac{V}{g} \quad (10-35)$$

δ_s 由两部分组成

$$\delta_s = \delta_{s1} + \delta_{s2} \quad (10-36)$$

δ_{s1} 是为了修正发射后的初始导引误差;修正由一种导引方法过渡到另一种导引方法的导引误差,例如在弹道初始段由方案控制飞行进入无线电波束制导,在接近目标时,由遥控制导转为自动寻的制导;以及修正离开发射装置、级间分离、发动机打开和关闭等非随机干扰及常值风等。 δ_{s2} 是为了克服随机干扰所需的操纵机构偏转角裕量,例如克服控制信号中夹杂的噪音等。

因此,操纵机构最大偏转角要满足如下条件

$$|\delta_{\max}| \geq \left| \frac{n_R}{K_M \frac{V}{g}} \right| + \delta_s \quad (10-37)$$

这个条件也就是操纵机构效率应该保证导弹在稳态时输出必需的法向过载。

当导弹产生要求的需用法向过载时,其需用攻角 α_R 由表达式

$$\alpha_R = \frac{n_{Ry}}{\frac{V}{g} \frac{a_{24}a_{35} - a_{25}a_{34}}{-(a_{25} + a_{22}a_{35})}} \quad (10-38)$$

来确定。

若需用攻角越大,则所需系数 a_{34} 值越小,这样弹翼面积可以减小,但是需用攻角要受到攻角可用值的限制。与(10-37)式类似,可用攻角应满足

$$|\alpha_p| \geq |\alpha_R| + \alpha_s \quad (10-39)$$

表 10-2 $m_z^a/m_z^{\delta_z}$ 的参考范围

类 型	$\left(\frac{\delta_z}{\alpha} \right)_B = -m_z^a/m_z^{\delta_z}$
正常式	— (1~1.5)
鸭 式	0.8~1.2
无尾式	— (1.2~2)
旋转弹翼式	4~10
$(\delta_z/\alpha)_B$ ——平衡时升降舵偏角与攻角之比	

式中 α_p ——可用攻角；

α_s ——攻角裕量，类同操纵机构偏转角裕量。

操纵机构效率应保证在(10-39)式限定条件下产生所需的法向过载。

四、机动性

导弹的机动性可以由过载传递系数 $K_M \frac{V}{g}$ 及其表达式表示。下面以俯仰运动为例进行讨论。当 $n_{y_{\delta=0}}=0$ 时，可用过载 n_{py} 为

$$n_{py} = K_M \frac{V}{g} \delta_{z \max} = \frac{V}{g} \left(\frac{-a_{25}a_{34} + a_{35}a_{24}}{a_{22}a_{34} + a_{24}} \right) \delta_{z \max} \quad (10-40)$$

导弹的过载传递系数由法向力系数 a_{34} 和 a_{35} ，静稳定性系数 a_{24} 和操纵机构效率系数 a_{25} 确定。导弹弹体设计应保证在各种可能飞行弹道上所要求的过载传递系数的必需量。

可用过载应满足不等式

$$|n_p| \geq |n_R| + n_s \quad (10-41)$$

式中 n_s ——法向过载裕量， $n_s = n_{s1} + n_{s2} > 0$ 。

n_{s1} 为修正初始导引误差和克服干扰所需的过载裕量； n_{s2} 为随机振动消耗的过载裕量。法向过载裕量的确定与操纵机构偏转角裕量的确定是一样的。

由式(10-22)可知，导弹的过载传递系数近似为

$$K_M \frac{V}{g} \approx - \frac{m_z^{\delta_z}}{m_z^a} \frac{P + c_y^a q S}{G}$$

因此，过载传递系数与弹翼面积，动压和气动系数 $m_z^{\delta_z}$ 、 m_z^a 、 c_y^a 等有关。导弹设计应该满足所有可能的飞行弹道上的所有点实现条件(10-41)。选择弹翼面积时，应在攻角极限范围内考虑，并以最小动压作为计算条件。在这个条件下，弹翼面积应该产生必需的过载。但是弹翼面积不能太大，因为面积增加，导弹的重量也要增加。

此外，导弹的机动性还要考虑到由式(7-158)确定的导弹最大过载为

$$n_{y \max} = n_{py}(1 + 2\sigma)$$

不超过允许范围。如某地空导弹极限舵偏角为 20° ，则可用过载为

$$n_{py} = K_M \frac{V}{g} \delta_{z \max} = 3.1 \sim 27$$

显然变化范围太大，同时，由此式而得到的最大过载也超过允许的范围。这是由于在高空飞行中满足了机动性要求，可是在低空飞行时，就不能满足强度的要求。因此，采用随动压 q 大小改变操纵机构传动比的办法，使最大舵偏角 $\delta_{z \max}$ 与动压 q 成反比变化，以使得低空时减小最大过载值。此时 $n_{py} < 11$ ，最大过载也在容许范围之内。

附录一 求解运动方程组(2-121)的源程序

```
#include "math.h"
#include "stdio.h"
#include "alloc.h"
#define RAD 57.3

double ACX[5][6],ACY[5][6],AMZAF[5][6],AMZWZ[5][2],
      AXG[11][2],AJZ[3][2],AP[2],AMC[2],AGC[2],ANDM[2],
      ANDAF[2],Y[8],B[3],L,S,SONIC,RHO;
double MA,ABC_ALPHA,CX,CY,MZAF,MZWZ,XG,JZ,ALPHA;
FILE *fi,*fo;
```

主函数

```
main()
{
    void rk();
    void result();
    int i,j;
    double h;
    fi=fopen("input.dat","r");
    for(i=0;i<5;i++)
    {
        for(j=0;j<6;j++)
            fscanf(fi,"%lf",&ACX[i][j]);
    }
    for(i=0;i<5;i++)
    {
        for(j=0;j<6;j++)
            fscanf(fi,"%lf",&ACY[i][j]);
    }
    for(i=0;i<5;i++)
    {
        for(j=0;j<6;j++)
            fscanf(fi,"%lf",&AMZAF[i][j]);
    }
    for(i=0;i<5;i++)
    {
```

```

    for(j=0;j<2;j++)
        fscanf(fi,"%lf",& AMZWZ[i][j]);
    }
    for(i=0;i<11;i++)
    {
        for(j=0;j<2;j++)
            fscanf(fi,"%lf",& AXG[i][j]);
    }
    for(i=0;i<3;i++)
    {
        for(j=0;j<2;j++)
            fscanf(fi,"%lf",& AJZ[i][j]);
    }
    for(i = 0;i<2;i++)
        fscanf(fi,"%lf",& AP[i]);
    for(i = 0;i<2;i++)
        fscanf(fi,"%lf",& AMC[i]);
    for(i = 0;i<2;i++)
        fscanf(fi,"%lf",& AGC[i]);
    for(i = 0;i<2;i++)
        fscanf(fi,"%lf",& ANDM[i]);
    for(i = 0;i<2;i++)
        fscanf(fi,"%lf",& ANDAF[i]);
    for(i = 0;i<8;i++)
        fscanf(fi,"%lf",& Y[i]);
    for(i = 0;i<3;i++)
        fscanf(fi,"%lf",& B[i]);
    fscanf(fi,"%lf%lf%lf%lf%lf%lf",&L,&S,&SONIC,&RHO,&h);
    close(fi);

```

```

fo=fopen("output. dat","w");
fprintf(fo,"%s","TIME    ALPHA    V    X    Y    ");
fprintf(fo,"%s","MASS    THETA    GTHETA    WZ");
fprintf(fo,"\n");
fprintf(fo,"%s"," s      rad      m/s      m      m  ");
fprintf(fo,"%s"," kg      rad      rad      rad/s");
fprintf(fo,"\n");

```

```
rk(8,h);
```

```

do {
    result();
    rk(8,h);
}
while(Y[6]>=0);
}

```

右端子函数

```

void dery(n,dy,Y)
int n;
double dy[],Y[];
{
    extern void interp();
    double q,a[4],XF,YF,P,wzt,MC;
    q=RHO * Y[1] * Y[1]/2;
    MA=Y[1]/SONIC;
    ALPHA=Y[4]-Y[2];
    ABC_ALPHA=fabs(ALPHA);
    interp();
    a[0]=sin(Y[2]);a[1]=cos(Y[2]);
    a[2]=sin(ALPHA);a[3]=cos(ALPHA);
    if(ALPHA<0)CY=-CY;
    XF=CX * q * S;YF=CY * q * S;
    wzt=Y[3] * L/Y[1];
    MC=Y[0]<B[1]? AMC[0] : Y[0]<B[2]? AMC[1] : 0;
    P=Y[0]<B[1]? (AP[0]+AP[1]) : Y[0]<B[2]? AP[1] : 0;

    dy[0]=1;
    dy[1]=(P * a[3]-XF-9.81 * Y[7] * a[0])/Y[7];
    dy[2]=(P * a[2]+YF-9.81 * Y[7] * a[1])(1/Y[1] * Y[7]);
    dy[3]=(MZAF * ALPHA+MZWZ * wzt) * q * S * L/JZ;
    dy[4]=Y[3];
    dy[5]=Y[1] * a[1];
    dy[6]=Y[1] * a[0];
    dy[7]=-MC;

    return;
}

```

四阶龙格-库塔子函数

```
void rk(n,h)
int n;
double h;
{
    extern void dery();
    double a[4],old _y[8],Y1[8], * dy;
    int i,j;
    dy=calloc(n,sizeof(double));
    a[0]=a[1]=h/2;
    a[2]=a[3]=h;
    dery(n,dy,Y);
    for(i=0;i<n;i++)
    old _y[i]=Y[i];
    for (j=0;j<3;j++)
    {
        for (i=0;i<n;i++)
        {
            Y1[i]=old _y[i]+a[j] * dy[i];
            Y[i]=Y[i]+a[j+1] * dy[i]/3;
        }
        dery(n,dy,Y1);
    }
    for(i=0;i<n;i++)
    Y[i]=Y[i]+a[0] * dy[i]/3;
    free(dy);
    return;
}
```

插值子函数

```
void interp()
{
    extern double int11(),int32();
    double mzaf0;
    if(Y[0]<B[2])
    {
        XG=int11(AXG,11,Y[0]);
        JZ=int11(AJZ,3,Y[0]);
    }
    else
```

```

{
    XG=AXG[10][1];
    JZ =AJZ[2][1];
}
CX=int32(MA,ABS _ ALPHA,5,6,ANDM,ANDAF,ACX);
CY=int32(MA,ABS _ ALPHA,5,6,ANDM,ANDAF,ACY);
mzaf0=int32(MA,ABS _ ALPHA,5,6,ANDM,ANDAF,AMZAF);
if (ABS _ ALPHA! =0.)
    MZAF=mzaf0 * RAD+CY * (XG-AGC[0])/
    (ABS _ ALPHA * L);
else
{
    MZAF=mzaf0 * RAD;
}
MZWZ=int32(MA,XG,5,2,ANDM,AGC,AMZWZ);
return;
}

```

不等距单变元线性插值子函数

```
double int11(double YY[][2],int n,double x)
```

```

{
    int i,j;
    double fy;

    for(j=0;j<=n-2;j++)
    {
        if (x<=YY[j+1][0])
        {
            i=j;
            break;
        }
        else
            i=n-2;
    }
    fy=YY[i][1]+(YY[i+1][1]-YY[i][1]) * (x-YY[i][0])/
        (YY[i+1][0]-YY[i][0]);
    return(fy);
}

```

等距单变元抛物线插值子函数

```
double int31(x,N1,N2,I,A,Y0)
double x,A[2],*Y0;
int N1,N2,I;
{
    int I1;
    double H,AI,T,YE,c0,c1,c2;

    H=(A[1]-A[0])/(N1-1);
    I1=(x-A[0])/H+0.5;
    if((I1-1)<0)
        I1=1;
    else
    {
        if((I1-(N1-2))>=0) I1=N1-2;
    }
    AI=I1;
    T=(x-A[0])/H-AI;
    c0=0.5*T*(T-1);
    c1=1.-T*T;
    c2=0.5*T*(1.+T);

    I1=I1-1;
    YE=c0*(*(Y0+I1*N2+I))+c1*(*(Y0+(I1+1)*N2+I))
        +c2*(*(Y0+(I1+2)*N2+I));

    return(YE);
}
```

等距双变元抛物线线性插值子函数

```
double int32(x,qq,N1,N2,A,BB,Y0)
double x,qq,A[2],BB[2],*Y0;
int N1,N2;
{
    extern double int31();
    int I;
    double H,Y2[2],RES;
    — 282 —
```

```

H=(BB[1]-BB[0])/(N2-1);
I=(qq-BB[0])/H+1.;
if((I-1)<0)
    I=1;
else
    {
        if((I-(N2-1))>=0) I=N2-1;
    }
I=I-1;

Y2[0]=int31(x,N1,N2,I,A,Y0);
Y2[1]=int31(x,N1,N2,I+1,A,Y0);

RES=((qq-I * H-BB[0]) * Y2[1]-(qq-(I+1) * H-BB[0]) * Y2[0])/H;
return(RES);
}

```

输出数据文件子函数

```

void result()
{
    static int i=1;
    {
        fprintf(fo,"%-7.3f",Y[0]);
        fprintf(fo,"%6.3f",ALPHA);
        fprintf(fo,"%8.3f",Y[1]);
        fprintf(fo,"%8.3f",Y[5]);
        fprintf(fo,"%8.3f",Y[6]);
        fprintf(fo,"%8.3f",Y[7]);
        fprintf(fo,"%8.3f",Y[2]);
        fprintf(fo,"%8.3f",Y[4]);
        fprintf(fo,"%8.3f",Y[3]);
        fprintf(fo,"\n");

        if(i%5==0)
            fprintf(fo,"\n\n");
        i++;
    }
    return;
}

```

□

附录二 求解自由扰动运动方程组的源程序

本程序是求解自由扰动运动的计算程序，适用于特征方程为两对共轭复根的情况。

本算例的原始数据及要求同例 7-9。

程序由五个函数组成。主函数用于读入原始数据（动力系数和初始扰动值）；求特征方程式的系数值，即 P1、P2、P3、P4；调用 SRPE1 子函数求解特征方程式的根；调用 FLAP 子函数计算扰动运动参数的幅值和初始相位角；并打印计算结果。子函数 SRPE1 利用林世谔—赵访熊法求解实系数高次多项式方程的根；子函数 CPOW 进行复数的幂运算；子函数 CDIV 进行复数的除法运算；子函数 FLAP 利用拉式变换法求解过渡过程。

```
#include "math.h"
#include "stdio.h"
#include "alloc.h"
#define PI 2 * asin(1)
double a11,a13,a14,a21,a22,a24,a241,a25,a31,a33,a34,a35;
double P[4].THEAT;
int K;
FILE * fi;

主函数
main()
{
    int i,n,max;
    double * x,* y,es,esd,P1[4];
    struct complex DDD;
    int j,1;
    double R[2],F[2],ANG[2];
    fi=fopen("A.DAT","r");
    fscanf(fi,"%lf%lf%lf%lf%lf%lf%lf%lf%lf%lf%lf%lf%lf%lf%lf%lf",
    &a11,&a13,&a14,&a21,&a22,&a24,&a241,&a25,&a31,&a33,&a34,&a35);
    fscanf(fi,"%lf",&THEAT);
    printf("input the NO. of variable K=1(V),2(GSITA),3(SITA),4(ALPHA)");
    scanf("%d",&K);

    P[0]=(-1.)*a33+a34-a22-a241-a11;
    P[1]=a31*a14-a31*a13+a22*a33-a22*a34-a24+a33*a241+
    a33*a11-a34*a11+a22*a11+a241*a11;
    P[2]=(-1.)*a21*a14-a31*a22*a14+a22*a31*a13+a241*a31*a13+
    — 284 —
```

```

    a24 * a33 - a22 * a33 * all + a22 * a34 * all + a24 * all - a33 * all * a241;
p[3] = a21 * a33 * a14 - a13 * a21 * a34 + a24 * a31 * a13 - a24 * a33 * all;
for(i=0; i<4; i++)
P1[i] = P[i];
n=4;
max=1000;
es=1e-7;
esd=1e-10;
x=(double *)calloc(n,sizeof(double));
y=(double *)calloc(n,sizeof(double));
if(! SRPE1(n,P1,es,esd,max,x,y))
{
    printf("failed! \n");
    exit(1);
}
printf("the root of characteristic equation\n");
for(i=0; i<4; i=i++)
{
    printf("%10.6f+i%10.6f\n",x[i],y[i]);
}
j=0;
for(l=0; l<3; l=l+2)
{
    FLAP(x[1],y[1],&DDD);
    R[j]=2 * 57.3 * sqrt(DDD.x * DDD.x + DDD.y * DDD.y);
    if(K==1)R[j]=R[j]/57.3;
    F[j]=y[1] * 57.3;
    ANG[j]=atan(DDD.x/fabs(DDD.y)) * 57.3;
    j=j+1;
}
printf("the amplitude, frequency, initial position angle\n");

for(j=0; j<2; j++)
{
    printf("amplitude");
    printf("%11.6f\n",R[j]);

    printf("frequency")
    printf("%11.6f\n",F[j]);
}

```

```

printf("initial position angle")
printf("%11. 6f\n",ANG[j]);
}
}

```

林世谔-赵访熊法求解实系数高次多项式方程的根的子函数;

SRPE1 (int n,double *a,double es,double esd,

int max,double *x,double *y)

```

{
int i,j,k,n1,m1;
double *b,*c,d,dp,dq,fx,p,q,s,t;

b=(double *)calloc(n,sizeof(double));
if(b==NULL)
    return(0);
c=(double *)calloc(n,sizeof(double));
if(c==NULL)
    return(0);
n1=n;
c[0]=1;
m1=1;
for (i=1;i<=n;i++)
    y[i-1]=0;
while(1)
{
    if(n1<1)
    {
        free(b);
        free(c);
        return(1);
    }
    if(n1==1)
    {
        x[m1-1]=-b[n1-1];
        free(b);
        free(c);
        return(1);
    }
}

```

```

    }
    if(n1==2)
    {
        p=b[n1-2];
        q=b[n1-1];
    }
    else
    {
        p=0;
        q=0;
        k=0;
L:   b[0]=a[0]-p;
        b[1]=a[1]-p*b[0]-q;
        for(i=3;i<=n1;i++)
            b[i-1]=a[i-1]-p*b[i-2]-q*b[i-3];
        s=b[n1-2];
        t=b[n1-1]+p*b[n1-2];
        if(fabs(t)>=es)
        {
            c[1]=b[0]-p*c[0];
            for(i=3;i<=n1;i++)
                c[i-1]=b[i-2]-p*c[i-2]-q*c[i-3];
            d=c[nl-2]*c[nl-2]-(c[nl-1]-b[nl-2])*c[nl-3];
            dp=b[nl-2]*c[nl-2]-b[nl-1]*c[nl-3];
            dq=-b[nl-2]*(c[nl-1]-b[nl-2])+b[nl-1]*c[nl-2];
            if(fabs(d)<=esd)
            {
                p+=1;
                q+=1;
                goto L;
            }
            k+=1;
            p+=dp/d;
            q+=dq/d;
            if(k<=max)
                goto L;
            free(b);
            free(c);
            return(1);
        }
    }

```

```

    }
}
x[m1-1]=-p/2;
x[m1]=-p/2;
fx=-p/2;
fx=fx*fx-q;
if(fabs(fx)>=1e-10)
{
    if (fx>=0)
    {
        x[m1-1]+=sqrt(fx);
        x[m1]-=sqrt(fx);
    }
    if(fx<0)
    {
        y[m1-1]=sqrt(fabs(fx));
        y[m1]=-y[m1-1];
    }
}
ml+=2;
n1-=2;
for (i=1;i<=n1;i++)
    a[i-1]=b[i-1];
}
}

```

复数幂运算符函数

CPOW(double w,struct complex zl,struct complex *z)

```

{
double r,t;
if(zl.x==0&&zl.y==0)
{
    z->x=z->y=0;
    return(1);
}
if(zl.x==0)
{
    if(zl.y>0)

```

```

        t=1.5707963268;
    else
        t=-1.5707963268;
}
else
{
    if(zl.x>0)
        t=atan(zl.y/zl.x);
    else
    {
        if(zl.y>=0)
            t=atan(zl.y/zl.x)+PI;
        else
            t=atan(zl.y/zl.x)-PI;
    }
}
r=exp(w*log(sqrt(zl.x*zl.x+zl.y*zl.y)));
z->x=r*cos(w*t);
z->y=r*sin(w*t);
return(1);
}

```

复数的除法运算

CDIV(struct complex z1,struct complex z2,struct complex *z)

```

{
    double e,f;
    if(fabs(z2.x)>=fabs(z2.y))
    {
        e=z2.y/z2.x;
        f=z2.x+e*z2.y;
        z->x=(zl.x+zl.y*e)/f;
        z->y=(zl.y-zl.x*e)/f;
    }
    else
    {
        e=z2.x/z2.y;
        f=z2.y+e*z2.x;
        z->x=(zl.x*e+zl.y)/f;
        z->y=(zl.y*e-zl.x)/f;
    }
}

```

利用拉氏变换法求解过渡过程

FLAP(double x,double y,struct complex *DDD)

```
{
    struct complex zl,z40,z30,z20;
    struct complex DD,DR;
    struct complex I1,I2,I3,I4;
    zl.x=x;
    zl.y=y;
    CPOW(3.,zl,&z30);
    CPOW(2.,zl,&z20);
    DD.x=z30.x*4+z20.x*3*P[0]+zl.x*2*P[1]+P[2];
    DD.y=z30.y*4+z20.y*3*P[0]+zl.y*2*P[1];
    switch(K)
    {
        case 1:
            I1.x=(z20.x*(a13-a14)-zl.x*(a22*a13-a22*a14)-a24*a13)*THEAT;
            I1.y=(z20.y*(a13-a14)-zl.y*(a22*a13-a22*a14))*THEAT;
            CDIV(I1,DD,&DR);
            break;
        case 2:
            I2.x=((-1)*zl.x*a24+a24*a11+a21*(a13-a14))*THEAT;
            I2.y=(-1)*zl.y*a24*THEAT;
            CDIV(I2,DD,&DR);
            break;
        case 3:
            I3.x=(z30.x-z20.x*(a11+a22)-zl.x*(a24-a11*a22)+a24*a11-a21*a14)*THEAT;
            I3.y=(z30.y-z20.y*(a11+a22)-zl.y*(a24-a11*a22))*THEAT;
            CDIV(I3,DD,&DR);
            break;
        case 4:
            I4.x=(-z30.x+z20.x*(a11+a22)-zl.x*a11*a22+a21*a13)*THEAT;
            I4.y=(-z30.y+z20.y*(a11+a22)-zl.y*a11*a22)*THEAT;
            CDIV(I4,DD,&DR);
            break;
    }
}
```

```

    }
    DDD->x=DR.x;
    DDD->y=DR.y;
}

```

主要参考文献

- [1] 钱杏芳, 张鸿端, 林瑞雄. 导弹飞行力学. 北京: 北京工业学院出版社, 1987
- [2] (苏) 列别捷夫 АА, 契尔诺勃洛夫 ЛС. 无人驾驶飞行器的飞行动力学. 张炳暄等译. 北京: 国防工业出版社, 1964
- [3] Лебедев АА, чернобровкин ЛС. Динамика полета Беспилотных Летательных Аппаратов. Москва: Машиностроение, 1973
- [4] 张有济主编. 战术导弹飞行力学设计 (上、下). 北京: 宇航出版社, 1998.
- [5] 中国航天工业总公司《世界导弹大全》修订委员会. 世界导弹大全. 北京: 军事科学出版社, 1998
- [6] 严恒元主编. 飞行器气动特性分析与工程估算. 西安: 西北工业大学出版社, 1990
- [7] 刘同仁, 肖业伦. 空气动力学与飞行力学. 北京: 北京航空学院出版社, 1987
- [8] (苏) 高尔巴钦科 СА 等. 飞行力学的向量矩阵法. 关世义等译. 北京: 国防工业出版社, 1977
- [9] 肖业伦. 飞行器运动方程. 北京: 航空工业出版社, 1987
- [10] 曾颖超, 陆毓峰等. 战术导弹弹道与姿态动力学. 西安: 西北工业大学出版社, 1991
- [11] 吕学富主编. 飞行器飞行力学. 西安: 西北工业大学出版社, 1995
- [12] 陈士橹, 吕学富. 导弹飞行力学. 北京: 航空专业教材编审组, 1983
- [13] 周慧钟, 李忠应. 有翼导弹飞行动力学 (上、下册). 北京: 航空专业教材编审组. 1983
- [14] 韩慧君. 系统仿真. 北京: 国防工业出版社, 1985
- [15] 程国采. 战术导弹导引方法. 北京: 国防工业出版社, 1996
- [16] 陈佳实. 导弹制导和控制系统的分析与设计. 北京: 宇航出版社, 1989
- [17] 娄寿春主编. 导弹制导技术. 北京: 宇航出版社, 1989
- [18] 张望根主编. 寻的防空导弹总体设计. 北京: 宇航出版社, 1991
- [19] 赵善友主编. 防空导弹武器寻的制导控制系统设计. 北京: 宇航出版社, 1992
- [20] 万春熙. 反坦克导弹设计原理. 北京: 国防工业出版社, 1981
- [21] 杨绍卿等. 火箭弹散布和稳定性理论. 北京: 国防工业出版社, 1979
- [22] 方再根. 计算机模拟和蒙特卡洛方法. 北京: 北京工业学院出版社, 1988
- [23] 张金槐, 蔡洪. 飞行器试验统计学. 长沙: 国防科技大学出版社, 1995
- [24] Лебедев АА, Карабанов В А. Динамика Систем управления беспилотными Аппаратами. Москва: Машиностроение. 1965
- [25] Paul Zarchan. Tactical and Strategic Missile Guidance. Published by the American Institute of Aeronautics and Astronautics. Inc. 1994
- [26] 南京航空学院等合编. 自动控制原理. 北京: 国防工业出版社, 1984
- [27] (加) 埃特肯 B. 大气飞行动力学. 何植岱等译. 北京: 科学出版社, 1977
- [28] (苏) 高尔巴钦科 СА 等. 飞行力学手册 (第一、二册). 常伯浚等译. 北京: 国防

工业出版社，1975

[29] Etkin B. Dynamics of Flight (Stability and Control), Second Edition. John Wiley & Sons. Inc, 1982

[30] (英) 加涅尔 P. 导弹控制系统. 华克强, 丁放等译. 北京: 国防工业出版社, 1985